Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Хованский, Аналог определителя, связанный с теорией Паршина–Като, и целочисленные многогранники, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa6>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 04:24:56

Аналог определителя, связанный с теорией Паршина–Като, и целочисленные многогранники*

© 2006. А. Г. ХОВАНСКИЙ

Определитель n векторов в линейном n -мерном пространстве L^n над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — это единственная принимающая значения в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ненулевая полилинейная функция от n векторов, инвариантная относительно линейных преобразований и равная нулю, если ранг n векторов меньше, чем n . Существует единственная функция от $n + 1$ векторов в n -мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, обладающая в точности теми же свойствами. Она встречается при вычислении произведения в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ корней системы из n полиномиальных уравнений с достаточно общими многогранниками Ньютона (см. [1]); она же встречается в теории Паршина–Като (см. [2, 3]). В настоящей заметке мы обсуждаем эту замечательную функцию.

Определитель матрицы A над полем вещественных чисел — это объем ориентированного параллелепипеда, натянутого на столбцы матрицы A . Является ли объемом какой-либо фигуры аналог определителя для $n + 1$ векторов в n -мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? В статье дается положительный ответ на этот вопрос. Он тесно связан с геометрией целочисленных многогранников¹⁾.

Я признателен моей жене Т. В. Белокриницкой за помощь при подготовке статьи к печати и рецензентам этой статьи за полезные замечания.

§1. Аналог определителя для $n + 1$ векторов в n -мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

В этом параграфе мы опишем линейную алгебру, связанную с аналогом определителя. Начнем с определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через D функцию от $n + 1$ векторов из n -мерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, принимающую значения в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и заданную следующими соотношениями: значение $D(k_1, \dots, k_{n+1})$ функции D равно

- (а) нулю, если ранг набора векторов $k_1, \dots, k_{n+1}$ меньше, чем n ;
- (б) $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} + 1$, если векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ связаны единственным соотношением $\lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_{n+1} k_{n+1} = 0$.

ЛЕММА 1. *Функция D*

(1) $GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -инвариантна, т. е. для всякого линейного преобразования $A \in GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ справедливо тождество $D(k_1, \dots, k_{n+1}) = D(Ak_1, \dots, Ak_{n+1})$;

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадского гранта №156833-2.

¹⁾Как я узнал от А. Н. Паршина, обсуждаемое ниже простое определение функции D и связанная с этой функцией геометрия целочисленных многогранников ему не были известны, хотя та же самая функция D встречается в изобретенных им символах.

(2) равна нулю на наборах векторов $k_1, \dots, k_{n+1}$, ранг которых меньше, чем n ;

(3) полилинейна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (1) и (2) непосредственно вытекают из определения функции D . Для доказательства свойства (3) достаточно показать, что для любого фиксированного набора векторов $k_1, \dots, k_n$ функция φ , определенная равенством $\varphi(k) = D(k_1, \dots, k_n, k)$, линейна.

Ранг системы векторов $k_1, \dots, k_n$ может быть равным n , равным $n - 1$ или может быть меньше, чем $n - 1$. Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Ранг равен n . В этом случае векторы $k_1, \dots, k_n$ образуют базис в рассматриваемом линейном пространстве и вектор k единственным способом представляется в виде их линейной комбинации, $k = \lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_n k_n$. Тогда $\varphi(k) = D(k_1, \dots, k_n, k) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ является линейной функцией от k .

2. Ранг равен $n - 1$. В этом случае функция φ обращается в нуль на гиперплоскости Λ , натянутой на векторы $k_1, \dots, k_n$, и принимает постоянное значение на дополнении к этой гиперплоскости. Действительно, если $k \in \Lambda$, то ранг системы векторов $k_1, \dots, k_n, k$ меньше, чем n , и значение $D(k_1, \dots, k_n, k)$ равно нулю. Если же $k \notin \Lambda$, векторы связаны единственным соотношением, не зависящим от вектора k . Поэтому функция φ постоянна на дополнении к гиперплоскости Λ . Функция, обладающая таким свойством в линейном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, очевидно, является линейной.

3. Ранг меньше, чем $n - 1$. В этом случае функция φ тождественно равна нулю и, следовательно, линейна.

