Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. З. Голубчик, В. В. Соколов, Об интегрируемых системах, порожденных постоянным решением уравнения Янга–Бакстера, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 68–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:46:57

Пусть теперь M — произвольное G_δ -подмножество метрического компакта K . Построим сначала отображение $\varepsilon: \overline{M} \rightarrow H$, такое, что $\text{ext conv } \varepsilon(\overline{M}) = \varepsilon(M)$. Продолжим ε до непрерывного отображения компакта K в выпуклое множество $\text{conv } \varepsilon(\overline{M})$ [12, с. 342]. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Поскольку множество крайних точек метризуемого выпуклого компакта имеет тип G_δ , то в теореме 1 нельзя ослабить требования к множеству M .

2. В условиях теоремы 1, вообще говоря, нельзя построить топологическое вложение ε , такое, что $\text{ext conv } \varepsilon(K) = \varepsilon(M)$. Например, это невозможно сделать, когда $K = H$ и M — конечно. Теорема 2 демонстрирует пример условий на M , при которых вложение существует. Автору неизвестны наиболее общие условия, при которых это так.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. Наука, М., 1973.
2. Lindenstrauss J., Phelps R. P. Isr. J. Math., **13**, No. 6, 39–48 (1968).
3. Lazar A. J. Isr. J. Math., **20**, No. 3–4, 369–374 (1975).
4. Hydon R. Bull. London Math. Soc., **7**, No. 1, 97–100 (1975).
5. Stacey P. J. Quart J. Math., **30**, No. 120, 469–482 (1979).
6. Бронштейн Е. М. Функциональный анализ и его прил., **19**, вып. 1, 60–61 (1985).
7. Бронштейн Е. М. Сиб. матем. ж., **26**, No. 1, 204–206 (1985).
8. Бронштейн Е. М. Доклады РАН, **336**, №3, 295–296 (1994).
9. Бронштейн Е. М. Матем. сб., **186**, №3, 20–28 (1995).
10. Бронштейн Е. М. Оптимизация. Труды инст. матем. СО АН СССР, вып. 26 (43), 13–24 (1981).
11. Куратовский К. Топология. т. 2, Мир, М., 1969.
12. Куратовский К. Топология. т. 1, Мир, М., 1966.

Уфимский государственный авиационный
технический университет

Поступило в редакцию
26 февраля 1995 г.

УДК 514.7+519.4

Об интегрируемых системах, порожденных постоянным решением уравнения Янга–Бакстера*

© 1996. И. З. Голубчик, В. В. Соколов

Основным результатом статьи является построение класса интегрируемых систем вида

$$q_t = r q_{xy} + F(q, q_y), \quad (1)$$

где $q(x, y, t)$ — вектор, а r — постоянная (вообще говоря, вырожденная) матрица. Рассматриваемые уравнения обладают локальными высшими симметриями и законами сохранения. Внешне они напоминают хорошо известные интегрируемые системы, описанные в следующем разд. 1 (см. также, например, [1]).

1. Уравнение N -волн. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с невырожденной симметрической инвариантной формой и α — постоянный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, такой,

* Исследования были поддержаны РФФИ (грант 96-01-00382) и программой ИНТАС (проект INTAS-93-166-Ext).

что $\text{Ker ad}_\alpha \oplus \text{Im ad}_\alpha = \mathfrak{g}$. Легко видеть, что ad_α — обратимый оператор на Im ad_α . Известно, что уравнение

$$q_t = r d(q_x) + [r d(q), q], \quad (2)$$

где $q(x, t) \in \text{Im ad}_\alpha$, $r = \text{ad}_\alpha^{-1}$, $d = \text{ad}_\beta$, а β — элемент из центра алгебры Ли Ker ad_α , бигамильтоново относительно согласованных гамильтоновых операторов

$$F_1 = \text{ad}_\alpha, \quad F_2 = d/dx + \text{ad}_q. \quad (3)$$

Попытка превратить уравнение (2) в уравнение вида (1), взяв $d = \partial/\partial y$ вместо внутреннего дифференцирования ad_β , наталкивается на следующее препятствие. Оказывается, что дифференцирование d не только должно коммутировать с r , $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x$, но и аннулировать (переменные) элементы из Ker ad_α . Таким образом, проблема состоит в том, что дифференцирование ad_α имеет нетривиальное ядро (которое играет существенную роль в теории уравнений N -волн).

