Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Власенко, А. С. Меллит, Ю. С. Самойленко,
Об алгебрах, порожденных линейно связанными обра-
зующими с заданным спектром, *Функци. анализ и*
его прил., 2005, том 39, выпуск 3, 14–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:22:32

УДК 517.95

Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром*

© 2005. М. А. ВЛАСЕНКО, А. С. МЕЛЛИТ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО

Введение

Наборы операторов $\{X_k\}_{k=1}^N$ в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, спектры $\sigma(X_k)$ которых принадлежат заданным конечным множествам $M_k \subset \mathbb{C}$ ($k = 1, \dots, N$) и сумма которых скалярна,

$$\sum_{k=1}^N X_k = \lambda \mathbb{I}_{\mathbb{H}},$$

играют важную роль в анализе, алгебраической геометрии, теории операторов, математической физике (см. [1, 2] и приведенную там библиографию).

В настоящей работе изучается соответствующий алгебраический объект. Все рассматриваемые алгебры являются ассоциативными алгебрами над полем комплексных чисел с единицей, а все рассматриваемые полиномы — полиномами от одной переменной над полем комплексных чисел. Пусть $P_1, \dots, P_N$ — полиномы степени не меньше 2. Рассмотрим следующую алгебру с N образующими:

$$A_{P_1, \dots, P_N} = \mathbb{C} \left\langle x_1, \dots, x_N \mid P_i(x_i) = 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^N x_i = 0 \right\rangle$$

Для всевозможных наборов полиномов $P_1, \dots, P_N$ мы изучаем вопрос, являются ли алгебры $A_{P_1, \dots, P_N}$ конечномерными, и находим их рост в бесконечномерном случае (§2). О понятии роста и порядка роста см. [3]. Оказывается, что ответ зависит лишь от набора степеней полиномов $\deg P_1, \dots, \deg P_N$. В §3 изучается наличие полиномиальных тождеств в этих алгебрах.

Пусть $k_1, \dots, k_N$ — некоторые натуральные числа, большие 1. Обозначим через $T_{k_1, \dots, k_N}$ неориентированный граф, представляющий собой N ветвей с $k_1, \dots, k_N$ вершинами, склеенных в одной вершине. Например,

$$T_{3,2,2} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

Поставим в соответствие алгебре $A_{P_1, \dots, P_N}$ граф $\mathbb{G} = T_{\deg P_1, \dots, \deg P_N}$. Параметризуем алгебры, которым соответствует данный граф $\mathbb{G}$, наборами корней полиномов $P_1, \dots, P_N$ с учетом кратностей. В §2 статьи установлен следующий результат:

*Эта работа частично поддержана грантом DFG 436 UKR 113/71 (Германия) и грантом Государственного фонда фундаментальных исследований Украины №01.07/071.

ТЕОРЕМА 1. (1) Если $\mathbb{G}$ — диаграмма Дынкина, то алгебра $A_{P_1, \dots, P_N}$ конечномерна и ее размерность не превышает $2(n+1)$ для D_n , 12 для E_6 , 24 для E_7 и 60 для E_8 . Оценки достигаются для алгебр с нильпотентными образующими (т. е. когда $P_i(x) = x^{k_i}$, $1 \leq i \leq N$). Существует конечный набор гиперплоскостей в пространстве параметров (т. е. корней полиномов), вне которого все соответствующие алгебры нулевые.

(2) Если $\mathbb{G}$ — расширенная диаграмма Дынкина, то алгебра $A_{P_1, \dots, P_N}$ имеет квадратичный порядок роста.

(3) Если граф $\mathbb{G}$ не является ни диаграммой Дынкина, ни расширенной диаграммой Дынкина, то алгебра $A_{P_1, \dots, P_N}$ содержит свободную подалгебру с двумя образующими.

Все конечномерные алгебры являются алгебрами с полиномиальными тождествами, т. е. РІ-алгебрами (о РІ-алгебрах см. например, [4, 5, 3]). Все РІ-алгебры имеют не более чем полиномиальный рост. Рассмотрим семейство алгебр, которым соответствуют расширенные диаграммы Дынкина. Свойство таких алгебр быть РІ-алгебрами уже зависит от самих полиномов, а не только от их степеней. Пусть $S = S(P_1, \dots, P_N)$ задается равенством $S = \sum_{i=1}^N s_i$, где s_i есть среднее арифметическое корней полинома P_i с учетом их кратностей.

ГИПОТЕЗА 1. Алгебра $A_{P_1, \dots, P_N}$, для которой граф $\mathbb{G} = T_{\deg P_1, \dots, \deg P_N}$ есть расширенная диаграмма Дынкина, является РІ-алгеброй тогда и только тогда, когда $S(P_1, \dots, P_N) = 0$, причем если $\mathbb{G} = \tilde{D}_4$, то это $\mathbb{F}_4$ -алгебра, а в случае $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$ — соответственно $\mathbb{F}_6$ -, $\mathbb{F}_8$ - и $\mathbb{F}_{12}$ -алгебра.

Напомним, что $\mathbb{F}_n$ -алгеброй называется алгебра, в которой для произвольных элементов $y_1, \dots, y_n$ выполняется тождество $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n)} = 0$.

Для $\tilde{D}_4$ гипотеза 1 доказана в [6, 7]. Для $\tilde{E}_6$ при $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = (x-1)x(x+1)$ в работе [8] с помощью результатов из [9] показано, что A_{P_1, P_2, P_3} является $\mathbb{F}_6$ -алгеброй.