ЛЕММА 2. Существует единственная ненулевая функция D , обладающая свойствами (1)–(3) из леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полилинейную функцию достаточно задать на всех наборах $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n+1}}$ векторов из стандартного базиса $e_1, \dots, e_n$. Из свойства (2) вытекает, что функция может не равняться нулю, только если в наборе все векторы, кроме двух, различны. Из свойства (1) вытекает, что на всех таких наборах функция D принимает одно и то же значение. Если это значение равно нулю, то функция D нулевая. Остается единственная возможность: это значение равно единице. Эта возможность соответствует определенной выше функции D , которая, согласно лемме 1, действительно является $GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -инвариантной.

ЛЕММА 3. В координатах функция D выражается формулой

$$D(k_1, \dots, k_{n+1}) = \sum_{j > i} \det_{ij},$$

где $\det_{ij}$ — определитель $n \times n$ -матрицы, первые $n - 1$ строк которой представляют собой последовательность векторов $k_1, \dots, k_{n+1}$, из которой вычеркнуты векторы с номерами i и j , а последняя строка — это покомпонентное произведение векторов k_i и k_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\sum_{j > i} \det_{ij}$ является полилинейной функцией от векторов $k_1, \dots, k_{n+1}$. На наборах векторов стандартного базиса она, очевидно, совпадает с функцией D .

Приведем еще одну формулу для функции D . Пусть $\tilde{A}$ есть $n \times (n + 1)$ -матрица, строки которой — векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$, и $\det_i$ — определитель матрицы, которая получается из матрицы $\tilde{A}$ вычеркиванием i -й строки.

ЛЕММА 4. Векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ связаны следующим соотношением:

$$\sum (-1)^{i-1} \det_i k_i = 0.$$

Лемма 4 — простой факт из линейной алгебры.

ЛЕММА 5. Функция $\prod_{1 \leq i \leq n+1} (1 + \det_i)$ равна нулю, если векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ порождают пространство L^n . В противном случае она равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ порождают пространство L^n , если и только если хотя бы один из миноров $\det_i$ не равен нулю (и, следовательно, равен единице).

ТЕОРЕМА 1. Справедлива формула

$$D(k_1, \dots, k_{n+1}) = 1 + \det_1 + \dots + \det_{n+1} + \prod_{1 \leq i \leq n+1} (1 + \det_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ не порождают всего пространства L^n , то все миноры $\det_i$ равны нулю и $D = 1 + 1 = 0$. Если векторы $k_1, \dots, k_{n+1}$ порождают все пространство, то они связаны единственным соотношением $\sum \det_i k_i = 0$ (см. лемму 4). В этом случае $\prod (1 + \det_i) = 0$ (см. лемму 5). По определению функции D имеем

$$D(k_1, \dots, k_{n+1}) = 1 + \det_1 + \dots + \det_{n+1}.$$

Теорема 1 доказана.

§2. Объем цепи на $(n+1)$ -мерном торе, граница которой — сумма рациональных n -мерных торов

2.1. В §2 обсуждается геометрия, связанная с функцией D . Несколько слов о полученных результатах.

Пусть $\mathbb{Z}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $T^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$ есть $(n+1)$ -мерный вещественный тор. Мы геометрически определяем (см. разд. 2.2) некоторую вещественную функцию J на пространстве гомологичных нулю n -мерных циклов в торе T^{n+1} , заданную с точностью до прибавления целого числа (функцию J можно рассматривать как первообразную формы объема на торе). С каждым упорядоченным набором $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ из n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ мы связываем (см. разд. 2.2) гомологичный нулю n -мерный цикл $C(\mathbf{a})$ в торе T^{n+1} .

Рассмотрим $n \times (n+1)$ -матрицу A , столбцы которой — целочисленные векторы $a_1, \dots, a_n$. Пусть $k_1, \dots, k_{n+1}$ — строчки матрицы $\tilde{A}$ над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, полученной из матрицы A приведением по модулю два. Значение функции $2J$ на цикле $C(\mathbf{a})$ лежит в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. теорему 2) и совпадает со значением функции D на наборе векторов $k_1, \dots, k_{n+1}$ (см. теорему 4). Это утверждение придает функции D ясный геометрический смысл. Попутно мы получаем новые результаты о геометрии целочисленных многогранников (см. теоремы 3 и 3').

Отметим, что близкая геометрическая конструкция позволяет не только объяснить геометрический смысл знаков, фигурирующих в теории Паршина–Като, но геометрически построить классы когомологий аналитических многообразий с коэффициентами в $\mathbb{C}^*$ из этой теории и некоторые обобщения этих классов (см. [4]).

