Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Представимость функционалов
в гильбертовых C^* -модулях, *Функц. анализ и его
прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:42:32

нение отображения f на любую такую диагональ нулевое, то $\partial f = 0$. Назовем эти циклы симметрическими, поскольку они представляются в виде

$$g(t_1, \dots, t_k) \cdot \prod_{i < j} (t_i - t_j),$$

где g — многочлен со значениями в $\bigotimes^k sl_2$ с естественным условием симметрии. Пространство симметрических циклов естественно изоморфно симметрической алгебре пространства $N(P_+, P_0, P_-)$.

ЛЕММА. *Любой класс $c \in H_*(N(P_+, P_0, P_-))$ может быть представлен симметрическим циклом.*

Если заменить sl_2 произвольной полупростой алгеброй Ли, то аналог этой леммы будет неверен. В настоящее время мы пытаемся найти удобный вид представителей классов когомологий для общего случая и, как следствие, аналог теорем 1 и 3. Кроме того, нас интересует вопрос о равенстве непрерывных и обычных когомологий — аналог теоремы 2. Вопрос о сохранении размерностей гомологий при естественных деформациях для общего случая также пока остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончарова Л. В. Функц. анализ и его прил., **7**, вып. 2, 6–14 (1973). 2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984.

Независимый московский университет
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

Поступило в редакцию
23 мая 1995 г.

УДК 517.98

Представимость функционалов в гильбертовых C^* -модулях*

© 1996. В. М. Мануйлов

Пусть A есть C^* -алгебра с единицей, а $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — счетно-порожденный гильбертов A -модуль с A -значным внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ [1–3] и нормой $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$, $x \in M$. Через M^* мы обозначаем банахов A -модуль A -значных непрерывных по норме функционалов на M , $M^* = \text{Hom}_A(M; A)$. Одним из важных отличий гильбертовых C^* -модулей от гильбертовых пространств является существование неавтодуальных модулей (т.е. таких модулей, что $M^* \neq M$) или, другими словами, отсутствие теоремы Рисса о представимости функционалов. В ряде работ [4, 5] показано, что иногда оказывается полезным рассмотрение на гильбертовом модуле M других внутренних произведений, эквивалентных исходному. В связи с этим возникает вопрос о представимости функционалов на M как внутренних произведений на элементы из M . Точнее,

* Настоящая работа была частично поддержана РФФИ (грант №94-01-00108-а), КЦФЕ, а также ДААД.

определим множество $F \subset M^*$ равенством

$$F = \bigcup_{\beta \in \mathbf{B}; y \in M} \langle y, \cdot \rangle_\beta,$$

где $\mathbf{B}$ — множество всех внутренних произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$, эквивалентных исходному, т.е. задающих норму, эквивалентную исходной. Функционал $f \in M^*$ будет называться представимым, если $f \in F$. Через H_A мы обозначаем стандартный гильбертов модуль $l_2(A)$, а через A^{**} — обертывающую W^* -алгебру C^* -алгебры A . Классический результат Пэшке [1] утверждает, что внутреннее произведение на модуле M над W^* -алгебрами продолжается (по непрерывности в слабой топологии) до внутреннего произведения на сопряженном модуле M^* . Такое продолжение с модуля $H_{A^{**}}$ на его сопряженный мы также обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Очевидно, что $H_A^* \subset H_{A^{**}}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $f \in H_A^*$ представим, то в H_A существует такой элемент z , для которого имеет место операторное неравенство

$$\alpha \langle z, z \rangle \leq \beta \langle f, f \rangle \leq \langle f, z \rangle \leq \gamma \langle f, f \rangle \leq \delta \langle z, z \rangle$$

для некоторых положительных констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [4], любое внутреннее произведение, эквивалентное исходному, имеет вид $\langle x, y \rangle_\beta = \langle Sx, Sy \rangle$, где $S: H_A \rightarrow H_A$ — некоторый ограниченный обратимый оператор, $S \in \text{End}_A(H_A)$; поэтому если f является представимым, то $f = S^*Sz$ для некоторого S и для некоторого $z \in H_A$. Здесь оператор S^* понимается как оператор из H_A в H_A^* . При этом $\langle f, z \rangle$ является положительным оператором в A и $\langle f, z \rangle = \langle S^*Sz, z \rangle = \langle Sz, Sz \rangle = \langle z, z \rangle_\beta$. Необходимая оценка следует из ограниченности и обратимости оператора S .

