Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Березанский, Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 61–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:44:22

УДК 517.515

Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига

© 1996. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

Гауссов бесконечномерный анализ [1, 2] в последнее время обобщался на негауссовы меры, и одно из таких обобщений основано на замене ортогональных разложений на биортогональные [3, 4]. В [5–7] установлено, что в модельном одномерном случае подход, использованный в [3, 4], может быть широко обобщен, если вместо экспонент брать характеры L_1 -гипергруппы, а вместо обычного сдвига — обобщенный. В этой заметке показано, что то же можно сделать и в бесконечномерном случае и получить в общей ситуации результаты, охватывающие результаты работ [3, 4]. При этом детальная теория L_1 -гипергрупп с не локально компактным базисом Q (которая пока не построена) сейчас не нужна, достаточно пользоваться операторами обобщенного сдвига T_x ($x \in Q$), удовлетворяющими весьма простым требованиям.

1. Пусть Q — сепарабельное метрическое полное пространство точек $x, y, \dots$ и $C(Q)$ — линейное пространство всех комплекснозначных локально ограниченных (т.е. ограниченных на каждом шаре из Q) непрерывных функций на Q . Предположим, что в $C(Q)$ задано семейство $T = \{T_x\}_{x \in Q}$ линейных операторов «обобщенного сдвига», обладающих следующими свойствами: (а) $(T_x f)(y) = (T_y f)(x)$ ($x, y \in Q$) для любой функции $f \in C(Q)$ (коммутативность); (б) существует точка $e \in Q$ (базисная единица), такая, что $T_e = \text{id}$; (в) для любых $x, y \in Q$ существует шар $W = W_{x,y} \subset Q$, такой, что для любой функции $f \in C(Q)$ значения $(T_x f)(y)$ не зависят от значений $f(s)$ при $s \in Q \setminus W$ (локальность); (г) если $C(Q) \ni f_n \rightarrow f \in C(Q)$ в смысле равномерной сходимости на каждом шаре, то $(T_x f_n)(y) \rightarrow (T_x f)(y)$ для любых $x, y \in Q$ (непрерывность).

Характером семейства T будем называть не равную тождественно нулю функцию $\chi \in C(Q)$, удовлетворяющую соотношению $(T_x \chi)(y) = \chi(x)\chi(y)$ ($x, y \in Q$). Предположим, что для T существует множество характеров $\chi_\lambda(x) = \chi(x, \lambda)$, нумерующихся точками λ комплексного гильбертова пространства N_0 и аналитически зависящих от λ .

Более точно, рассмотрим для любых $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ цепочку комплексных гильбертовых вложенных пространств

$$\mathcal{N}' = \text{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_{-p}^{\widehat{\otimes} n} \supseteq N_{-p}^{\widehat{\otimes} n} \supseteq N_0^{\widehat{\otimes} n} \supseteq N_p^{\widehat{\otimes} n} \supseteq \text{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}} N_p^{\widehat{\otimes} n} = \mathcal{N}, \quad (1)$$

где $\widehat{\otimes}$ обозначает симметрическое тензорное произведение [2] (при $n = 0$ пространства из (1) совпадают с $\mathbb{C}^1$). Будем предполагать, что эти пространства являются комплексификацией соответствующих вещественных пространств, и пусть $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ — переход к комплексному сопряжению в (1). Вещественное спаривание в (1) будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Таким образом, комплексное спаривание $(\cdot, \cdot)_{N_0^{\widehat{\otimes} n}}$ совпадает с $\langle \cdot, \bar{\cdot} \rangle$. Пространство $\mathcal{N}$ предполагается ядерным, а вложения $N_1^0 \hookrightarrow N_0$, $N_2 \hookrightarrow N_1$ и $N_3 \hookrightarrow N_2$ — вложениями Гильберта–Шмидта.

Итак, предположим, что для любой точки $x \in Q$ характер $\chi(x, \lambda)$ является аналитической функцией переменной $\lambda \in N_0$ в некоторой общей для x окрестности B_0 ; при этом функции $\chi(\cdot, \lambda)$ равномерно относительно $\lambda \in B_0$ ограничены на каждом шаре из Q . Аналитичность приводит к существованию для любой точки $x \in Q$ равномерно сходящегося при некотором $R_1 > 0$ разложения

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_1 = \{\lambda \in N_1 \mid \|\lambda\|_{N_1} \leq R_1\}, \quad (2)$$

с коэффициентами $Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in N_{-1}^{\widehat{\otimes} n} \subseteq N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}$ — характеристиками Дельсарта. Нетрудно показать, что они слабо непрерывны и $\|\chi_n(\cdot)\|_{N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}}$ локально ограничена для любого n . Действие T_x переносится на $\chi_n(\cdot)$ и легко подсчитывается.

