Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Локтев, Б. Л. Фейгин, Когомологии нильпотентных подалгебр алгебры $\widehat{sl}_2$, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 02:57:53

где

$$c(H; E; W_{-m}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^p \int_{S_{n-1}} (W(x)_{-m})^{n/m} dS(x) \int_{\mathbb{R}^{n*}/\Gamma^*} (E - E_j(\theta))^{-n/m} d\theta.$$

Если для $\mathcal{W}_{11}^{-1}$ известна двучленная асимптотическая формула, то та же формула верна и для $N_-(t; H - E; W)$.

Об условиях, при которых известны двучленные асимптотические формулы, и о их виде см. [3, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Birman M. Š. In: Advances in Soviet Mathematics, Vol. 7, Am. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 57–74.
2. Hörmander L. The Analysis of Differential Operators, Vol 3, Springer-Verlag, Berlin–New York–Heidelberg, 1985.
3. Ivrii V. Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators. Lect. Notes in Math., Vol. 1100. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
4. Levendorskii S. Z. Commun. Partial Diff. Equat., **20**, No. 5–6, 827–854 (1995).
5. Levendorskii S. Z. В печати в Math. Z.
6. Levendorskii S. Z. В печати в Trans. Am. Math. Soc.
7. Mohamed A., Raikov G. D. In: Advances in Partial Differential Equations, Pseudodifferential Operators and Mathematical Physics, Akademie Verlag, Berlin, 1994, pp. 298–300.
8. Руд М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. Мир, М., 1982.
9. Розенблум Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 64, ВИНТИ, М., 1989.

Ростовский-на-Дону институт
народного хозяйства

Поступило в редакцию
26 мая 1995 г.
В переработанном виде
7 марта 1996 г.

УДК 512.81

Когомологии нильпотентных подалгебр алгебры $\widehat{sl}_2$

© 1996. С. А. Локтев, Б. Л. Фейгин

В работе [1] Л. В. Гончарова вычислила гомологии ряда нильпотентных подалгебр в алгебре Ли векторных полей на прямой. Она рассматривала векторные поля с j -кратным нулем в начале координат. Такую алгебру Ли можно продеформировать в алгебру Ли векторных полей, обращающихся в нуль в j различных точках. Замечательно, что размерности пространств гомологий при такой деформации не изменяются.

В этой заметке мы приводим результат вычисления гомологий сходных с этими подалгебр в алгебре Ли токов на прямой со значениями в sl_2 . Мы показываем также, что размерности гомологий не изменяются при естественных деформациях таких алгебр.

Пусть e, f, h — стандартный базис в алгебре sl_2 . Алгебра полиномиальных

токов на прямой может быть представлена так:

$$sl_2 \otimes \mathbb{C}[t] = e \otimes \mathbb{C}[t] \oplus h \otimes \mathbb{C}[t] \oplus f \otimes \mathbb{C}[t].$$

Выберем три многочлена $P_+(t)$, $P_0(t)$, $P_-(t)$ так, что $P_+(t) \cdot P_-(t)$ делится на $P_0(t)$. Подпространство

$$N(P_+, P_0, P_-) = e \otimes \mathbb{C}[t] \cdot P_+(t) \oplus h \otimes \mathbb{C}[t] \cdot P_0(t) \oplus f \otimes \mathbb{C}[t] \cdot P_-(t)$$

— подалгебра в алгебре $sl_2 \otimes \mathbb{C}[t]$. Эта подалгебра состоит из токов $\mathbb{C} \rightarrow sl_2$ с особенностями в нулях многочленов P_+ и P_- . Если степени n_+ , n_0 , n_- , $n_0 \leq n_+ + n_-$, многочленов P_+ , P_0 , P_- фиксированы, то множество алгебр Ли $N(P_+, P_0, P_-)$ есть плоское семейство, параметризованное связным алгебраическим многообразием $B(n_+, n_0, n_-)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\deg(P_+) + \deg(P_-) > 0$. Тогда размерность пространства $H_i(N(P_+, P_0, P_-))$ равняется

$$C_{n_++n_0+n_-+i-1}^i - C_{n_++n_0+n_-+i-3}^{i-2}.$$

Пространства H_i составляют алгебраическое векторное расслоение над $B(n_+, n_0, n_-)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $N(1, 1, 1) = sl_2 \otimes \mathbb{C}[t]$. Таким образом, для неучтенного в теореме случая $H_*(N(1, 1, 1)) = H_*(sl_2)$.

