Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Левендорский, Магнитная теория Флоке и спектральные асимптотики для операторов Шрёдингера, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 06:06:46

зики, **6**, 28–54 (1973). **3.** Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж, т. 1 (1956), с. 81–106. **4.** Пеллер В. В. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 2, 37–51 (1985). **5.** Фарфоровская Ю. Б. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **30**, 146–153 (1972).

Университет Северного Лондона
Вологодский государственный
естественно-математический лицей

Поступило в редакцию
25 февраля 1995 г.

УДК 517.956

Магнитная теория Флоке и спектральные асимптотики для операторов Шрёдингера*

© 1996. С. З. ЛЕВЕНДОРСКИЙ

1. Рассмотрим оператор Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$H_{B,V}^0 = (-i\nabla + A(x))^*(-i\nabla + A(x)) + V(x): C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

с периодическим потенциалом $V \in L_\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ и магнитным потенциалом A , таким, что магнитный тензор $B = [b_{jk}]_{j,k=1}^n$, $b_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$, постоянен. Оператор $H_{B,V}^0$ существенно самосопряжен, и мы обозначаем его замыкание через $H_{B,V}$.

Обозначим через $\sigma(H)$ (соответственно $\sigma_{\text{ess}}(H)$) спектр (соответственно существенный спектр) оператора H . Хорошо известно, что $\sigma(H_{B,V}) = \sigma_{\text{ess}}(H_{B,V})$ (см., например, [8, 9] в случае $B = 0$ и [7] в случае $B \neq 0$). В $\sigma_{\text{ess}}(H_{B,V})$ могут быть лакуны [7–9].

Существует много статей, посвященных различным аспектам спектральной теории $H_{B,V}$ (см. библиографию в [7, 6]). Одна из задач — рассмотреть асимптотику числа $N_\pm(t; H_{B,V} - E; W)$ ветвей собственных значений семейства $H_{B,V} \mp \mu W$ с $0 < \mu < t$, которые пересекают энергетический уровень $E \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H_{B,V})$, где W — убывающий на бесконечности потенциал. Если W не сохраняет знак, то задача о вычислении $N_\pm(t; H_{B,V} - E; W)$ имеет вид задачи о спектре линейного пучка $Au = tBu$ с незнакоопределенными A и B и является весьма сложной; известны только некоторые оценки в случае $B = 0$ (см. [4] и библиографию там; использованная в [4] методика позволяет исследовать и случай $B \neq 0$). Для другого сложного случая — E лежит на границе лакуны (но $W \geq 0$) — главный член асимптотики вычислен в [1].

Главный член асимптотики в случае, когда $W \geq 0$ и E лежит внутри лакуны, был вычислен в ряде работ (см. [4, 5] и библиографию в [4–7]) при различных предположениях о B и скорости убывания потенциала W .

В настоящей работе мы рассматриваем случай рациональных магнитных флюксов (см. [7]) и полиномиально убывающего W и получаем главный член асимптотики функции $N_-(t; H_{B,V} - E; W)$ с точной оценкой остаточного члена, а иногда два члена асимптотики. Аналогичный результат в случае $B = 0$ получен в [6], где вычислялась и асимптотика функции $N_+(t; H_{B,V} - E; W)$.

* Исследование частично поддержано МНФ, грант RNH 300.

БЛАГОДАРНОСТИ. Автор признателен д-ру А. Садбэри и Йоркскому университету за гостеприимство во время одного из этапов работы над статьей.

2. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^n$, и пусть V — вещественная Γ -периодическая функция класса $L_\infty(\mathbb{R}^n)$; соответствующий оператор будем также обозначать через V .

Мы предполагаем, что $(B\delta, \gamma) \in \pi\mathbb{Q}$ для всех $\delta, \gamma \in \Gamma$; переходя в случае необходимости к подрешетке, мы можем предполагать, что $(B\delta, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$ для всех $\delta, \gamma \in \Gamma$. В дальнейшем мы фиксируем такую функцию Γ . Можно было бы использовать условие $(B\delta, \gamma) \in \pi\mathbb{Z}$ для всех $\delta, \gamma \in \Gamma$, но это привело бы к излишним усложнениям в некоторых формулах ниже.

Пусть T_γ , $\gamma \in \Gamma$, — оператор сдвига: $(T_\gamma u)(x) = u(x + \gamma)$; тогда T_γ коммутирует с V , но, вообще говоря, не коммутирует с $H_{B,V}$. Тем не менее $H_{B,V}$ коммутирует с «магнитными сдвигами» $\mathbb{T}_\gamma^B$: $(\mathbb{T}_\gamma^B u)(x) = \exp\{-i(Bx, \gamma)\}u(x + \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Если $(B\delta, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$ для всех $\delta, \gamma \in \Gamma$, то сдвиги $\mathbb{T}_\gamma^B$ удовлетворяют условию $\mathbb{T}_\gamma^B \mathbb{T}_\delta^B = \mathbb{T}_{\gamma+\delta}^B$, и мы можем использовать теорию Флоке. О стандартной теории Флоке ($B = 0$) см. [8], о магнитной — [7].

