Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Граев, Интегральная геометрия на пространстве L^n , где L — кольцо матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 71–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:13:37

ЛИТЕРАТУРА

1. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортвега-де Фриза. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 24, ВИНТИ, М., 1984. 2. Дринфельд В. Г. ДАН СССР, **273**, №3, 531–534 (1983). 3. Семенов-Тян-Шанский М. А. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 4, 17–33 (1983). 4. Medina A. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, **286**, 173–177 (1978). 5. Svinolupov S. I. Phys. Lett. A., **135**, 32–36 (1987). 6. Golubchik I. Z., Sokolov V. V., Svinolupov S. I. A New Class of Nonassociative Algebras and a Generalized Factorization Method. Preprint ESI, **53**, Wien, Austria, 1993. 7. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 77–78 (1980).

Математический институт
Уфимского научного центра РАН

Поступило в редакцию
4 мая 1995 г.

УДК 517.43

Интегральная геометрия на пространстве L^n , где L — кольцо матриц

© 1996. М. И. ГРАЕВ

1. Введение. В статье получены матричные аналоги известных формул обращения, восстанавливающих функции на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ через их интегралы по k -мерным плоскостям. Рассматривается пространство L^n n -ок $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in L$, где L — кольцо всех матриц порядка p над произвольным непрерывным локально компактным телом K . На L^n естественно определено понятие левых и правых k -плоскостей, $k = 1, \dots, n - 1$. Решается задача о восстановлении функции на L^n через ее интегралы по левым или правым k -плоскостям. Эту задачу можно рассматривать как пример задачи некоммутативной интегральной геометрии.

Для определенности ограничимся левыми k -плоскостями в L^n . Обозначим координаты в L^n через $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$, $l = n - k$, и зададим левые k -плоскости уравнениями $y = xa + b$, где $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_l)$, $b = (b_1, \dots, b_l)$ и $a = \|a_{ij}\|$ есть $(k \times l)$ -матрица. Интегральное преобразование $\mathcal{R}_k$, относящее функциям $f(x, y)$ на L^n их интегралы по левым k -плоскостям, зададим следующим равенством:

$$(\mathcal{R}_k f)(a, b) = \int_{L^k} f(x, xa + b) d^k \mu(x), \quad (1)$$

где $d^k \mu(x) = d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_k)$, $d\mu$ — инвариантная относительно сложения мера на L . Относительно функций f будем предполагать, что они принадлежат пространству Шварца на L^n .

2. Формула обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}_{n-1}$. Обозначим через $|s|$ норму на L , заданную равенством

$$|s| = d\mu(sx)/d\mu(x) = d\mu(xs)/d\mu(x).$$

В частности, $|s| = |\det s|^{2p}$ в случае $K = \mathbb{C}$ и $|s| = |\det s|^p$ в случае $K = \mathbb{R}$.

Введем преобразование Фурье функций f на L :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_L f(x) \chi(\text{Tr}(x\xi')) d\mu(x), \quad \xi \in L,$$

где $\chi \neq 1$ — произвольный фиксированный аддитивный характер на K , $|\chi| \equiv 1$, а штрих обозначает транспонирование.

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi = \mathcal{R}_{n-1}f$, то имеет место следующая формула обращения:

$$f(x, y) = c \int \varphi(a, y - xa - b) u(b) d\mu(b) d^{n-1}\mu(a), \quad (2)$$

где $u(b)$ — преобразование Фурье обобщенной функции $|\xi|^{n-1}$ на L , а c зависит только от χ и нормировки меры $d\mu$.

Отсюда, учитывая, что $|\xi| = |\det \xi|^{2p}$ при $K = \mathbb{C}$ и $|\xi| = |\det \xi|^p$ при $K = \mathbb{R}$, получаем такой результат:

СЛЕДСТВИЕ. В случае когда $K = \mathbb{C}$, формула обращения имеет вид

$$f(x, y) = c \int_{L^{n-1}} (D\overline{D}\varphi)(a, y - xa) d^{n-1}\mu(a), \quad (3)$$

где $D = (\det \|\partial/\partial b_{ij}\|)^{p(n-1)}$.

В случае когда $K = \mathbb{R}$ и $p(n-1)$ — четное число, имеем

$$f(x, y) = c \int_{L^{n-1}} (D\varphi)(a, y - xa) d^{n-1}\mu(a). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от общего случая, формулы обращения (3) и (4) локальны, т.е. выражают $f(x, y)$ через значения функции $\varphi = \mathcal{R}_{n-1}f$ только на множестве гиперплоскостей, бесконечно близких к точке (x, y) .

