Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. В. Киссин, В. С. Шильман, Операторно дифференцируемые функции и дифференцирования операторных алгебр, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 75–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 08:01:38

УДК 517.984

Операторно дифференцируемые функции и дифференцирования операторных алгебр

© 1996. Э. В. Киссин, В. С. ШУЛЬМАН

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в H , $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathfrak{B}(H)$ — пространство эрмитовых операторов, и для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ пусть $\mathfrak{B}_I(H) = \{X \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}(H) : \sigma(X) \subset I\}$, где $\sigma(X)$ — спектр оператора X .

Всякая непрерывная функция $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ определяет отображение $f_{\text{op}}: \mathfrak{B}_I(H) \rightarrow \mathfrak{B}(H)$, переводящее X в $f(X)$. Если I открыт и отображение f_{op} дифференцируемо (по Гато или Фреше) на $\mathfrak{B}_I(H)$, то функция f называется операторно дифференцируемой (в соответствующем смысле) на I ; производная отображения f_{op} в точке $A \in \mathfrak{B}_I(H)$ обозначается через $f^{\nabla}(A)$. Аналогично определяются операторно монотонные и операторно липшицевы функции на I (здесь уже I не обязательно открыт).

Будем говорить, что f действует в $*$ -подалгебре $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(H)$, если $f_{\text{op}}(\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}_I(H)) \subset \mathcal{A}$.

Дифференцированием мы называем линейное отображение δ $*$ -подалгебры $\mathfrak{D}(\delta) \subset \mathfrak{B}(H)$ в $\mathfrak{B}(H)$, удовлетворяющее условиям $\delta(X^*) = \delta(X)^*$ и $\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y)$ для любых X, Y из $\mathfrak{D}(\delta)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть интервал I открыт.

(1) Для $f \in C(I)$ операторная дифференцируемость по Гато эквивалентна операторной дифференцируемости по Фреше.

(2) Операторно дифференцируемая функция f действует в $\mathfrak{D}(\delta)$ для любого замкнутого дифференцирования δ , и при этом

$$\delta(f(A)) = f^{\nabla}(A)\delta(A) \quad (1)$$

для $A = A^* \in \mathfrak{D}(\delta)$.

(3) Если функция f действует в областях определения всех замкнутых дифференцирований, то $f \in C^1(I)$ и f является операторно липшицевой на любом компактном подинтервале $I_1 \subset I$.

Учитывая теорему В. В. Пеллера [4, теорема 8], получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Функции, локально принадлежащие классу Бесова $B_{\infty 1}^1$, действуют в областях определения замкнутых дифференцирований.

Для дифференцирований, являющихся генераторами групп автоморфизмов, формулу (1) доказали Арази, Бартон и Фридман [1].

Операторно дифференцируемые функции впервые рассматривались Далецким и Крейном [3], доказавшими операторную дифференцируемость дважды дифференцируемых функций. Недостаточность обычной дифференцируемости была установлена Фарфоровской [5]. Наиболее общие достаточные условия, найденные Бирманом и Соломяком [2], могут быть сформулированы в терминах мультипликаторов Шура.

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — компактный интервал и μ — мера на I . Ограниченная борелевская функция ϕ на $I \times I$ называется μ -мультипликатором, если под-

пространство $L^2(\mu) \widehat{\otimes} L^2(\mu) \subseteq L^2(\mu \times \mu)$ инвариантно относительно умножения на ϕ . Функция, являющаяся μ -мультипликатором для всех μ , называется мультипликатором Шура, мультипликатор меры Лебега — мультипликатором Лебега, а мультипликатор всех дискретных мер — мультипликатором Адамара.

Всякой функции $f \in C^1(I)$ следующим образом сопоставляется функция $f^\vee$ на $I \times I$:

$$f^\vee(t, s) = (f(t) - f(s))/(t - s) \quad \text{при } t \neq s, \quad f^\vee(t, t) = f'(t).$$

Как показано в [2], для операторной дифференцируемости функции f достаточно, чтобы $f^\vee$ была мультипликатором Шура, обладающим определенного рода непрерывностью по отношению к мерам на I . Наш следующий результат (вероятно, в каких-то частях известный специалистам) влечет за собой в силу теоремы 1 необходимость условия « $f^\vee$ — мультипликатор Шура» для операторной дифференцируемости функции f .

ТЕОРЕМА 2. Пусть I — компактный интервал. Для $f \in C^1(I)$ следующие условия эквивалентны:

- (1) f операторно липшицева;
- (2) $f^\vee$ — мультипликатор Шура;
- (3) $f^\vee$ — мультипликатор Адамара;
- (4) $f^\vee$ — мультипликатор Лебега.

ТЕОРЕМА 3. (1) Функция f , определенная на открытом интервале I , является операторно монотонной тогда и только тогда, когда она операторно дифференцируема и $f^\nabla(A) \geq 0$ (т. е. сохраняет конус положительных операторов) для всех $A \in \mathfrak{B}_I(H)$.