В дальнейшем ограничимся случаем $\deg(P_-) + \deg(P_+) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что все нули многочленов P_+ и P_- простые и что они попарно не совпадают. Тогда алгебра $H^*(N(P_+, P_0, P_-))$ есть тензорное произведение

$$\underbrace{\mathfrak{C} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{C}}_{n_0 \text{ раз}} \otimes \Lambda^*(\xi_1, \dots, \xi_{n_++n_-n_0}) \otimes S^*(c_1, \dots, c_{n_++n_-1}), \quad (1)$$

где $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1 \oplus \cdots$ — градуированная алгебра с нулевым умножением, $\dim(\mathfrak{C}_i) = 2$ при $i > 0$, $\dim(\mathfrak{C}_0) = 1$, $\deg(\xi_i) = 1$, $\deg(c_i) = 2$.

Например, если $P_+ = t$, $P_0 = t$, $P_- = 1$, то $N(P_+, P_0, P_-)$ изоморфна максимальной нильпотентной подалгебре $\hat{\mathfrak{n}}$ в аффинной алгебре $\widehat{sl_2}$. По теореме Бореля–Вейля ее когомологии изоморфны $\mathfrak{C}$.

Пусть теперь $P_+ = t$, $P_0 = 1$, $P_- = 1$. Тогда $N(P_+, P_0, P_-)$ изоморфна алгебре $\hat{\mathfrak{b}}$ токов $f: \mathbb{C} \rightarrow sl_2$, таких, что $f(0)$ принадлежит борелевской подалгебре $\mathfrak{b}$ в sl_2 . Отображение $N(t, 1, 1) \rightarrow \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — одномерная картановская подалгебра алгебры sl_2 , индуцирует изоморфизм $H^*(N(t, 1, 1)) \cong H^*(\mathfrak{h})$.

Пусть $a_1^+, \dots, a_{n_+}^+$ — нули многочлена P_+ , $a_1^-, \dots, a_{n_-}^-$ — нули многочлена P_- , $\{a_1^+, \dots, a_{n_+}^+; a_1^-, \dots, a_{n_-}^-\}$ — нули многочлена P_0 и $n_0^+ + n_0^- = n_0$. Имеют место отображения

$$N(P_+, P_0, P_-) \rightarrow N(t - a_j^+, t - a_j^+, 1) \cong \hat{\mathfrak{n}}, \quad 1 \leq j \leq n_0^+, \quad (2)$$

$$N(P_+, P_0, P_-) \rightarrow N(1, t - a_j^-, t - a_j^-) \cong \hat{\mathfrak{n}}, \quad 1 \leq j \leq n_0^-, \quad (3)$$

$$N(P_+, P_0, P_-) \rightarrow N(t - a_j^+, 1, 1) \cong \hat{\mathfrak{b}}, \quad n_0^+ + 1 \leq j \leq n_+, \quad (4)$$

$$N(P_+, P_0, P_-) \rightarrow N(1, 1, t - a_j^-) \cong \hat{\mathfrak{b}}, \quad n_0^- + 1 \leq j \leq n_-. \quad (5)$$

Отображения (2) и (3) дают гомоморфизмы $\mathfrak{C} \cong H^*(\hat{n}) \rightarrow H^*(N(P_+, P_0, P_-))$, а (4) и (5) — гомоморфизмы $H^*(\hat{h}) \cong H^*(\hat{b}) \rightarrow H^*(N(P_+, P_0, P_-))$. Так получаются сомножители $\mathfrak{C}$ и образующие ξ_i в (1).

Коцепи, представляющие образующие c_i , получаются так. Выберем на комплексной плоскости набор путей $\gamma_1, \dots, \gamma_{n_+ + n_- - 1}$, соединяющих a_1^+ с $a_2^+, \dots, a_{n_+}^+, a_1^-, \dots, a_{n_-}^-$. Пути γ_i задают базис в пространстве одномерных относительных гомологий пространства $\mathbb{C}$ по модулю нулей многочленов P_+ и P_- . Коцепь, представляющая класс c_j , дается формулой

$$\int_{\gamma_j} \langle df_1, f_2 \rangle.$$

Здесь $f_1, f_2 \in N(P_+, P_0, P_-)$, т.е. это отображения $\mathbb{C} \rightarrow sl_2$, и $\langle \ , \ \rangle$ — форма Киллинга для sl_2 .

Заметим, что утверждение теоремы 2 получится, если вычислять непрерывные (в C^∞ -топологии) когомологии алгебры $N(P_+, P_0, P_-)$, используя технику Гельфанда–Фукса [2]. Смысл теоремы 2 состоит в том, что непрерывные когомологии совпадают с обычными.