Назовем функционал $f \in M^*$ на гильбертовом модуле M несингулярным, если в M найдется элемент z , такой, что спектр $\langle f, z \rangle \in A$ отделен от нуля (тогда можно считать, что выполнено операторное неравенство $\langle f, z \rangle \geq c > 0$ для некоторого числа c). Следующий пример показывает, что существуют сингулярные функционалы со свойством $\langle f, f \rangle = 1$.

ПРИМЕР 2. Пусть $A = L^\infty([0; 1])$. Определим $f \in H_A^*$ как последовательность функций $f = (f_k(t))$,

$$f_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1/2^k; 1/2^{k-1}], \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Свойство $\langle f, f \rangle = 1$ очевидно. Покажем, что спектр оператора $\langle f, z \rangle$ не отделен от нуля для всех $z = (z_k) \in H_A$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k^* z_k$ сходится по норме, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n , такой, что $\|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k^* z_k\| < \varepsilon$. Но тогда при $t < 1/2^k$ выполнена оценка $|f_k(t) z_k(t)| < \varepsilon$, и, следовательно, $|\langle f, z \rangle(t)| < \varepsilon$. Значит, f сингулярен. Условие (1) для него не выполняется, и, следовательно, f не является представимым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f \in M^*$ — несингулярный функционал. Тогда он представим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несингулярность и неравенство Коши–Шварца дают нам оценку $0 < c \leq \langle f, z \rangle \leq \|f\| \langle z, z \rangle^{1/2}$, из которой следует, что модуль $\text{Span}_A z$

изоморфен A . Покажем, что имеет место разложение в (неортогональную) прямую сумму $M = \text{Span}_A z \oplus \text{Ker } f$. Если $x \in M$, то положим $a = \langle f, z \rangle^{-1} \cdot \langle f, x \rangle$, $y = x - za$. Тогда $x = za + y$ и $y \in \text{Ker } f$. Однозначность этого разложения очевидна. Определим теперь оператор $J: M \rightarrow M$ равенством

$$Jx = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \text{Span}_A z, \\ -x, & \text{если } x \in \text{Ker } f. \end{cases}$$

Как показано в [5], внутреннее произведение $\langle x, y \rangle_\beta = \langle x, y \rangle + \langle Jx, Jy \rangle$ эквивалентно исходному, и по отношению к нему z и $\text{Ker } f$ ортогональны. Положим $z' = z \cdot \langle z, z \rangle_\beta^{-1} \cdot \langle f, z \rangle$. Тогда $\langle f, x \rangle = \langle z', x \rangle_\beta$, т.е. f представим.

ТЕОРЕМА 4. Пусть C^* -алгебра A такова, что обратимые элементы плотны в ней. Тогда представимые функционалы плотны в H_A^* в исходной норме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к проверке того, что в H_A^* плотны несингулярные функционалы. Если $f = (f_i) \in H_A^*$, то в A можно найти обратимый элемент g_1 , такой, что $\|g_1 - f_1\| < \varepsilon$. Положив $g = (g_1, f_2, f_3, \dots) \in H_A^*$ и взяв $z = e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in H_A^*$, получим, что $\langle g, z \rangle$ обратим и $\|g - f\| < \varepsilon$.

Отметим, что в класс C^* -алгебр с плотным множеством обратимых элементов входят конечные W^* -алгебры. Действительно, пусть $a \in A$ — элемент такой алгебры и $a = uh$ — его полярное разложение, причем $u^*u = p$, $uu^* = q$, где p — проектор на $(\text{Ker } h)^\perp$. Так как p и q эквивалентны, то $1 - p$ и $1 - q$ также эквивалентны; следовательно, найдется такая частичная изометрия v , что $v^*v = 1 - p$, $vv^* = 1 - q$ и $vh = 0$. Тогда оператор $u + v$ унитарен. Пользуясь спектральной теоремой и положительностью оператора h , можно найти такой обратимый оператор h' , что $\|h - h'\| < \varepsilon$. Тогда элемент $a' = (u + v)h'$ обратим и $\|a - a'\| < \varepsilon$. В указанный класс алгебр входят также C^* -алгебры непрерывных функций на отрезке или окружности, поскольку любую такую функцию можно аппроксимировать гладким отображением в $\mathbb{C}$, и шевелением этого отображения можно добиться того, что его образ не будет содержать нуля. Ситуация с представимостью функционалов в общем случае более сложна. Рассмотрим следующий