2. Пусть ρ — борелевская вероятностная мера на Q , положительная на открытых множествах. Ниже строится теория обобщенных функций переменной $x \in Q$ с комплексным спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle$, задающимся скалярным произведением пространства $H_0 = L_2(Q, d\rho(x))$. В этом разделе рассматриваются «пространства Дельсарта», построенные по χ_n .

Предположим, что семейство T и мера ρ таковы, что для некоторого $C > 0$

$$\|\chi_n(\cdot)\|_{N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}} \leq C^n n! \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad (3)$$

и элементарные функции $Q \ni x \mapsto \langle a^n, \chi_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ при $a^n \in N_2^{\widehat{\otimes} n}$ (входящие в силу (3) в H_0) линейно независимы и их линейная оболочка плотна в H_0 . Введем обозначение $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$ и достаточно большое $K > 1$ и рассмотрим гильбертово пространство

$$H^\chi(p, q) = \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a^n, \chi_n(x) \rangle, a^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n} \mid \|\varphi\|_{H^\chi(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|_{N_p^{\widehat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} \quad (4)$$

с соответствующим скалярным произведением. Таким образом, $H^\chi(p, q)$ изометрично пространству Фока $\mathcal{F}(N_{p, \text{Re}})$, взвешенному множителями $(n!)^2 K^{qn}$.

Пространство $H^\chi(p, q)$ можно рассматривать как позитивное относительно нулевого H_0 , и пусть $H^\chi(-p, -q)$ — соответствующее сопряженное (негативное) пространство обобщенных функций. Для их описания введем понятие кохарактера Дельсарта.

Пусть $\alpha^m \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} m}$, где $p \in \mathbb{N}_2$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Образует операцию «уничтожения» $\partial(\alpha^m)$ с коэффициентом α^m , полагая

$$\partial(\alpha^m) \langle a^n, \chi_n(x) \rangle = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} \langle a^n, \alpha^m \widehat{\otimes} \chi_{n-m}(x) \rangle, & m \leq n, \\ 0, & m > n, \end{cases}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ и любого $a^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n}$.

Утверждается, что для любых $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$ оператор $\partial(\alpha^m)$ действует непрерывно в пространстве $H^\chi(p, q)$ и, следовательно, его сопряженный $\partial^+(\alpha^m)$ (относительно H_0) — в $H^\chi(-p, -q)$. Кохарактер Дельсарта $\theta(\alpha^m)$

определяется равенством $\theta(\alpha^m) = \partial^+(\overline{\alpha^m})\delta_e \in H^\chi(-p, -q)$, где δ_e есть δ -функция, сосредоточенная в точке $e \in Q$ (она входит в $H^\chi(-p, -q)$). *Справедливо соотношение ортогональности:*

$$\langle\langle \theta(\alpha^m), \langle \alpha^n, \chi_n(\cdot) \rangle \rangle\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \alpha^n, \overline{a^n} \rangle \quad (\alpha^m \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} m}, \alpha^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n}, n, m \in \mathbb{Z}_+). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. *Пространства $H^\chi(p, q)$ ($p \in \mathbb{N}_2, q \in \mathbb{N}$) и их сопряженные образуют следующую цепочку пространств:*

$$\begin{aligned} (\Phi^\chi)' &= \operatorname{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}_2, q \in \mathbb{N}} H^\chi(-p, -q) \supseteq H^\chi(-p, -q) \\ &\supseteq H_0 \supseteq H^\chi(p, q) \supseteq \operatorname{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}_2, q \in \mathbb{N}} H^\chi(p, q) = \Phi^\chi, \end{aligned} \quad (6)$$

причем Φ^χ ядерное. Пространство $H^\chi(-p, -q)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H^\chi(-p, -q) &= \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\alpha^n), \alpha^n \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} n} \mid \right. \\ &\quad \left. \|\xi\|_{H^\chi(-p, -q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha^n\|_{N_{-p}^{\widehat{\otimes} n}}^2 K^{-qn} < \infty \right\}, \quad (7) \\ \langle\langle \xi, \varphi \rangle\rangle &= (\xi, \varphi)_{H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha^n, \overline{a^n} \rangle n! \quad (\xi \in H^\chi(-p, -q), \varphi \in H^\chi(p, q)). \end{aligned}$$

Заметим, что множитель $(n!)^2$ в (4) определяется мерой ρ , допускающей оценку (3). При определенных T и ρ разумны и другие оценки типа (3), влекущие замену $(n!)^2$ соответствующим множителем.