3. Формулы обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}_k$ при $k < n-1$. Пусть $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции $f(x, y)$ на L^n , а Ψ — преобразование Фурье функции $\varphi = \mathcal{R}_k f$ по b :

$$(\mathcal{F}f)(\xi, \eta) = \int f(x, y) \chi\left(\text{Tr}\left(\sum x_i \xi'_i + \sum y_j \eta'_j\right)\right) d^k \mu(x) d^l \mu(y), \quad (5)$$

$$\Psi(a, \eta) = \int_{L^l} \varphi(a, b) \chi\left(\text{Tr}\left(\sum b_j \eta'_j\right)\right) d^l \mu(b). \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Функции $\mathcal{F}f$ и Ψ связаны соотношением

$$\Psi(a, \eta) = (\mathcal{F}f)(-\eta a', \eta), \quad (7)$$

где a' есть $(l \times k)$ -матрица с элементами $\tilde{a}_{ij} = (a_{ji})'$.

В силу (7) функция Ψ постоянна на слоях расслоения $\pi: H_k \rightarrow (L^n)'$, где H_k — пространство пар (a, η) , $\pi(a, \eta) = (-\eta a', \eta)$, и функция $\mathcal{F}f$, а значит, и функция f , однозначно определяются значениями функции Ψ на любом фиксированном сечении расслоения π .

Свяжем с любым измеримым подмножеством $U \subset A$, где A — пространство $(k \times l)$ -матриц с элементами из L , функцию Крофтона Cr_U на $(L^n)'$: по

определению $\text{Cr}_U(\xi, \eta)$ равно числу матриц $a \in U$, удовлетворяющих условию $-\eta a' = \xi$.

Пусть $U \subset A$ таково, что $\text{Cr}_U(\xi, \eta) < \infty$ для почти всех $(\xi, \eta) \in (L^n)'$. Обозначим через $d\mu_\eta(a)$, где $\eta \in (L^k)'$, поднятие на U меры $d^k\mu(\xi)$ на $(L^k)'$ при отображении $a \mapsto -\eta a'$, т.е. $d\mu_\eta(a) = d^k\mu(-\eta a')$. Отнесем функции $\varphi = \mathcal{R}_k f$ и любой точке $(x, y) \in L^n$ меру $(\nu_{x,y}\varphi)(a)$ на U , заданную следующим равенством:

$$(\nu_{x,y}\varphi)(a) = \int_{L^l} (\Psi(a, \eta) \chi(-\text{Tr}((y-xa)_1\eta'_1 + \dots + (y-xa)_l\eta'_l)) d\mu_\eta(a)) d^l(\eta). \quad (8)$$

Здесь функция $\Psi(a, \eta)$ задается формулой (6).

ТЕОРЕМА 3. Если $\varphi = \mathcal{R}_k f$, то для любого измеримого подмножества $U \subset A$, такого, что $\text{Cr}_U(\zeta) < \infty$ для почти всех $\zeta \in (L^n)'$, имеем

$$\begin{aligned} \int_U \nu_{x,y}\varphi \\ = c \int \text{Cr}_U(\xi, \eta) (\mathcal{F}f)(\xi, \eta) \chi\left(-\text{Tr}\left(\sum_{i=1}^k x_i(\xi_i)' + \sum_{i=1}^l y_i(\eta_i)'\right)\right) d^k\mu(\xi) d^l\mu(\eta), \end{aligned} \quad (9)$$

где мера $\nu_{x,y}\varphi$ на U задается равенством (8); коэффициент c зависит только от χ и нормировки меры $d\mu$.

В частном случае, когда $\text{Cr}_U = \text{const}$ почти всюду, правая часть равенства (9) пропорциональна $f(x, y)$.

Для случая $K = \mathbb{R}$ скалярный вариант формулы (9) (в несколько иных терминах) получен в [4].