Пусть $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ — базис в $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ — двойственный базис двойственной решетки $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^{n*}$, $(\alpha^j, \beta^l) = 2\pi\delta_{jl}$. Положим

$$\Omega = \left\{ x = \sum_{j=1}^n t_j \alpha^j \mid t_j \in [0, 1) \right\}, \quad \Omega^* = \left\{ \theta = \sum_{j=1}^n \theta_j \beta^j \mid \theta_j \in [0, 1) \right\}.$$

Мы отождествляем $\mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*$ с Ω^* . Для фиксированного $\theta \in \Omega^*$ пусть

$$\mathcal{H}_{B,V}(\theta) = (-i\nabla + A(x))^*(-i\nabla + A(x)) + V(x)$$

— оператор в $L_2(\Omega)$ с граничными условиями

$$(\mathbb{T}_{\alpha_j}^B u)(x) = \exp\{i(\alpha^j, \theta)\}u(x), \quad \partial_{t_j}(\mathbb{T}_{\alpha_j}^B u)(x) = \exp\{i(\alpha^j, \theta)\}\partial_{t_j}u(x),$$

$x, x + \alpha^j \in \partial\Omega$, $j = 1, \dots, n$. Это полуограниченный самосопряженный оператор с дискретным спектром. Пусть $E_1(\theta) \leq E_2(\theta) \leq \dots$ — его собственные значения с учетом кратности. Положим

$$\mathcal{L} := \int_{\mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*} \bigoplus L_2(\Omega) \frac{d\theta}{\text{vol } \Omega^*}, \quad \mathcal{H}_{B,V} := \int_{\mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*} \bigoplus \mathcal{H}_{B,V}(\theta) \frac{d\theta}{\text{vol } \Omega^*}.$$

Мы можем отождествить $\mathcal{L}$ с $L_2(\mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*; L_2(\Omega))$, а $\mathcal{H}_{B,V}$ — с оператором умножения на операторнозначную функцию $\mathcal{H}_{B,V}(\cdot)$.

Определим $\mathcal{U}: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}$ равенством

$$(\mathcal{U}u)(x, \theta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp\{-i(\theta, \gamma)\}(\mathbb{T}_\gamma^B u)(x).$$

Это изометрия, и $\mathcal{U}H_{B,V}\mathcal{U}^* = \mathcal{H}_{B,V}$. Следовательно,

$$\sigma(H_{B,V}) = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*} E_j(\theta).$$

Мы предполагаем, что в $\sigma(H_{B,V})$ существует хотя бы одна лагуна.

Ниже мы фиксируем V , B и Γ и пишем H , $\mathcal{H}$ вместо $H_{B,V}$, $\mathcal{H}_{B,V}$.

3. Через $L^m(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \text{End } L_2(\Omega))$ обозначим класс классических псевдодифференциальных операторов (ПДО) на $\mathbb{R}^n/\Gamma^*$ порядка m с символами, принимающими значения в $\text{End } L_2(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть W допускает асимптотическое разложение

$$W(x) = W_{-m}(x) + W_{-m-1}(x) + \dots \quad \text{при } |x| \rightarrow +\infty, \quad (1)$$

где $m \in \mathbb{R}$, а $W_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ положительно однородна степени j ($j = -m, -m-1, \dots$).

Тогда $\mathcal{W} := \mathcal{U}W\mathcal{U}^* \in L^{-m}(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \text{End } L_2(\Omega))$, и его символ w допускает асимптотическое разложение

$$w(\xi) = W(-\xi) + \sum_{j=1}^n (\cdot)_j (\partial_j W)(-\xi) + \dots, \quad (2)$$

где $(\cdot)_j$ — оператор умножения на x_j в $L_2(\Omega)$.

Можно привести и полное асимптотическое разложение символа, ср. [6].

4. Теперь мы предполагаем, что $W > 0$ допускает разложение (1) с $m > 0$, причем W_{-m} положительна. Пусть $(\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^+)$ — лакуна в $\sigma(H)$, и фиксируем $E \in (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^+)$. Пусть $\mathcal{E}^- > -\infty$; тогда существует $p \geq 1$, такое, что

$$E_1(\theta) \leq \dots \leq E_p(\theta) < E < E_{p+1}(\theta) \leq \dots \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*. \quad (3)$$