В работе [2] отмечено, что если дифференцирование D не имеет ядра, то $r = D^{-1}$ удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера (см. [3])

$$r([r(a), b] - [r(b), a]) - [r(a), r(b)] = 0. \quad (4)$$

Поэтому при попытке двумеризовать уравнение N -волн (2) естественно в качестве r попробовать взять решение уравнения (4).

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и постоянный линейный оператор $r: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ удовлетворяет для любых $a, b \in \mathfrak{g}$ соотношению (4). Тогда уравнение (2), где $q \in \mathfrak{g}$, для всякого дифференцирования d алгебры $\mathfrak{g}$, такого, что

$$[d, r] = [d, \partial/\partial x] = [d, \partial/\partial t] = 0,$$

обладает рекурсионным оператором

$$L = r d/dx - \text{ad}_q r. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В качестве d можно взять $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial t$ или любое коммутирующее с r постоянное дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Более того, достаточно, чтобы d было дифференцированием неассоциативной алгебры A , в которую превращается $\mathfrak{g}$, если ввести умножение формулой

$$a * b = [r(a), b]. \quad (6)$$

Можно проверить, что операция $*$ удовлетворяет тождеству

$$(a * b - b * a) * c - a * (b * c) + b * (a * c) = 0,$$

т.е. алгебра A является левосимметрической (см. [4]).

Пусть $d = \partial/\partial y$. Тогда не зависящие от x решения уравнения (2) удовлетворяют уравнению $q_t = q_y * q$. Нетрудно проверить, что для любой левосимметрической алгебры это уравнение гидродинамического типа линеаризуемо. Повидимому, линеаризуемым является и общее уравнение (2). Результаты статьи еще раз (см. также [5, 6]) указывают на тесную связь между левосимметрическими алгебрами и линеаризуемыми интегрируемыми системами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (2) обладает бесконечными сериями высших симметрий $L^i(q_x)$ и $L^i d(q)$, $i = 0, 1, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае когда на $\mathfrak{g}$ есть невырожденная инвариантная форма, уравнение (2) допускает гамильтонову структуру с оператором F_2 . Однако для него, вообще говоря, нет аналога оператора F_1 .

3. Уравнение (2) как редукция бигамильтоновой системы. В случае уравнения N -волн на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеются невырожденная инвариантная форма и вырожденный 2-коцикл, порожденный дифференцированием ad_α (см. [7]). Рассмотрим «противоположную» ситуацию.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{G}$ имеются (вообще говоря, вырожденная) инвариантная форма $\Omega(a, b) = \int R(b)(a)$ и невырожденный 2-коцикл $\langle a, b \rangle = \int S(b)(a)$, где R и S — некоторые линейные операторы из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$. Для любого дифференцирования D алгебры $\mathfrak{G}$ определим его действие на $\mathfrak{G}^*$ формулой $\int b^*(Da) = -\int D(b^*)(a)$, где $a \in \mathfrak{G}$, $b^* \in \mathfrak{G}^*$. Пусть $[R, D] = [S, D] = [R, \partial/\partial x] = [R, \partial/\partial t] = 0$. Тогда уравнение

$$Q_t = RDS^{-1}(Q_x) + \text{ad}^*(DS^{-1}(Q))(Q), \quad Q \in \mathfrak{G}^*, \quad (7)$$

где ad^* — коприсоединенное действие $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}^*$, бигамильтоново относительно согласованных операторов $F_1 = S$, $F_2 = R d/dx + Q^*$. Здесь $Q^*(a) = \text{ad}^*(a)(Q)$. Соответствующие гамильтонианы H_2 и H_1 имеют вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\Omega(DS^{-1}(Q), Q), \\ H_1 = -\frac{1}{3}\Omega(\text{ad}^*(DS^{-1}(Q))Q, S^{-1}Q) - \frac{1}{2}\Omega(DRS^{-1}(Q_x), S^{-1}Q).$$