4. Оператор κ и формула обращения при $K = \mathbb{C}$. Рассмотрим случай, когда L — кольцо матриц порядка p над $\mathbb{C}$. Примем следующие обозначения: если $u = \|u_{ij}\|$, то пишем $\partial/\partial u = \|\partial/\partial u_{ij}\|$, $du = \|du_{ij}\|$. Далее, если $\omega = \|\omega_{ij}\|$ — матрица дифференциальных 1-форм, то условимся обозначать через $[\omega]$ внешнее произведение всех дифференциальных форм ω_{ij} в каком-либо фиксированном порядке сомножителей. В частности, $[du] = \bigwedge_{i,j=1}^p du_{ij}$.

Введем следующий (голоморфный) оператор из пространства функций $\varphi(a, b)$ в пространство дифференциальных форм степени kp^2 :

$$\kappa = \bigwedge_{j=1}^k \left[\frac{\partial}{\partial b_1} d(a_{j1})' + \dots + \frac{\partial}{\partial b_l} d(a_{jl})' \right]. \quad (10)$$

Аналогично определим оператор $\bar{\kappa}$. Таким образом, для любой функции φ $\kappa \wedge \bar{\kappa} \varphi$ есть дифференциальная форма бистепени (kp^2, kp^2) .

ТЕОРЕМА 4. Если $\varphi = \mathcal{R}_k f$, то ограничение дифференциальной формы $\kappa \wedge \bar{\kappa} \varphi$ на подмногообразии $H_{x,y}$ k -плоскостей, содержащих произвольную фиксированную точку (x, y) , является замкнутой формой и имеет место следующая формула обращения:

$$\int_{\Gamma_{x,y}} \kappa \wedge \bar{\kappa} \varphi = cf(x, y), \quad (11)$$

где $\Gamma_{x,y}$ — произвольный цикл в $H_{x,y}$ вещественной размерности $2kr^2$, а коэффициент c зависит только от класса гомологий цикла $\Gamma_{x,y}$.

Для скалярного случая формула (11) была получена в [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае когда $\Gamma_{x,y}$ — алгебраическое подмногообразие, (11) следует из (9).

5. Интегральное преобразование, связанное с комплексом прямых в L^n , пересекающих фиксированную кривую. Пусть L — кольцо комплексных матриц порядка p . Назовем алгебраической кривой в L^n любое алгебраическое подмногообразие $\Lambda \subset L^n$ размерности p^2 над $\mathbb{C}$, почти каждая точка которого содержит среди своих координат хотя бы одну обратимую матрицу.

Свяжем с произвольной алгебраической кривой $\Lambda \subset L^n$ комплекс H_Λ прямых в L^n , пересекающих эту кривую, и введем интегральное преобразование $\mathcal{J}_\Lambda$, относящее каждой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на L^n ее интегралы по прямым из H_Λ . Поставим задачу восстановить f по функции $\psi = \mathcal{J}_\Lambda f$.

Приведем решение этой задачи для случая, когда кривая Λ принадлежит одной из гиперплоскостей в L^n . Не нарушая общности, будем предполагать, что Λ принадлежит гиперплоскости $x_n = 0$. В этом случае зададим прямые комплекса H_Λ уравнениями

$$x_i = x_n a_i + \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $\lambda \in \Lambda$, а оператор $\mathcal{J}_\Lambda$ — следующей формулой:

$$(\mathcal{J}_\Lambda f)(a, \lambda) = \int_L f(x_n a_1 + \lambda_1, \dots, x_n a_{n-1} + \lambda_{n-1}, x_n) d\mu(x_n). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место следующая формула обращения: если $\psi = \mathcal{J}_\Lambda f$, то*

$$|\det x|^{2p} \int_\Lambda (\kappa_\Lambda \wedge \bar{\kappa}_\Lambda \psi)(x_n^{-1}(x_1 - \lambda_1), \dots, x_n^{-1}(x_{n-1} - \lambda_{n-1}); \lambda) = cf(x), \quad (13)$$

где

$$\kappa_\Lambda = \left[\frac{\partial}{\partial a_1} d(\lambda_1)' + \dots + \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} d(\lambda_{n-1})' \right]. \quad (14)$$

Для скалярного случая ($p = 1$) формула обращения (13) хорошо известна, см., например, [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз. М., 1962.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро Э. Я. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 15–31 (1967).
3. Гельфанд И. М., Граев М. И. Функц. анализ и его прил., **2**, вып. 3, 39–52 (1968).
4. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 3, 12–19 (1977).
5. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, ВИНТИ, т. 16, 1980, pp. 53–226.
6. Gelfand I. M., Smirnov M. M. Advances in Math., **109**, No. 2, 188–227 (1994).