2.2. Обозначения и формулировки теорем. Пусть $T^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$ — стандартный $(n+1)$ -мерный тор, снабженный ориентацией и стандартной формой объема ω , $\int_{T^{n+1}} \omega = 1$. Определим функцию J на пространстве гомотопических нулю кусочно-гладких n -мерных циклов в торе T^{n+1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Значение $J(C)$ функции J на гомотопическом нулю n -мерном цикле C — это объем $\int_{\sigma_{n+1}} \omega$ цепи σ_{n+1} , такой, что $\partial\sigma_{n+1} = C$. Цепь σ_n определена с точностью до прибавления взятого с целым коэффициентом фундаментального цикла тора T^{n+1} ; поэтому число $J(C)$ — корректно определенный элемент группы $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Аффинное подпространство в $\mathbb{R}^{n+1}$ называется *рациональным*, если оно является аффинной оболочкой некоторого подмножества целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{n+1}$. В каждом k -мерном линейном рациональном подпространстве $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ определен *целочисленный k -мерный объем* V_k : это инвариантный относительно параллельных переносов объем, нормированный условием $V_k(\Delta) = 1$, где Δ есть k -мерный параллелепипед, стороны которого образуют базис решетки $K \cap \mathbb{Z}^{n+1}$. При факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1} = T^{n+1}$ пространство K переходит в рациональный k -мерный тор. На этом торе V_k индуцирует объем, который инвариантен относительно параллельных переносов и таков, что объем всего k -мерного тора равен единице. Параллельный перенос в $\mathbb{R}^{n+1}$ дает возможность распространить определение целочисленного объема на рациональные аффинные подпространства.

С упорядоченным набором $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, содержащим n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$, свяжем следующие объекты: *ориентированный параллелепипед* $\Pi[\mathbf{a}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, натянутый на векторы $a_1, \dots, a_n$; *целочисленный n -мерный объем* $V_n[\mathbf{a}]$ *параллелепипеда* $\Pi[\mathbf{a}]$; *цепь* $T[\mathbf{a}]$ в торе T^{n+1} , являющуюся образом ориентированного параллелепипеда $\Pi[\mathbf{a}]$ при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$; *поливектор* $v[\mathbf{a}] = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$.

Цепь $T[\mathbf{a}]$ *является циклом*. Если поливектор $v[\mathbf{a}]$ не равен нулю, то эта цепь совпадает с умноженным на число $V_n[\mathbf{a}]$ фундаментальным циклом n -мерного тора — образа при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ ориентированного n -мерного пространства, содержащего параллелепипед $\Pi[\mathbf{a}]$. Если $v[\mathbf{a}] = 0$, то $T[\mathbf{a}]$ — цикл, гомотопичный нулю, который можно затянуть пленкой, размерность которой меньше, чем $n+1$.

Пусть $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, m$, — упорядоченные наборы, содержащие по n целочисленных векторов. Очевидно, что *сумма* $v[\mathbf{a}_1] + \dots + v[\mathbf{a}_m]$ *поливекторов* $v[\mathbf{a}_j]$ *равна нулю, если и только если сумма* $T[\mathbf{a}_1] + \dots + T[\mathbf{a}_m]$ *циклов* $T[\mathbf{a}_j]$ *в группе* $H_n(T^{n+1}, \mathbb{Z})$ *равна нулю*.

Центральным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть сумма $v[\mathbf{a}_1] + \dots + v[\mathbf{a}_m]$ поливекторов $v[\mathbf{a}_j]$ равна нулю. Тогда значение $J(C)$ функции J на цикле $C = T[\mathbf{a}_1] + \dots + T[\mathbf{a}_m]$ является полуцелым числом. Для целого числа $2J(C)$ (определенного по модулю 2) справедливо сравнение $2J(C) \equiv (V_n[\mathbf{a}_1] + \dots + V_n[\mathbf{a}_m]) \pmod{2}$.

Теорему 2 мы докажем одновременно с формулируемой ниже теоремой 3, относящейся к геометрии целочисленных многогранников. Скажем, что n -мерная грань Γ выпуклого $(n+1)$ -мерного многогранника *сократима*, если у этого многогранника есть еще одна грань, равная грани Γ с точностью до параллельного переноса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выпуклый $(n+1)$ -мерный многогранник имеет *параллелепипедный тип*, если каждая его несократимая n -мерная грань является параллелепипедом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выпуклый $(n+1)$ -мерный целочисленный многогранник Δ имеет параллелепипедный тип. Тогда его удвоенный целочисленный $(n+1)$ -мерный объем является целым числом. Это число имеет ту же четность, что и сумма всех целочисленных n -мерных объемов граней многогранника Δ , являющихся параллелепипедами.

