Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:17:29

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Коциклы c_0, c_1, c_2, c_5, c_7 на алгебре Ли $\text{Vect}(S^1)$ отвечают групповым коциклам B_0, B_1, B_2, B_5, B_7 . Коциклы $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ не могут быть проинтегрированы до коциклов на группе $\text{Diff}^+(S^1)$.

2. Коцикл c_5 был найден в [4].

Обозначим через $\mathfrak{g}_i$ алгебру Ли, заданную коциклом c_i , а через $\bar{\mathfrak{g}}_i$ алгебру Ли, заданную коциклом $\bar{c}_i$.

5. Опишем центральные расширения алгебр Ли $\bar{\mathfrak{g}}_i$ и $\mathfrak{g}_i$. Каждая из алгебр Ли $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_7$ и $\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1, \bar{\mathfrak{g}}_2$ имеет нетривиальное центральное расширение, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \omega(f, g)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют еще ровно два нетривиальных центральных расширения:*

- 1) алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_1$, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (fb - ga) dx$;
- 2) алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$, заданное коциклом $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (f'b - g'a) dx$.

Рассмотрим теперь центральные расширения полупрямого произведения.

$$\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. } H^2(\text{Vect}(S^1) \triangleright \mathcal{F}_\lambda; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \lambda = 0, 1, \\ \mathbb{R}, & \lambda \neq 0, 1. \end{cases}$$

В случаях $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ существуют два нетривиальных коцикла, неэквивалентных продолжению коцикла Гельфанда–Фукса. Их можно задать в виде $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (f''b - g''a) dx$ и $c((f, a), (g, b)) = \int_{S^1} (adb - bda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bott R. Enseign. Math., **23**, No. 3–4, 209–220 (1977). 2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984. 3. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Функци. анализ и его прил., **2**, вып. 4, 92–93 (1968). 4. Овсиенко В. Ю., Роже К. УМН, **47**, вып. 6, 141–194 (1992). 5. Tsujishita T. Proc. Japan Acad. A, **53**, No. 4, 134–138 (1977).

C. N. R. S., Centre de Physique Théorique, Marseille

Université Claude Bernard—Lion I

Поступило в редакцию
20 августа 1995 г.

В переработанном виде
24 января 1996 г.

УДК 517.9

О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости*

© 1996. С. А. СТЕПИН

При исследовании спектральных свойств сингулярно возмущенных операторов приходится отказываться от методов аналитической теории возмущений, в которой основную роль играет непрерывность резольвенты по параметру в смысле сходимости по норме. Примером такого рода служит задача на собственные значения для оператора вида $P + \varepsilon Q$, где P и Q — дифференциальные операторы

* Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант NCI300).

порядков m и n соответственно, причем $n > m$. Последнее условие, означающее сингулярность возмущения εQ по отношению к P , проявляется в неаналитической зависимости собственных значений оператора $P + \varepsilon Q$ от параметра ε в точке $\varepsilon = 0$ (см. [1, 2]).

Подходящим средством спектрального анализа подобных (и более общих) сингулярно возмущенных операторов оказывается сильная резольвентная сходимость (см. [3, 4]). Известно, что спектры самосопряженных операторов, близких в топологии резольвентной сходимости, ведут себя достаточно регулярно, а именно полунепрерывно снизу. В несамосопряженном случае обнаруживается качественно новый эффект: спектр может измениться скачком при непрерывном (в смысле резольвентной сходимости) изменении оператора. Цель настоящей работы — изучить этот эффект в контексте асимптотического анализа перехода от вязкой жидкости к идеальной применительно к задаче об устойчивости плоскопараллельных течений и установить связь с неортогональностью системы собственных и присоединенных функций соответствующей спектральной задачи.

Двумерное движение несжимаемой вязкой жидкости в полосе $\{x \in \mathbb{R}, z \in [-1, 1]\}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi \quad (1)$$

для функции тока $\Psi = \Psi(x, z, t)$; здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, а R — число Рейнольдса (величина, обратно пропорциональная вязкости жидкости). Линеаризуем уравнение (1) относительно стационарного течения с профилем скорости $u(z)$; при этом функцию тока возмущенного течения (в линейном приближении) будем искать в виде $\Psi(x, z, t) = \psi_0(z) + \psi(z)e^{i\alpha(x-ct)}$, где $\psi'_0(z) = u(z)$. В результате для амплитуды $\psi(z)$ получим (см., например, [5]) уравнение Орра–Зоммерфельда

$$\frac{1}{i\alpha R} (\psi^{(4)} - 2\alpha^2 \psi'' + \alpha^4 \psi) = (u - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - u''\psi, \quad (2)$$

здесь c — спектральный параметр, а $\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр задачи; на границах полосы $|z| \leq 1$ выполнены условия

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0. \quad (3)$$

Спектр краевой задачи (2)–(3) дискретный, а система собственных и присоединенных функций полна в пространстве функций с конечной энергетической нормой [6]. Отметим, что в пределе при $R \rightarrow \infty$ из (2)–(3) получается задача для уравнения Рэлея, спектр которой содержит непрерывную компоненту (см. [7]).