3. Для построения «пространств Аппеля» зафиксируем функционал $l \in H^\chi(-2, -1)$ и для любого $\lambda \in N_2$ рассмотрим функцию $\hat{l}(\lambda) = l(\overline{\chi(\cdot, \lambda)})$. При малой $\|\lambda\|_{N_2}$ она определена и является аналитической. Пусть l таков, что $\hat{l}(0) \neq 0$; тогда для любой точки $x \in Q$ функция $\sigma(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) \hat{l}^{-1}(\lambda)$ аналитична в окрестности нуля, и поэтому справедливо разложение типа (2) при некотором $R_2 > 0$:

$$\sigma(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_2 = \{\lambda \in N_2 \mid \|\lambda\|_{N_2} \leq R_2\}, \quad (8)$$

с коэффициентами $Q \ni x \mapsto P_n(x) \in N_{-2}^{\widehat{\otimes} n} \subseteq N_{-3}^{\widehat{\otimes} n}$ — характеристиками Аппеля.

Характеры Аппеля выражаются через характеры Дельсарта при помощи линейного обратимого преобразования. Для них автоматически справедлива оценка типа (3) с заменой N_{-2} на N_{-3} и линейная независимость и плотность в H_0 линейной оболочки элементарных функций $\langle \alpha^n, P_n(x) \rangle$ ($\alpha^n \in N_3^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$). Построим пространство $H^P(p, q)$ ($p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}$) аналогично (4), но с заменой $\chi_n(x)$ на $P_n(x)$; $H^P(-p, -q)$ — сопряженное к нему пространство. Вместо (6) имеем цепочку

$$\begin{aligned} (\Phi^P)' &= \operatorname{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q) \supseteq H^P(-p, -q) \\ &\supseteq H_0 \supseteq H^P(p, q) \supseteq \operatorname{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^P(p, q) = \Phi^P. \end{aligned} \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует $t \in \mathbb{Z}_+$, такое, что для любых $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ имеют место плотные непрерывные вложения $H^\chi(p, q+t) \hookrightarrow H^P(p, q)$, $H^P(p, q+t) \hookrightarrow H^\chi(p, q)$. Таким образом, $\Phi^\chi = \Phi^P = \Phi$, $(\Phi^\chi)' = (\Phi^P)' = \Phi'$.*

Результаты теоремы 1 сохраняются для цепочки (9) со следующими изменениями: вместо $\theta(\alpha^n)$ фигурируют кохарактеры Аппеля $Q(\alpha^n)$, определяющиеся, как и θ , но с заменой δ_e на l ; в (7) $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{1+t}$. Для $Q(\alpha^m)$ и $\langle a^n, P_n(x) \rangle$ справедливо прежнее соотношение ортогональности (5) при $p \in \mathbb{N}_3$.

Заметим, что в случае «классических» характеров Аппеля, отвечающих функционалу $l = 1$ (т.е. $l(\varphi) = \int_Q \varphi(x) d\rho(x)$), во второй части теоремы 2 можно брать $p \in \mathbb{N}_2$ и $q \in \mathbb{N}$.

4. Как и в случае обычного сдвига, сейчас могут быть введены интегральные преобразования C , S и T . Так, на некоторых запасах основных и обобщенных функций $\varphi \in \Phi$, $\xi \in \Phi'$ определим эти операторы формулами

$$(C\varphi)(x) = l(\overline{(T_x\varphi)(\cdot)}), \quad (S\xi)(\lambda) = \langle \xi, k_S(\lambda, \cdot) \rangle, \quad (T\xi)(\lambda) = \langle \xi, k_T(\lambda, \cdot) \rangle,$$

где $k_S(\lambda, x) = \sigma(x, \bar{\lambda})$, $k_T(\lambda, x) = \chi(x, \bar{\lambda})$, $x \in Q$, $\lambda \in N_3$, $\|\lambda\|_{N_3} < R_3$ и $R_3 > 0$ достаточно мало.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор C является унитарным и переводит $H^P(p, q)$ в $H^\chi(p, q)$; при этом $(C\langle a^n, P_n(\cdot) \rangle)(x) = \langle a^n, \chi_n(x) \rangle$ для любых $a^n \in N_p^{\otimes n}$, $x \in Q$ ($n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{1+t}$); если C^+ — сопряженный к нему оператор, то $C^+\theta(\alpha^n) = Q(\alpha^n)$ ($\alpha^n \in N_{-p}^{\otimes n}$).*

Оператор S определен на всем пространстве $\Phi' = (\Phi^P)'$ и переводит его в некоторое пространство $\text{Hol}_0(\mathcal{N})$ ростков аналитических функций на проективном пределе $\mathcal{N}$ (см. (1); при этом $SQ(\alpha^n) = \langle \alpha^n, \lambda^{\otimes n} \rangle$ ($\alpha^n \in N_{-p}^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}_3$)).

Оператор T также определен на всем $\Phi' = (\Phi^\chi)'$ и переводит его в прежнее $\text{Hol}_0(\mathcal{N})$; при этом выше $Q(\alpha^n)$ нужно заменить на $\theta(\alpha^n)$.