Целочисленный объем целочисленного параллелепипеда является целым числом. Если пара сократимых граней многогранника является парой параллелепипедов, то сумма их объемов — четное число. Поэтому в рамках теоремы 3 объемы сократимых пар параллелепипедов можно не учитывать. Утверждение теоремы 3 можно обобщить, после чего оно становится применимым к более широкому классу многогранников (см. теорему 3' из разд. 2.6).

Обозначим через $e_1, \dots, e_{n+1}$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и через $v[e_i]$ внешнее произведение всех векторов $e_1, \dots, e_{n+1}$, кроме вектора e_i . Пусть $\mathbf{a}$ — упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, состоящий из n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$, и пусть $v[\mathbf{a}] = \sum t_i v[e_i]$ — разложение поливектора $v[\mathbf{a}]$ по базисным поливекторам. Обозначим через $C(\mathbf{a})$ гомологичный нулю цикл $C(\mathbf{a}) = T[\mathbf{a}] - \sum t_i T[e_i]$.

ТЕОРЕМА 4. Значение функции $2J$ на цикле $C(\mathbf{a})$ — корректно определенный элемент поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, совпадающий со значением функции D на векторах $k_1, \dots, k_{n+1}$ — строках $n \times (n+1)$ -матрицы $\tilde{A}$, полученной приведением по модулю 2 матрицы A , столбцами которой являются векторы $a_1, \dots, a_n$.

2.3. Одномерный случай. Напомним классическую формулу Пика.

ФОРМУЛА ПИКА. Площадь $V_2(\Delta)$ целочисленного многоугольника Δ , число $B(\Delta)$ его внутренних целых точек и целочисленная длина его границы $\sum_j V_1(\Delta_j)$ (здесь суммирование ведется по множеству всех сторон Δ_j многоугольника Δ) связаны следующим соотношением:

$$V_2(\Delta) = B(\Delta) + \frac{1}{2} \sum_j V_1(\Delta_j) - 1.$$

ЛЕММА 6. Теорема 2 справедлива при $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ поливекторы $\mathbf{a}_j$ являются векторами на плоскости. Так как сумма векторов $\mathbf{a}_j$ равна нулю, то можно считать, что векторы $\mathbf{a}_j$ являются сторонами Δ_j некоторого выпуклого многоугольника Δ , ориентированными обходом его границы «в направлении против часовой стрелки». Из формулы Пика видно, что удвоенная площадь многоугольника Δ — целое число, отличающееся от целочисленной длины $\sum_j V_1(\Delta_j)$ его границы на четное число $2(B(\Delta) - 1)$. Образ ориентированного многоугольника Δ при факторизации $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ является двумерной цепью, граница C которой равна $T[\mathbf{a}_1] + \dots + T[\mathbf{a}_m]$. Поэтому $2J(C) \equiv 2V(\Delta) \pmod{2}$. Очевидно, что $V_1[\mathbf{a}_j] = V_1(\Delta_j)$. Лемма доказана.

Итак, при $n = 1$ теорема 2 вытекает из формулы Пика. Объемы многомерных целочисленных многогранников, вообще говоря, не являются полуцелыми

числами. Но для очень специальных многомерных многогранников все же справедлив аналог формулы Пика над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. теорему 3 и формулируемую ниже теорему 3').

Любой выпуклый многоугольник имеет параллелепипедный тип. Для многоугольников теорема 3 тоже вытекает из формулы Пика.

2.4. Шаг индукции. В этом разделе мы формулируем и доказываем основную лемму, которая нужна для доказательства теорем 2 и 3. Сумму по Минковскому выпуклых многогранников Δ_1, Δ_2 мы будем обозначать символом $\Delta_1 + \Delta_2$.