Алгебра $N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-})$ деформируется в алгебру $N(P_+, P_0, P_-)$, где $\deg(P_-) = n_-$, $\deg(P_0) = n_0$, $\deg(P_+) = n_+$. Теорема 1 утверждает, что гомологии алгебры $N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-})$ имеют такие же размерности, как гомологии алгебры $N(P_+, P_0, P_-)$. Алгебра $N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-})$ биградуирована, а именно элемент $e \cdot t^j$ имеет градуировку $(1, j)$, $h \cdot t^j$ — градуировку $(0, j)$ и $f \cdot t^j$ — градуировку $(-1, j)$. В следующей теореме мы опишем индуцированную биградуировку в пространствах $H_*(N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Биградуировка в пространстве одномерных гомологий $V = H_1(N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-}))$ выглядит так:*

Пространство $V_{(i,j)}$ одномерно при

$$\begin{aligned} i &= 1, & n_+ &\leq j < n_+ + n_0, \\ i &= 0, & n_0 &\leq j < n_- + n_+, \\ i &= -1, & n_- &\leq j < n_- + n_0, \end{aligned}$$

и нульмерно в противном случае.

Пусть K — элемент симметрического квадрата $S^2(V)$, имеющий биградуировку $(0, n_+ + n_0 + n_- - 1)$, а I — идеал в $S^*(V)$, им порожденный. Рассмотрим коммутативную градуированную алгебру $\mathfrak{S} = \bigoplus \mathfrak{S}_i$, изоморфную фактору алгебры $S^*(V)$ по идеалу I , $S^i(V) \rightarrow \mathfrak{S}_i$.

ТЕОРЕМА 3. $H_i(N(t^{n_+}, t^{n_0}, t^{n_-}))$ и $\mathfrak{S}_i[(0, i(i+1)/2)]$ изоморфны как биградуированные пространства (квадратные скобки означают сдвиг биградуировки).

Доказательство теорем 1 и 3 основано на следующей технической лемме. k -мерные цепи стандартного комплекса для $N(P_+, P_0, P_-)$ можно рассматривать как многочлены от k переменных $t_1, \dots, t_k$ со значениями в $\bigotimes^k sl_2$ с естественным условием кососимметрии.

В этих терминах дифференциал ∂f представляет собой линейную комбинацию ограничений отображения f на диагонали $t_i = t_j$. В частности, если огра-

значение отображения f на любую такую диагональ нулевое, то $\partial f = 0$. Назовем эти циклы симметрическими, поскольку они представляются в виде

$$g(t_1, \dots, t_k) \cdot \prod_{i < j} (t_i - t_j),$$

где g — многочлен со значениями в $\bigotimes^k sl_2$ с естественным условием симметрии. Пространство симметрических циклов естественно изоморфно симметрической алгебре пространства $N(P_+, P_0, P_-)$.

ЛЕММА. *Любой класс $c \in H_*(N(P_+, P_0, P_-))$ может быть представлен симметрическим циклом.*

Если заменить sl_2 произвольной полупростой алгеброй Ли, то аналог этой леммы будет неверен. В настоящее время мы пытаемся найти удобный вид представителей классов когомологий для общего случая и, как следствие, аналог теорем 1 и 3. Кроме того, нас интересует вопрос о равенстве непрерывных и обычных когомологий — аналог теоремы 2. Вопрос о сохранении размерностей гомологий при естественных деформациях для общего случая также пока остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончарова Л. В. Функц. анализ и его прил., **7**, вып. 2, 6–14 (1973). 2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984.

Независимый московский университет
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

Поступило в редакцию
23 мая 1995 г.

УДК 517.98

Представимость функционалов в гильбертовых C^* -модулях*

© 1996. В. М. Мануйлов

Пусть A есть C^* -алгебра с единицей, а $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — счетно-порожденный гильбертов A -модуль с A -значным внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ [1–3] и нормой $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$, $x \in M$. Через M^* мы обозначаем банахов A -модуль A -значных непрерывных по норме функционалов на M , $M^* = \text{Hom}_A(M; A)$. Одним из важных отличий гильбертовых C^* -модулей от гильбертовых пространств является существование неавтодуальных модулей (т.е. таких модулей, что $M^* \neq M$) или, другими словами, отсутствие теоремы Рисса о представимости функционалов. В ряде работ [4, 5] показано, что иногда оказывается полезным рассмотрение на гильбертовом модуле M других внутренних произведений, эквивалентных исходному. В связи с этим возникает вопрос о представимости функционалов на M как внутренних произведений на элементы из M . Точнее,

* Настоящая работа была частично поддержана РФФИ (грант №94-01-00108-а), КЦФЕ, а также ДААД.