Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Овсиенко, К. Роже, Расширения группы Вирасоро и алгебры Вирасоро с помощью модулей тензорных плотностей на S^1 , *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 86–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:17:33

плотны в ней, то имеет место равенство

$$K(H_A) = \overline{\bigcup_{\beta \in \mathbf{B}} K^\beta(H_A)},$$

где черта означает замыкание в исходной норме.

Автор благодарен А. С. Мищенко, Е. В. Троицкому и М. Франку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paschke W. L.* Can. J. Math., **26**, 1272–1280 (1974). 2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**, 831–859 (1979). 3. *Kasparov G. G.* J. Operator Theory, **4**, 133–150 (1980). 4. *Frank M.* Geometrical Aspects of Hilbert C^* -Modules. Preprint No. 22, Københavns Universitet, 1993. 5. *Troitsky E. V.* Some aspects of geometry of operators in Hilbert modules. Preprint No. 173, Ruhr-Universität Bochum, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
31 августа 1994 г.

УДК 513.836

Расширения группы Вирасоро и алгебры Вирасоро с помощью модулей тензорных плотностей на S^1

© 1996. В. Ю. Овсиенко, К. Роже

1. Группа $\text{Diff}^+(S^1)$ (диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию) обладает единственным (с точностью до изоморфизма) нетривиальным центральным расширением, задаваемым с помощью коцикла Серстона–Ботта (см. [1]) $B(\Phi, \Psi) = \int_{S^1} \log((\Phi \circ \Psi)') d \log(\Psi')$, где $\Phi, \Psi \in \text{Diff}^+(S^1)$, $\Psi' = d\Psi/dx$, x — параметр на S^1 . Полученная группа называется группой Ботта–Вирасоро.

Соответствующая алгебра Ли называется *алгеброй Вирасоро*. Она задается единственным (с точностью до изоморфизма) нетривиальным центральным расширением алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ (гладких векторных полей на окружности) с помощью коцикла Гельфанда–Фукса (см. [3]) $\omega(f, g) = \int_{S^1} f'g'' dx$, где $f = f(x) dx/dx$, $g = g(x) dx/dx$.

2. Обозначим через $\mathcal{F}_\lambda$ $\text{Diff}^+(S^1)$ - и $\text{Vect}(S^1)$ -модуль тензорных плотностей $a = a(x)(dx)^\lambda$, $a(x) \in C^\infty(S^1)$, степени λ на S^1 .

В этой работе мы рассматриваем расширения группы $\text{Diff}^+(S^1)$ и алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ с помощью модулей тензорных плотностей на S^1 . Найденные группы и алгебры Ли являются аналогами группы и алгебры Вирасоро.

Мы вычисляем группу $H_c^2(\text{Diff}^+(S^1); \mathcal{F}_\lambda)$ дифференцируемых в смысле Ван-Эста когомологий, что означает классификацию расширений, заданных дифференциальными операторами. В результате получены четыре новые бесконечно-

мерные группы Ли. Мы предъявим точные формулы для нетривиальных коциклов на $\text{Diff}^+(S^1)$.

ТЕОРЕМА 1. $H_c^2(\text{Diff}^+(S^1); \mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \lambda = 0, 1, 2, 5, 7, \\ 0, & \lambda \neq 0, 1, 2, 5, 7. \end{cases}$

3. Опишем явно 2-коциклы на $\text{Diff}^+(S^1)$, задающие нетривиальные классы когомологий. Напомним, что отображения

$$l(\Phi) = \log(\Phi'), \quad dl(\Phi) = \frac{\Phi''}{\Phi'} dx, \quad S(\Phi) = \left[\frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} \right)^2 \right] (dx)^2$$

определяют нетривиальные 1-коциклы на $\text{Diff}^+(S^1)$ со значениями в $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ соответственно. Коцикл S — это так называемая производная Шварца, а dl — логарифмическая производная.

Определим оператор $D: \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+1}$ формулой $D(a(x)(dx)^\lambda) = a'(x)(dx)^{\lambda+1}$.

ТЕОРЕМА 2. Нетривиальные 2-коциклы

$$B_1(\Phi, \Psi) = (l(\Phi) \circ \Psi) \cdot dl(\Psi), \quad B_2(\Phi, \Psi) = (l(\Phi) \circ \Psi) \cdot S(\Psi),$$

$$B_5(\Phi, \Psi) = (S(\Phi) \circ \Psi) \cdot DS(\Psi) - S(\Psi) \cdot D(S(\Phi) \circ \Psi),$$

$$B_7(\Phi, \Psi) = 2 \begin{vmatrix} S(\Phi) \circ \Psi & S(\Psi) \\ D^3(S(\Phi) \circ \Psi) & D^3(S(\Psi)) \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} D(S(\Phi) \circ \Psi) & D(S(\Psi)) \\ D^2(S(\Phi) \circ \Psi) & D^2(S(\Psi)) \end{vmatrix} - \frac{32}{3} (S(\Psi) + S(\Phi \circ \Psi)) B_5(\Phi, \Psi),$$

а также $B_0(\Phi, \Psi) = B(\Phi, \Psi)$ (коцикл Серстона–Ботта) задают базис группы когомологий $H_c^2(\text{Diff}^+(S^1); \mathcal{F}_\lambda)$, где $\lambda = 0, 1, 2, 5, 7$.