ЛЕММА 7. Пусть отрезок I в некотором аффинном пространстве трансверсален выпуклому $(n+1)$ -мерному многограннику Δ . Тогда каждая несократимая грань старшей размерности для многогранника $\Delta + I$ имеет вид $\Gamma_i + I$, где Γ_i — несократимая грань старшей размерности многогранника Δ . В частности, если многогранник Δ имеет параллелепипедный тип, то многогранник $\Delta + I$ тоже имеет параллелепипедный тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многогранник $\Delta + I$ содержит следующие $(n+1)$ -мерные грани. Во-первых, это пара сократимых граней $\Delta + a, \Delta + b$, где a и b — концы отрезка I . Во-вторых, это пара сократимых граней $\Gamma_1 + I$ и $\Gamma_2 + I$ для каждой пары сократимых n -мерных граней Γ_1 и Γ_2 многогранника Δ . Все остальные $(n+1)$ -мерные грани многогранника $\Delta + I$ несократимы и имеют вид $\Gamma_i + I$, где Γ_i — несократимая n -мерная грань многогранника Δ .

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Если теорема 3 верна для всякого целочисленного многогранника, аффинно эквивалентного данному $(n+1)$ -мерному многограннику Δ , то она верна для всякого целочисленного многогранника, аффинно эквивалентного $(n+2)$ -мерному многограннику $\Delta + I$, где I — отрезок, трансверсальный многограннику Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{L}$ и l $(n+1)$ -мерное и одномерное аффинные рациональные пространства, содержащие многогранник Δ и отрезок I . Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{L}$ и l являются линейными пространствами. Сумма $L = \mathcal{L} + l$ этих пространств является $(n+2)$ -мерным рациональным пространством, содержащим многогранник $\Delta + I$.

Шаг 1. Допустим дополнительно, что решетка в пространстве L является суммой решеток в пространствах $\mathcal{L}$ и l . В этом случае лемма очевидна. Действительно, по предположению леммы целочисленный $(n+1)$ -мерный объем многогранника Δ является полуцелым числом и выполняется сравнение

$$2V_{n+1}(\Delta) \equiv \sum_i V_n(\Gamma_i) \pmod{2}, \quad (*)$$

где суммирование ведется по всем n -мерным граням Γ_i многогранника Δ , являющимся параллелепипедами. В условиях шага 1 для каждого рационального подпространства $K \subset \mathcal{L}$ решетка в $K + l$ совпадает с суммой решеток в пространствах K и l . Целочисленный объем в $K + l$ есть произведение целочисленных объемов в K и в l . Аналогичное соотношение объемов справедливо для рациональных аффинных пространств, параллельных пространствам K, l и $K + l$. Умножая равенство (*) на целочисленную длину отрезка I , получим утверждение шага 1.

Шаг 2. Для сведения общего случая к случаю из шага 1 нам понадобятся преобразования расслоенного сдвига. Скажем, что непрерывное отображение

$F: L \rightarrow L$ является *расслоенным сдвигом* в направлении прямой l , если оно переводит каждую прямую, параллельную прямой l , в себя, причем ограничение отображения F на такую прямую является сдвигом (на вектор, зависящий от выбора прямой, параллельной l). Ясно, что всякий расслоенный сдвиг сохраняет форму объема на L , инвариантную относительно параллельных переносов. Пусть аффинное рациональное подпространство $K \subset L$ содержит прямую, параллельную рациональной прямой l . Тогда K инвариантно относительно расслоенного сдвига F , причем ограничение F на K сохраняет целочисленный объем в K .

Шаг 3. В пространстве $L = \mathcal{L} + l$ выделим прямую l . Выберем линейное целочисленное пространство $\mathcal{L}_1 \subset L$ таким образом, чтобы $L = \mathcal{L}_1 + l$ и чтобы $\Lambda_{n+2} = \Lambda_{n+1} + \Lambda_1$, где Λ_{n+2} , Λ_{n+1} и Λ_1 — решетки целых точек в L , $\mathcal{L}_1$ и l . Пространство $\mathcal{L}_1$ с такими свойствами существует. Для построения $\mathcal{L}_1$ несократимый вектор e_1 из решетки Λ_1 дополним до базиса $e_1, \dots, e_{n+2}$ в решетке Λ_{n+2} . В качестве $\mathcal{L}_1$ достаточно взять линейное пространство, порожденное векторами $e_2, \dots, e_{n+2}$. Рассмотрим проекцию $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$ пространства $\mathcal{L}$ на пространство $\mathcal{L}_1$ вдоль прямой l . Целочисленный $(n+1)$ -мерный многогранник $\pi(\Delta)$ аффинно эквивалентен многограннику Δ ; поэтому целочисленный $(n+1)$ -мерный объем многогранника $\pi(\Delta)$ является полуцелым числом и выполняется сравнение