Для того чтобы показать, что уравнение (2) является редукцией уравнения (7), заметим, во-первых, что достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{g}$ обладает невырожденной симметрической инвариантной формой, а r кососимметричен. Действительно, переходя к дублю, положим $\bar{\mathfrak{g}} = \{(a, c) \mid a \in \mathfrak{g}, c \in \mathfrak{g}^*\}$ и $[(a, c), (b, d)] = ([a, b], \text{ad}^*(a)(d) - \text{ad}^*(b)(c))$. Тогда оператор $\bar{r}$, определенный формулой $\bar{r}(a, c) = (r(a), -r^t(c))$, кососимметричен относительно инвариантной невырожденной формы $\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}((a, c), (b, d)) = d(a) + c(b)$, и удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (4). При этом уравнение (2) для $\mathfrak{g}$ является редукцией уравнения (2) для $\bar{\mathfrak{g}}$ на подпространство $\{(q, 0)\}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ обладает невырожденной симметрической инвариантной формой ω , а r кососимметричен. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{G}$, которая как векторное пространство совпадает с $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Положим $[(a, b), (c, d)] = (a*c - c*a, a*d - c*b)$, где операция $*$ задана формулой (6). В силу (4) такая скобка задает на $\mathfrak{G}$ структуру алгебры Ли. отождествим $\mathfrak{G}$ с $\mathfrak{G}^*$ с помощью невырожденной формы

$$\bar{\Omega}((a, b), (c, d)) = \omega(a, d) + \omega(c, b).$$

Определим операторы, действующие из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$, формулами $R((a, b)) = (-r(b), r(a))$ и $S(a, b) = (-b, a)$. Тогда уравнение (7), где $D((a, b)) = (d(a), d(b))$, после ограничения на подпространство в $\mathfrak{G}^*$, состоящее из элементов вида $(0, q)$, переходит в (2). Оператор рекурсии для (7) имеет вид $F_2 F_1^{-1}$, а его редукция на указанное подпространство совпадает с (5).

Авторы благодарны С. И. Свинолупову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортвега–де Фриза. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 24, ВИНТИ, М., 1984. 2. Дринфельд В. Г. ДАН СССР, **273**, №3, 531–534 (1983). 3. Семенов-Тян-Шанский М. А. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 4, 17–33 (1983). 4. Medina A. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, **286**, 173–177 (1978). 5. Svinolupov S. I. Phys. Lett. A., **135**, 32–36 (1987). 6. Golubchik I. Z., Sokolov V. V., Svinolupov S. I. A New Class of Nonassociative Algebras and a Generalized Factorization Method. Preprint ESI, **53**, Wien, Austria, 1993. 7. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 77–78 (1980).

Математический институт
Уфимского научного центра РАН

Поступило в редакцию
4 мая 1995 г.

УДК 517.43

Интегральная геометрия на пространстве L^n , где L — кольцо матриц

© 1996. М. И. ГРАЕВ

1. Введение. В статье получены матричные аналоги известных формул обращения, восстанавливающих функции на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ через их интегралы по k -мерным плоскостям. Рассматривается пространство L^n n -ок $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in L$, где L — кольцо всех матриц порядка p над произвольным непрерывным локально компактным телом K . На L^n естественно определено понятие левых и правых k -плоскостей, $k = 1, \dots, n - 1$. Решается задача о восстановлении функции на L^n через ее интегралы по левым или правым k -плоскостям. Эту задачу можно рассматривать как пример задачи некоммутативной интегральной геометрии.

Для определенности ограничимся левыми k -плоскостями в L^n . Обозначим координаты в L^n через $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$, $l = n - k$, и зададим левые k -плоскости уравнениями $y = xa + b$, где $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_l)$, $b = (b_1, \dots, b_l)$ и $a = \|a_{ij}\|$ есть $(k \times l)$ -матрица. Интегральное преобразование $\mathcal{R}_k$, относящее функциям $f(x, y)$ на L^n их интегралы по левым k -плоскостям, зададим следующим равенством:

$$(\mathcal{R}_k f)(a, b) = \int_{L^k} f(x, xa + b) d^k \mu(x), \quad (1)$$

где $d^k \mu(x) = d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_k)$, $d\mu$ — инвариантная относительно сложения мера на L . Относительно функций f будем предполагать, что они принадлежат пространству Шварца на L^n .

2. Формула обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}_{n-1}$. Обозначим через $|s|$ норму на L , заданную равенством

$$|s| = d\mu(sx)/d\mu(x) = d\mu(xs)/d\mu(x).$$

В частности, $|s| = |\det s|^{2p}$ в случае $K = \mathbb{C}$ и $|s| = |\det s|^p$ в случае $K = \mathbb{R}$.