ПРИМЕР 5. Пусть A есть C^* -алгебра ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Как показано в [4], существует изоморфизм модулей $S: A \rightarrow H_A^*$. Пусть $a \in A$ и $f = S(a)$. Тогда условие $\langle f, x \rangle = 0$ можно записать как

$$\langle S(a), x \rangle = \langle S(a), S(S^{-1}x) \rangle = \langle a, S^{-1}x \rangle = a^* \cdot S^{-1}x = 0. \quad (1)$$

Если $a \in A$ обратим, то из (1) следует, что $S^{-1}x = 0$, т.е. $\text{Ker } f = 0$. Но если бы f был представимым, $\langle f, \cdot \rangle = \langle z, \cdot \rangle_\beta$ с $z \in H_A$, f не мог бы иметь нулевого ядра. Следовательно, функционал $f = S(1_A)$ непредставим и обладает окрестностью, состоящей из функционалов, которые также непредставимы.

Рассмотрим теперь в банаховой алгебре $\text{End}_A(H_A)$ замкнутый идеал $\mathbf{K}(H_A)$, порожденный операторами вида $y\langle f, \cdot \rangle$, $y \in H_A$, $f \in H_A^*$. Через $K^\beta(H_A)$ мы будем обозначать C^* -алгебру компактных [2, 3] операторов в гильбертовом модуле $(H_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_\beta)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если C^* -алгебра A такова, что обратимые элементы

плотны в ней, то имеет место равенство

$$K(H_A) = \overline{\bigcup_{\beta \in \mathbf{B}} K^\beta(H_A)},$$

где черта означает замыкание в исходной норме.

Автор благодарен А. С. Мищенко, Е. В. Троицкому и М. Франку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paschke W. L.* Can. J. Math., **26**, 1272–1280 (1974). 2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**, 831–859 (1979). 3. *Kasparov G. G.* J. Operator Theory, **4**, 133–150 (1980). 4. *Frank M.* Geometrical Aspects of Hilbert C^* -Modules. Preprint No. 22, Københavns Universitet, 1993. 5. *Troitsky E. V.* Some aspects of geometry of operators in Hilbert modules. Preprint No. 173, Ruhr-Universität Bochum, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
31 августа 1994 г.

УДК 513.836

Расширения группы Вирасоро и алгебры Вирасоро с помощью модулей тензорных плотностей на S^1

© 1996. В. Ю. Овсиенко, К. Роже

1. Группа $\text{Diff}^+(S^1)$ (дiffeоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию) обладает единственным (с точностью до изоморфизма) нетривиальным центральным расширением, задаваемым с помощью коцикла Серстона–Ботта (см. [1]) $B(\Phi, \Psi) = \int_{S^1} \log((\Phi \circ \Psi)') d \log(\Psi')$, где $\Phi, \Psi \in \text{Diff}^+(S^1)$, $\Psi' = d\Psi/dx$, x — параметр на S^1 . Полученная группа называется группой Ботта–Вирасоро.

Соответствующая алгебра Ли называется *алгеброй Вирасоро*. Она задается единственным (с точностью до изоморфизма) нетривиальным центральным расширением алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ (гладких векторных полей на окружности) с помощью коцикла Гельфанда–Фукса (см. [3]) $\omega(f, g) = \int_{S^1} f'g'' dx$, где $f = f(x) dx/dx$, $g = g(x) dx/dx$.

2. Обозначим через $\mathcal{F}_\lambda$ $\text{Diff}^+(S^1)$ - и $\text{Vect}(S^1)$ -модуль тензорных плотностей $a = a(x)(dx)^\lambda$, $a(x) \in C^\infty(S^1)$, степени λ на S^1 .

В этой работе мы рассматриваем расширения группы $\text{Diff}^+(S^1)$ и алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ с помощью модулей тензорных плотностей на S^1 . Найденные группы и алгебры Ли являются аналогами группы и алгебры Вирасоро.

Мы вычисляем группу $H_c^2(\text{Diff}^+(S^1); \mathcal{F}_\lambda)$ дифференцируемых в смысле Ван-Эста когомологий, что означает классификацию расширений, заданных дифференциальными операторами. В результате получены четыре новые бесконечно-