$$2V_{n+1}(\pi(\Delta)) \equiv \sum_i V_n(\pi(\Gamma_i)) \pmod{2},$$

где суммирование ведется по всем n -мерным граням $\pi(\Gamma_i)$ многогранника $\pi(\Delta)$, являющимся n -мерными параллелепипедами. Согласно шагу 1,

$$2V_{n+2}(\pi(\Delta) + I) \equiv \sum_i V_{n+1}(\pi(\Gamma_i) + I) \pmod{2}.$$

Построим теперь аффинный расслоенный сдвиг $F: L \rightarrow L$ вдоль прямой l , переводящий многогранник $\Delta + I$ в многогранник $\pi(\Delta) + I$. Для этого на каждой прямой λ , параллельной l , отметим точки $x(\lambda) = \lambda \cap \mathcal{L}$ и $y(\lambda) = \lambda \cap \mathcal{L}_1$. Определим F как отображение, ограничение которого на прямую λ является сдвигом на вектор $y(\lambda) - x(\lambda)$. Ясно, что $F(\Delta) = \pi(\Delta)$, $F(\Delta + I) = \pi(\Delta) + I$, $F(\Gamma_i) = \pi(\Gamma_i)$, $F(\Gamma_i + I) = \pi(\Gamma_i) + I$. Согласно шагу 2, общий случай вытекает из случая, рассмотренного в шаге 1.

2.5. Доказательства теорем 2 и 3. Для завершения доказательства теоремы 2 основная лемма будет использоваться в форме такого следствия:

СЛЕДСТВИЕ. *Теорема 3 справедлива для многогранников $\Delta_{n+1} = \Delta_2 + \Pi$, где Δ_2 — целочисленный многоугольник, а Π есть $(n-1)$ -мерный целочисленный параллелепипед, трансверсальный многоугольнику Δ_2 . Все n -мерные грани многогранника Δ , кроме некоторых пар сократимых граней, имеют вид $a_i + \Pi$, где a_i — сторона многоугольника Δ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1) Элементарным соотношением между поливекторами назовем соотношение вида $a \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n + b \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n + c \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$, где $a, b, c, a_2, \dots, a_n$ — любые целочисленные векторы, для которых $a + b + c = 0$. Теорему 2 достаточно проверить лишь для элементарных соотношений. Действительно, если в соотношении между поливекторами встречается целочисленный вектор $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$, у которого сумма модулей координат

больше единицы, то он представим в виде $a = -b - c$, где $b, c \in \mathbb{Z}^{n+1}$ — векторы, у каждого из которых сумма модулей координат меньше, чем у вектора a . Продолжая этот процесс, сведем исходное соотношение к соотношениям, в которых фигурируют лишь векторы $\pm e_i$. Для подобных соотношений теорема 2 очевидна.

2) Осталось проверить теорему 2 для элементарного соотношения, связанного с тремя наборами векторов $\mathbf{a} = (a, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{c} = (c, a_2, \dots, a_n)$, такими, что $a + b + c = 0$. Сначала сделаем это при условии, что векторы $a, b, c, a_2, \dots, a_n$ лежат в некотором n -мерном подпространстве K . В этом случае гомологичный нулю цикл $C = T[\mathbf{a}] + T[\mathbf{b}] + T[\mathbf{c}]$ лежит в n -мерном торе $T(K)$ — образе пространства K при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$. Цепь σ_{n+1} , затягивающую цикл C , можно выбрать в торе $T(K)$; поэтому $J(C) = 0$. С другой стороны, $V_n[\mathbf{a}] + V_n[\mathbf{b}] + V_n[\mathbf{c}] = 0$. Действительно, вычисление объема n -мерного параллелепипеда в K сводится к вычислению определителя, а определитель полилинеен.