(2) Если f операторно монотонна, то

$$\|f^\nabla(A)\| = \sup \{|f'(t)|; t \in \sigma(A)\} \quad (2)$$

для любого $A \in \mathfrak{B}_I(H)$.

Область определения $D(\delta)$ замкнутого дифференцирования δ является банаховой $*$ -алгеброй относительно нормы $\|X\|_\delta = \|X\| + \|\delta(X)\|$. Формулы (1) и (2) удобны для оценок нормы в $D(\delta)$ при доказательстве результатов спектрально-синтетического характера.

Пусть $\Phi = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : 0 \in \text{int}(f^{-1}(0))\}$ и $\delta: D(\delta) \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ — замкнутое дифференцирование.

ТЕОРЕМА 4. (1) Для любого $A \in D(\delta) \cap \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^+}(H)$ существует такая последовательность функций $f_n \in \Phi$, что $\|f_n(A) - A\| \rightarrow 0$ и $\sup_n \|f_n(A)\|_\delta < \infty$.

(2) Для любого $A = A^* \in D(\delta)$ существует такая последовательность функций $g_n \in \Phi$, что $\|g_n(A) - A^2\|_\delta \rightarrow 0$.

Приведем одно из следствий этого результата, играющее важную роль в классификации дифференцирований алгебр компактных операторов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $D(\delta)$ состоит из компактных операторов, то идеал операторов конечного ранга плотен по норме $\|\cdot\|_\delta$ в $D(\delta)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arazy J., Barton T., Friedman Y. Integral Equations and Operator Theory, **13**, 461–487 (1990).
2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Проблемы математической фи-

зики, **6**, 28–54 (1973). **3.** Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж, т. 1 (1956), с. 81–106. **4.** Пеллер В. В. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 2, 37–51 (1985). **5.** Фарфоровская Ю. Б. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **30**, 146–153 (1972).

Университет Северного Лондона
Вологодский государственный
естественно-математический лицей

Поступило в редакцию
25 февраля 1995 г.

УДК 517.956

Магнитная теория Флоке и спектральные асимптотики для операторов Шрёдингера*

© 1996. С. З. ЛЕВЕНДОРСКИЙ

1. Рассмотрим оператор Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$H_{B,V}^0 = (-i\nabla + A(x))^*(-i\nabla + A(x)) + V(x): C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

с периодическим потенциалом $V \in L_\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ и магнитным потенциалом A , таким, что магнитный тензор $B = [b_{jk}]_{j,k=1}^n$, $b_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$, постоянен. Оператор $H_{B,V}^0$ существенно самосопряжен, и мы обозначаем его замыкание через $H_{B,V}$.

Обозначим через $\sigma(H)$ (соответственно $\sigma_{\text{ess}}(H)$) спектр (соответственно существенный спектр) оператора H . Хорошо известно, что $\sigma(H_{B,V}) = \sigma_{\text{ess}}(H_{B,V})$ (см., например, [8, 9] в случае $B = 0$ и [7] в случае $B \neq 0$). В $\sigma_{\text{ess}}(H_{B,V})$ могут быть лакуны [7–9].

Существует много статей, посвященных различным аспектам спектральной теории $H_{B,V}$ (см. библиографию в [7, 6]). Одна из задач — рассмотреть асимптотику числа $N_\pm(t; H_{B,V} - E; W)$ ветвей собственных значений семейства $H_{B,V} \mp \mu W$ с $0 < \mu < t$, которые пересекают энергетический уровень $E \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H_{B,V})$, где W — убывающий на бесконечности потенциал. Если W не сохраняет знак, то задача о вычислении $N_\pm(t; H_{B,V} - E; W)$ имеет вид задачи о спектре линейного пучка $Au = tBu$ с незнакоопределенными A и B и является весьма сложной; известны только некоторые оценки в случае $B = 0$ (см. [4] и библиографию там; использованная в [4] методика позволяет исследовать и случай $B \neq 0$). Для другого сложного случая — E лежит на границе лакуны (но $W \geq 0$) — главный член асимптотики вычислен в [1].

Главный член асимптотики в случае, когда $W \geq 0$ и E лежит внутри лакуны, был вычислен в ряде работ (см. [4, 5] и библиографию в [4–7]) при различных предположениях о B и скорости убывания потенциала W .

В настоящей работе мы рассматриваем случай рациональных магнитных флюксов (см. [7]) и полиномиально убывающего W и получаем главный член асимптотики функции $N_-(t; H_{B,V} - E; W)$ с точной оценкой остаточного члена, а иногда два члена асимптотики. Аналогичный результат в случае $B = 0$ получен в [6], где вычислялась и асимптотика функции $N_+(t; H_{B,V} - E; W)$.

* Исследование частично поддержано МНФ, грант RNH 300.