При исследовании спектральных свойств рассматриваемой задачи удобно перейти к (эквивалентной) операторной форме записи с помощью замены $\varphi = \Delta_\alpha \psi$, где Δ_α — дифференциальный оператор $d^2/dz^2 - \alpha^2$ с нулевыми условиями на концах отрезка $[-1, 1]$. После этой замены уравнение (2) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{i\alpha R} (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) + u\varphi - u''\Delta_\alpha^{-1}\varphi = c\varphi;$$

краевые условия $\varphi'(\pm 1) = 0$ превращаются в соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} \alpha(1 \pm z)}{\alpha} \varphi(z) dz = 0. \quad (4)$$

В результате задача (2)–(3) сводится к задаче на собственные значения для оператора $L_\varepsilon = (i\varepsilon/\alpha)(d^2/dz^2 - \alpha^2) + u - u''\Delta_\alpha^{-1}$, $\varepsilon = 1/R$, область определения которого состоит из элементов линейала $\{\varphi, \varphi' \text{ абсолютно непрерывны, } \varphi'' \in \mathcal{L}_2(-1, 1)\}$, подчиненных дополнительным условиям (4). Справедливо (следующее из [8])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ система собственных и присоединенных функций оператора L_ε образует базис Рисса в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ с дефектом 2, а именно базис пространства $\mathcal{L}$, задаваемого соотношениями (4).*

Степень неортогональности базиса Рисса (т.е. базиса, эквивалентного ортонормированному) измеряется величиной $\Upsilon := \|W\| \cdot \|W^{-1}\|$ (константа риссовости), где W — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, реализующий указанную эквивалентность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если корневые векторы оператора A с дискретным спектром ограниченной кратности образуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ базис Рисса, то для произвольного $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A)) < 1$, справедливо неравенство*

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq \Upsilon \mu \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-\mu}, \quad (5)$$

где Υ — константа риссовости базиса из корневых векторов и μ — максимальная кратность собственных значений оператора A .

Оператор L_ε , $\varepsilon > 0$, естественно рассматривать как сужение на $\mathcal{L}$ сингулярно возмущенного оператора $L_0 = u - u''\Delta_\alpha^{-1}$, действующего в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$: $L_\varepsilon = (L_0 + \varepsilon V)|_{\mathcal{L}}$, где $V = (i/\alpha)(d^2/dz^2 - \alpha^2)$. Оценка типа (5) для резольвенты $(L_\varepsilon - \lambda E)^{-1}$ в сочетании с результатом формулируемой ниже теоремы 1 позволяет сделать вывод (см. теорему 2) о степени неортогональности базиса, составленного из собственных и присоединенных функций оператора L_ε (и соответствующей задачи (2)–(3)).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть аналитическая в окрестности отрезка $[-1, 1]$ функция $u(z)$ достаточно близка к линейной относительно равномерной метрики. Тогда найдется число $R_\alpha \in \mathbb{R}_+$, такое, что некоторая комплексная окрестность нуля не содержит собственных значений задачи (2)–(3) при $R > R_\alpha$.*

Доказательство этого утверждения использует известные [9] асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения Орра–Зоммерфельда, справедливые при $\alpha R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \phi_1(z) + O((\alpha R)^{-1}), & \psi_2(z) &= \phi_2(z) + O((\alpha R)^{-1}), \\ \psi_3(z) &= (u(z) - c)^{-5/4} \exp \left\{ \sqrt{\alpha R} \int_{-1}^z \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta \right\} [1 + O((\alpha R)^{-1/2})], \\ \psi_4(z) &= (u(z) - c)^{-5/4} \exp \left\{ \sqrt{\alpha R} \int_z^1 \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta \right\} [1 + O((\alpha R)^{-1/2})]; \end{aligned}$$

здесь $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ — линейно независимые решения уравнения Рэлея

$$(u - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - u''\phi = 0. \quad (6)$$

При условии близости профиля $u(z)$ к линейному точка $c = 0$ принадлежит (непрерывному) спектру краевой задачи для уравнения (6) с условиями $\phi(\pm 1) = 0$ и соответствующего оператора L_0 . Тем самым теорема 1 обнаруживает эффект «спектрального скачка» для рассматриваемой задачи при $R \rightarrow \infty$. Сопоставление этого факта с оценкой резольвенты оператора L_ε на почти собственных векторах оператора L_0 , отвечающих точке $c = 0$, приводит к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $u(z)$ аналитична в некоторой окрестности отрезка $[-1, 1]$ и достаточно близка к линейной функции в равномерной метрике. Тогда для задачи (2)–(3)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(\varepsilon) \Upsilon(\varepsilon) = +\infty,$$

где $\varepsilon = 1/R$, $\mu(\varepsilon)$ — максимальная кратность собственных значений и $\Upsilon(\varepsilon)$ — константа риссовости базиса из собственных и присоединенных функций в подпространстве $W_2^2[-1, 1]$, задаваемом краевыми условиями (3).

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы 2 величина $\Upsilon(\varepsilon)$ неограниченна при $\varepsilon \downarrow 0$.

В заключение отметим, что учет степени неортогональности системы собственных и присоединенных функций задачи (2)–(3) позволяет уточнить асимптотику при $t \rightarrow \infty$ решений уравнения (1) и, в частности, скорость стабилизации устойчивых решений в зависимости от выбора начальных данных. Для линейаризованного уравнения (1) показатель неортогональности $\Upsilon(\varepsilon)$ влияет на величину максимально возможного роста начального возмущения (устойчивого) стационарного течения. Соответствующие оценки константы риссовости $\Upsilon(\varepsilon)$ будут приведены в одной из следующих публикаций автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. Bull. Am. Math. Soc., **61**, 485–504 (1955).
2. Moser J. Comm. Pure Appl. Math., **8**, 251–278 (1955).
3. Маслов В. П. ДАН СССР, **111**, №3, 531–534 (1956).
4. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
5. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, М., 1958.
6. Di Prima R. C., Habetler G. J. Arch. Rat. Mech. and Anal., **34**, 218–227 (1968).
7. Фаддеев Л. Д. Зап. науч. сем. ЛОМИ, **21**, 164–172 (1971).
8. Shkalikov A. A., Tretter C. Math. Nachr., **170**, 251–275 (1994).
9. Wasow W. Ann. Math., **58**, No. 2, 222–252 (1953).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
9 ноября 1995 г.