3) Перейдем к случаю, когда векторы $a, b, c, a_2, \dots, a_n$ не лежат ни в каком n -мерном подпространстве. В этом случае треугольник Δ_2 со сторонами a, b, c трансверсален $(n-1)$ -мерному параллелепипеду Π со сторонами $a_2, \dots, a_n$. К многограннику $\Delta_{n+1} = \Delta_2 + \Pi$ применимо следствие. Из него вытекает, во-первых, что граница $\partial\sigma_{n+1}$ цепи σ_{n+1} , являющейся образом при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ ориентированного многогранника Δ_{n+1} , равна циклу $C = T[\mathbf{a}] + T[\mathbf{b}] + T[\mathbf{c}]$. Действительно, пары сократимых граней многогранника Δ_{n+1} при факторизации уничтожаются и войдут в границу цепи σ_{n+1} с нулевым коэффициентом. Во-вторых, согласно следствию, теорема 3 справедлива для многогранника Δ_{n+1} . Поэтому справедливо сравнение $2J(C) \equiv (V_n[\mathbf{a}] + V_n[\mathbf{b}] + V_n[\mathbf{c}]) \pmod{2}$, которое и требовалось доказать.

Из теоремы 2 легко выводится теорема 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть σ_{n+1} — цепь в торе T^{n+1} , являющаяся образом при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ целочисленного многогранника Δ , имеющего параллелепипедный тип. Граница цепи σ_{n+1} равна сумме образов при факторизации ориентированных граней многогранника Δ , являющихся параллелепипедами. Действительно, пары сократимых граней многогранника Δ при факторизации уничтожаются и входят в границу цепи σ_{n+1} с нулевым коэффициентом. Теорема 3 вытекает теперь из теоремы 2.

2.6. Усиление теоремы 3. Теорему 3 можно усилить. Со всякой гиперплоскостью $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в $(n+1)$ -мерном выпуклом многограннике $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ связаны две грани $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$, для которых гиперплоскость, параллельная K и содержащая любую из этих граней, является опорной к многограннику. Пусть $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ — отображение факторизации. Скажем, что многогранник Δ *уравновешен* относительно рациональной гиперплоскости K с весом $m(K) \geq 0$, если в группе n -мерных цепей n -мерного тора $\pi(K) = T(K)$ выполнено равенство $\pi(\Gamma_1(K)) + \pi(\Gamma_2(K)) = \pm m(K)T(K)$. В этом равенстве $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$ рассматриваются как n -мерные цепи, снабженные ориентацией границы многогранника Δ , а $T(K)$ — как фундаментальный цикл тора, снабженного произвольной ориентацией. Объемы граней $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$ многогранника, уравновешенного относительно рациональной гиперплоскости K с весом $m(K) \geq 0$, удовлетворяют соотношению $|V_n(\Gamma_1(K)) - V_n(\Gamma_2(K))| = m(K)$. Скажем, что целочисленный многогранник Δ имеет *обобщенно параллелепипедный*

тип, если он уравновешен относительно каждой рациональной гиперплоскости K (это условие содержательно лишь для конечного числа гиперплоскостей K , параллельных n -мерным граням многогранника Δ).

ТЕОРЕМА 3'. Пусть Δ — выпуклый целочисленный $(n+1)$ -мерный многогранник, имеющий обобщенно параллелепипедный тип. Тогда удвоенный целочисленный $(n+1)$ -мерный объем многогранника Δ является целым числом, имеющим ту же четность, что и сумма весов $m(K)$ по всем рациональным гиперплоскостям K (суммирование достаточно проводить по конечному числу гиперплоскостей K , параллельных n -мерным граням многогранника Δ).

Теорема 3' выводится из теоремы 2 в точности так же, как теорема 3.

Отметим, что в трехмерном пространстве есть много многогранников, имеющих обобщенно параллелепипедный тип. Легко проверяется следующая

ЛЕММА 8. Сумма Минковского любого числа целочисленных отрезков и многоугольников, произвольным образом расположенных в $\mathbb{R}^3$, имеет обобщенно параллелепипедный тип.

2.7. Геометрический смысл функции D . В этом разделе доказывается теорема 4, сформулированная в разд. 2.2.

Напомним определение векторного произведения n векторов в $(n+1)$ -мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, снабженном стандартной формой объема ω . Векторное произведение упорядоченных векторов $a_1, \dots, a_n$ — это такой ковектор $\mathbf{a}^\perp \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$, что для всякого вектора $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливо равенство $\langle \mathbf{a}^\perp, a \rangle = \omega(a \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_n)$. Пусть A есть $n \times (n+1)$ -матрица, столбцы которой — компоненты векторов $a_1, \dots, a_n$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $\det_i(\mathbf{a})$ — определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i -й строки. Справедлива следующая

ЛЕММА 9. 1) В стандартном базисе пространства $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ векторное произведение $\mathbf{a}^\perp$ векторов $a_1, \dots, a_n$ задается формулой $\mathbf{a}^\perp = (\det_1(\mathbf{a}), \dots, (-1)^n \det_{n+1}(\mathbf{a}))$.