Первый из этих коциклов — коцикл Серстона–Ботта — означает здесь постоянную функцию на S^1 .

4. Классификация нетривиальных расширений алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ дается следующим утверждением Пудзисита [5] (см. [2, с. 147]):

$$H^2(\text{Vect}(S^1); \mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \lambda = 0, 1, 2, \\ \mathbb{R}, & \lambda = 5, 7, \\ 0, & \lambda \neq 0, 1, 2, 5, 7. \end{cases}$$

Опишем 2-коциклы на $\text{Vect}(S^1)$ со значениями в $\mathcal{F}_\lambda$, представляющие нетривиальные классы когомологий.

ТЕОРЕМА 3. Следующие восемь нетривиальных 2-коциклов: коцикл Гельфанда–Фукса $c_0(f, g) = \omega(f, g)$, а также

$$\bar{c}_0(f, g) = fg' - f'g, \quad c_1(f, g) = (f'g'' - f''g') dx,$$

$$\bar{c}_1(f, g) = (fg'' - f''g) dx, \quad c_2(f, g) = (f'g''' - f'''g')(dx)^2,$$

$$\bar{c}_2(f, g) = (fg''' - f'''g)(dx)^2, \quad c_5(f, g) = (f'''g^{(IV)} - f^{(IV)}g''')(dx)^5,$$

$$c_7(f, g) = (2(f'''g^{(VI)} - f^{(VI)}g''') - 9(f^{(IV)}g^{(V)} - f^{(V)}g^{(IV)}))(dx)^7$$

образуют базис группы когомологий $H^2(\text{Vect}(S^1); \mathcal{F}_\lambda)$, где $\lambda = 0, 1, 2, 5, 7$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Коциклы c_0, c_1, c_2, c_5, c_7 на алгебре Ли $\text{Vect}(S^1)$ отвечают групповым коциклам B_0, B_1, B_2, B_5, B_7 . Коциклы $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ не могут быть проинтегрированы до коциклов на группе $\text{Diff}^+(S^1)$.

2. Коцикл c_5 был найден в [4].

Обозначим через $\mathfrak{g}_i$ алгебру Ли, заданную коциклом c_i , а через $\bar{\mathfrak{g}}_i$ алгебру Ли, заданную коциклом $\bar{c}_i$.

5. Опишем центральные расширения алгебр Ли $\bar{\mathfrak{g}}_i$ и $\mathfrak{g}_i$. Каждая из алгебр Ли $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_7$ и $\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1, \bar{\mathfrak{g}}_2$ имеет нетривиальное центральное расширение, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \omega(f, g)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют еще ровно два нетривиальных центральных расширения:*

- 1) алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_1$, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (fb - ga) dx$;
- 2) алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (f'b - g'a) dx$.

Рассмотрим теперь центральные расширения полупрямого произведения.

$$\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. } H^2(\text{Vect}(S^1) \triangleright \mathcal{F}_\lambda; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \lambda = 0, 1, \\ \mathbb{R}, & \lambda \neq 0, 1. \end{cases}$$

В случаях $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ существуют два нетривиальных коцикла, неэквивалентных продолжению коцикла Гельфанда–Фукса. Их можно задать в виде $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (f''b - g''a) dx$ и $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (adb - bda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bott R. Enseign. Math., **23**, No. 3–4, 209–220 (1977). 2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984. 3. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Функци. анализ и его прил., **2**, вып. 4, 92–93 (1968). 4. Овсиенко В. Ю., Роже К. УМН, **47**, вып. 6, 141–194 (1992). 5. Tsujishita T. Proc. Japan Acad. A, **53**, No. 4, 134–138 (1977).

C. N. R. S., Centre de Physique Théorique, Marseille

Université Claude Bernard—Lion I

Поступило в редакцию
20 августа 1995 г.

В переработанном виде
24 января 1996 г.

УДК 517.9

О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости*

© 1996. С. А. СТЕПИН

При исследовании спектральных свойств сингулярно возмущенных операторов приходится отказываться от методов аналитической теории возмущений, в которой основную роль играет непрерывность резольвенты по параметру в смысле сходимости по норме. Примером такого рода служит задача на собственные значения для оператора вида $P + \varepsilon Q$, где P и Q — дифференциальные операторы

* Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант NCI300).