Отметим, что пространство $\text{Hol}_0(\mathcal{N})$ (которое легко описывается) является алгеброй относительно обычных операций. Поэтому обратные отображения S^{-1} и T^{-1} превращают Φ' в алгебры с различными умножениями « S -Вика» и « T -Вика»: $\diamond_S$ и $\diamond_T$.

5. Примеры. (а) (классическая ситуация) Q совпадает с вещественным гильбертовым пространством X , $(T_x f)(y) = f(y+x)$ ($x, y \in X$), $e = 0$, $N_0 = X_c$ (комплексификация X), $\chi(x, \lambda) = \exp(\lambda, x)_{X_c}$, $\chi_n(x) = x^{\otimes n}$.

(б) Q равно пространству пар $\mathbf{x} = \{x, -x\}$ ($x \in X$), $(T_{\mathbf{x}} f)(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(y+x) + f(y-x))$ ($x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$), $e = 0$, $N_0 = X_c$, $\chi(\mathbf{x}, \lambda) = \cos(\lambda, x)_{X_c}$, $\chi_{2m}(\mathbf{x}) = (-1)^m x^{\otimes 2m}$, $\chi_{2m+1} = 0$ ($m \in \mathbb{Z}_+$).

(в) Пусть Q_ν , $T^{(\nu)}$, $\chi^{(\nu)}$ — пространство и соответствующие семейство операторов обобщенного сдвига $T_{x_\nu}^{(\nu)}$ и характер ($\nu = 1, \dots, m$). Положим $Q = Q_1 \times \dots \times Q_m \ni x = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $(T_x f)(y) = ((T_{x_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes T_{x_m}^{(m)})f)(y_1, \dots, y_m)$ ($x, y \in Q$). Операторы T_x определяют обобщенный сдвиг на Q , и $\chi(x, \lambda) = \chi^{(1)}(x_1, \lambda_1) \dots \chi^{(m)}(x_m, \lambda_m)$ ($\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$) будет его характером. Комбинируя таким образом (а), (б) с одномерными примерами из [5–7], получим ряд новых бесконечномерных примеров.

6. Как и в модельной одномерной ситуации [5–7], могут рассматриваться операторы обобщенного сдвига Тейлора–Дельсарта, порожденные семейством операторов $\mathcal{L}(\alpha^m)$, таких, что $(\mathcal{L}(\alpha^m)\chi(\cdot, \lambda))(x) = \langle \alpha^m, \lambda^{\otimes m} \rangle \chi(x, \lambda)$ для любых $\alpha^m \in N_{-p}^{\otimes m}$ ($x \in Q$, $\lambda \in N_p$, $m, p \in \mathbb{N}$). Сейчас $\partial(\alpha^m) = \mathcal{L}(\alpha^m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L. White Noise. Infinite Dimensional Calculus. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 1993. **2.** Бerezанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Научовка думка, Киев, 1988. **3.** Albeverio S., Daletsky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L. Non-Gaussian Infinite Dimensional Analysis. Bielefeld, Preprint BiBoS, 1994. **4.** Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.-A. Generalized Functions in Infinite Dimensional Analysis. IAS Preprint, 1995. **5.** Бerezанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Функци. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 51–55 (1995). **6.** Berezansky Yu. M. Rep. Math. Phys, **38**, No. 3 (1996). **7.** Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G. Methods Funct. Anal. Topology, **2**, No. 2 (1996).

Институт математики НАНУ, Киев, Украина
Университет MCS, Люблин, Польша

Поступило в редакцию
13 июня 1996 г.

УДК 513.88

О крайних точках выпуклых компактов в гильбертовом кубе*

© 1996. Е. М. БРОНШТЕЙН

Сформулируем сначала основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M является G_δ -подмножеством метрического компакта K . Существует непрерывное отображение $\varepsilon: K \rightarrow H$, сужение которого на M есть топологическое вложение, такое, что $\text{ext conv } \varepsilon(K) = \varepsilon(M)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — всюду плотное подмножество метрического компакта K , причем множество $K \setminus M$ слабо счетномерно. Существует топологическое вложение $\varepsilon: K \rightarrow H$, такое, что $\text{ext conv } \varepsilon(K) = \varepsilon(M)$.

Здесь conv — замкнутая выпуклая оболочка, ext — множество крайних точек, а H — гильбертов куб. Определение слабо счетномерного компакта см. в [1]. Эти результаты представляют интерес в связи с теоремами Шоке о представлении, которые широко применяются в теории потенциала, теории аппроксимации и др.

Близкие задачи рассматривались в [2–5]; в настоящей работе усилены результаты работ [6–9].

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 94-01-01286).