2) Ковектор $\mathbf{a}^\perp$ ортогонален каждому из векторов $a_1, \dots, a_n$, т. е. для любого $i = 1, \dots, n$ справедливо равенство $\langle \mathbf{a}^\perp, a_i \rangle = 0$.

3) Если векторы $a_1, \dots, a_n$ целочисленны, то вектор $\mathbf{a}^\perp$ тоже целочислен (т. е. принадлежит решетке $(\mathbb{Z}^{n+1})^*$, двойственной решетке $\mathbb{Z}^{n+1}$). При этом целочисленная длина $V_1(\mathbf{a}^\perp)$ ковектора $\mathbf{a}^\perp$ равна целочисленному объему $V_n[\mathbf{a}]$ параллелепипеда $\Pi[\mathbf{a}]$.

Лемма 9 — простой факт из линейной алгебры. Мы не будем останавливаться на его доказательстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Поливектор $v[\mathbf{a}] = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ следующим образом разлагается по координатным поливекторам $v[\mathbf{a}] = \det_1(\mathbf{a})e_2 \wedge \dots \wedge e_{n+1} + \dots + \det_{n+1}(\mathbf{a})e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Согласно теореме 2, $2J(C(A))$ — целое число, определенное с точностью до прибавления четного числа, и справедливо сравнение

$$2J(C[\mathbf{a}]) \equiv [V_n[\mathbf{a}] + \det_1(\mathbf{a}) + \dots + \det_{n+1}(\mathbf{a})] \pmod{2}.$$

По определению число $V_n[\mathbf{a}]$ равно целочисленному объему параллелепипеда $\Pi[\mathbf{a}]$, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_n$. По лемме 9 этот объем равен целочис-

ленной длине $V_1(\mathbf{a}^\perp)$ ковектора $\mathbf{a}^\perp = (\det_1(\mathbf{a}), \dots, (-1)^n \det_{n+1}(\mathbf{a}))$. Справедливо сравнение

$$V_1(\mathbf{a}^\perp) \equiv \left[1 + \prod_{1 \leq i \leq n+1} (1 + \det_i(\mathbf{a})) \right] \pmod{2}.$$

Действительно, как левая, так и правая части этого сравнения являются четными числами, если и только если все числа $\det_1(\mathbf{a}), \dots, \det_{n+1}(\mathbf{a})$ одновременно являются четными. Итак, выполняется следующее сравнение:

$$2J(C[\mathbf{a}]) \equiv \left[1 + \det_1(\mathbf{a}) + \dots + \det_{n+1}(\mathbf{a}) + \prod_{1 \leq i \leq n+1} (1 + \det_i(\mathbf{a})) \right] \pmod{2}.$$

Для завершения доказательства теоремы 4 осталось сослаться на формулу для функции D из теоремы 1.

Замечание при корректуре. Только что появилось еще одно применение функции D , обсуждаемой в настоящей статье. Совместно с А. И. Эстеровым мы вычислили отношение коэффициентов при любых двух экстремальных мономах многомерного результата. Многомерные результаты — это определенные с точностью до знака специальные полиномы Лорана от многих переменных. Они интенсивно изучались Гельфандом, Капрановым, Зелевинским, Штурмфельсом и др. Известны их многогранники Ньютона. Известно, что коэффициенты при экстремальных мономах (т. е. при мономах, соответствующих вершинам многогранника Ньютона) в каждом таком результате равны ± 1 . Наша с Эстеровым формула для отношения таких коэффициентов использует комбинаторику целочисленных многогранников и функцию D .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khovanskii A.* Newton polyhedrons, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations. In: The Arnoldfest (Proceedings of a conference in honour of V. I. Arnold for his 60th birthday, Toronto, Canada, June 15–21, 1997), Fields Inst. Commun., Vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 325–364.
2. *Паршин А. Н.* Локальная теория полей классов. Труды МИАН, **165**, 143–170 (1984).
3. *Паршин А. Н.* Когомологии Галуа и группа Брауэра локальных полей. Труды МИАН, **183**, 159–169 (1990).
4. *Хованский А. Г.* Логарифмический функционал и многомерные символы. Готовится к печати.

Институт системного анализа РАН
Московский независимый университет
The University of Toronto, Canada
e-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
12 января 2005 г.