Обозначим $P_{(-\infty, E)}(\mathcal{H}(\theta))$ через $\mathcal{P}_1(\theta)$ и положим $\mathcal{L}_1(\theta) = \text{Ran } \mathcal{P}_1(\theta)$, $\mathcal{L}_1 = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*} \mathcal{L}_1(\theta)$. Согласно (3), $\mathcal{P}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \text{End } L_2(\Omega))$ и $\dim \text{Ran } \mathcal{P}_1(\theta) = p$ для всех $\theta \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*$. Следовательно, $\mathcal{L}_1$ есть p -мерное расслоение над $\mathbb{R}^n/\Gamma^*$, наследующее структуру эрмитова расслоения с $L_2(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; L_2(\Omega))$. Очевидно, что операторы

$$u(\cdot, \theta) \mapsto \mathcal{P}_1(\theta)(E - \mathcal{H}(\theta))^s u(\cdot, \theta), \quad u(\cdot, \theta) \mapsto \mathcal{P}_1(\theta)(\mathcal{W}^{-1}u)(\cdot, \theta)$$

действуют в $C^\infty(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \mathcal{L}_1)$; мы обозначаем их через $(E - \mathcal{H})_1^s$ и $\mathcal{W}_1^{-1}$ соответственно ($s \in \mathbb{R}$).

Так как W положителен, W^{-1} удовлетворяет (1) с $-m$ вместо m , и, следовательно, $\mathcal{W}^{-1}$ является ПДО по теореме 1. $(E - \mathcal{H})_1^s$ локально является оператором умножения на операторнозначную функцию, которая положительно определена в силу (3). Значит, $\mathcal{W}_{11}^{-1} := (E - \mathcal{H})_1^{1/2} \mathcal{W}_1^{-1} (E - \mathcal{H})_1^{1/2}$ является ПДО, действующим в $C^\infty(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \mathcal{L}_1)$. Используя (2) и теорему о композиции для ПДО (см. [2, §18.6]), мы получаем асимптотическое разложение локальных символов оператора $\mathcal{W}_{11}^{-1}$.

В силу (1)–(3) оператор $\mathcal{W}_{11}^{-1}$ есть положительно определенный симметрический эллиптический ПДО класса $L^m(\mathbb{R}^n/\Gamma^*; \mathcal{L}_1)$. В следующей теореме утверждается, что асимптотические формулы для $N_-(t; H - E; W)$ по существу те же, что и для для считающей функции спектра оператора $\mathcal{W}_{11}^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть W положителен, и пусть имеет место разложение (1) с $m > 0$ и выполнено условие (3). Тогда

$$N_-(t; H - E; W) = c(H; E; W_{-m})t^{n/m} + O(t^{(n-1)/m}),$$

где

$$c(H; E; W_{-m}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_n}} \sum_{j=1}^p \int_{S_{n-1}} (W(x)_{-m})^{n/m} dS(x) \int_{\mathbb{R}^{n^*}/\Gamma^*} (E - E_j(\theta))^{-n/m} d\theta.$$

Если для $\mathcal{W}_{11}^{-1}$ известна двучленная асимптотическая формула, то та же формула верна и для $N_-(t; H - E; W)$.

Об условиях, при которых известны двучленные асимптотические формулы, и о их виде см. [3, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Birman M. Š. In: Advances in Soviet Mathematics, Vol. 7, Am. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 57–74.
2. Hörmander L. The Analysis of Differential Operators, Vol 3, Springer-Verlag, Berlin–New York–Heidelberg, 1985.
3. Ivrii V. Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators. Lect. Notes in Math., Vol. 1100. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
4. Levendorskii S. Z. Commun. Partial Diff. Equat., **20**, No. 5–6, 827–854 (1995).
5. Levendorskii S. Z. В печати в Math. Z.
6. Levendorskii S. Z. В печати в Trans. Am. Math. Soc.
7. Mohamed A., Raikov G. D. In: Advances in Partial Differential Equations, Pseudodifferential Operators and Mathematical Physics, Akademie Verlag, Berlin, 1994, pp. 298–300.
8. Руд М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. Мир, М., 1982.
9. Розенблум Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 64, ВИНТИ, М., 1989.

Ростовский-на-Дону институт
народного хозяйства

Поступило в редакцию
26 мая 1995 г.
В переработанном виде
7 марта 1996 г.

УДК 512.81

Когомологии нильпотентных подалгебр алгебры $\widehat{sl}_2$

© 1996. С. А. Локтев, Б. Л. Фейгин

В работе [1] Л. В. Гончарова вычислила гомологии ряда нильпотентных подалгебр в алгебре Ли векторных полей на прямой. Она рассматривала векторные поля с j -кратным нулем в начале координат. Такую алгебру Ли можно продеформировать в алгебру Ли векторных полей, обращающихся в нуль в j различных точках. Замечательно, что размерности пространств гомологий при такой деформации не изменяются.

В этой заметке мы приводим результат вычисления гомологий сходных с этими подалгебр в алгебре Ли токов на прямой со значениями в sl_2 . Мы показываем также, что размерности гомологий не изменяются при естественных деформациях таких алгебр.

Пусть e, f, h — стандартный базис в алгебре sl_2 . Алгебра полиномиальных