В §3 настоящей работы мы доказываем достаточность условия гипотезы (теорема 2), т. е. показываем, что для расширенных диаграмм Дынкина алгебры $A_{P_1, \dots, P_N}$ при $S = 0$ являются РІ-алгебрами.

Рассматриваемые алгебры тесно связаны с деформированными препроективными алгебрами, введенными в [10]. Пусть Q — некоторый колчан, а Q_0 и Q_1 — множества его вершин и стрелок соответственно. Рассмотрим удвоенный колчан $\bar{Q}$, полученный из Q добавлением для каждой стрелки $a: i \rightarrow j$, $a \in Q_1$, новой стрелки $a^*: j \rightarrow i$. Пусть $\lambda: Q_0 \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторая функция. Тогда деформированная препроективная алгебра есть

$$\Pi^\lambda(Q) = \mathbb{C}(\bar{Q}) / \left(\sum_{a \in Q_1} [a, a^*] - \sum_{i \in Q_0} \lambda(i) e_i \right),$$

где $\mathbb{C}(\bar{Q})$ — алгебра путей колчана $\bar{Q}$, а e_i — идемпотент, соответствующий вершине $i \in Q_0$. Препроективные алгебры $\Pi^0(Q)$ изучались многими авторами (см. [11] и приведенную там библиографию). Близкие алгебры ранее рассматривали в [12] И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев.

Пусть $\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{\deg P_i - 1}^i$ — корни полинома P_i . Ориентируем ребра графа $\mathbb{G}$ по направлению к центральной вершине и рассмотрим функцию λ на вершинах

этого графа, которая для i -й ветви определяется следующим образом:

$$\alpha_{\deg P_{i-2}}^i - \alpha_{\deg P_{i-1}}^i \quad \longrightarrow \quad \dots \quad \longrightarrow \quad \alpha_1^i - \alpha_2^i \quad \longrightarrow \quad \alpha_0^i - \alpha_1^i \quad \longrightarrow \quad -\sum_j \alpha_0^j$$

● —————> ● —————> ● —————> ● —————> ●
c

где $c \in G_0$ — центральная вершина.

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Алгебры $A_{P_1, \dots, P_N}$ и $e_c \Pi^\lambda(G) e_c$ изоморфны. Алгебра $A_{P_1, \dots, P_N}$ конечномерна тогда и только тогда, когда конечномерна алгебра $\Pi^\lambda(G)$. Если эти алгебры бесконечномерны, они имеют одинаковый порядок роста.*

Таким образом результаты данной работы о конечномерности и росте алгебр $A_{P_1, \dots, P_N}$ можно получить из работ [10] и [12], а наличие полиномиальных тождеств в $A_{P_1, \dots, P_N}$ — из [10], используя предложение 1. Однако наши методы отличны от методов указанных работ, теорема 1 содержит точные оценки размерностей алгебр для графов Дынкина и в теореме 2 утверждается конечномерность над центром алгебр $A_{P_1, \dots, P_N}$ при $S(P_1, \dots, P_N) = 0$ для расширенных диаграмм Дынкина.

Отметим, что алгебры, порожденные линейно связанными проекторами, представления которых рассматривались в работах [13, 14], являются частным случаем алгебр $A_{P_1, \dots, P_N}$. Кроме того, с помощью утверждения, аналогичного утверждению 1, можно установить связь алгебр $A_{P_1, \dots, P_N}$ с локально скалярными представлениями графов (см. [15]).

§1. Предварительные сведения

В этой работе мы рассматриваем алгебры с единицей над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_N \rangle$ — свободная алгебра, W — множество слов в алфавите $x_1, \dots, x_N$, и пусть $I = I(F_1, \dots, F_M)$ — идеал, порожденный элементами $F_1, \dots, F_M \in \mathcal{F}$. На множестве образующих зададим порядок $x_1 < \dots < x_N$. Ему соответствует градуированный лексикографический порядок на W : большим считается слово большей длины, а при равной длине то, у которого на первой различающейся позиции стоит большая образующая. Слово называется *нормальным*, если в алгебре $\mathcal{F}/I$ оно не является линейной комбинацией меньших слов. Нормальные слова образуют линейный базис в $\mathcal{F}/I$. Кроме того, нормальные слова длины $\leq k$ образуют базис в пространстве, порожденном словами длины $\leq k$.

Пусть $F(x_1, \dots, x_N)$ — некоторый полином. Его *главной частью* будем называть полином $\hat{F}(x_1, \dots, x_N)$, состоящий из мономов старшей степени полинома F . В дальнейшем нам понадобится

ЛЕММА 1. *Пусть $A = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_N \mid F_i(x_1, \dots, x_N) = 0, i = 1, \dots, M \rangle$ — некоторая конечно заданная алгебра. Тогда размерность (рост) алгебры $A^0 = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_N \mid \hat{F}_i(x_1, \dots, x_N) = 0, i = 1, \dots, M \rangle$ не меньше размерности (роста) алгебры A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если некоторое слово w не является нормальным в алгебре A^0 , то оно не является нормальным и в алгебре A .

Рассмотрим разложение

$$w = \sum_{v < w} C_v v \quad \text{в алгебре } A^0,$$

где C_v ($v \in W$) — некоторые комплексные коэффициенты. Значит, для некоторого набора комплексных чисел $(D_{v_1 v_2}^i)$

$$w = \sum_{v < w} C_v v + \sum_{i=1}^M \sum_{v_1, v_2 \in W} D_{v_1 v_2}^i v_1 \hat{F}_i v_2 \quad \text{в свободной алгебре } \mathcal{F}, \quad (1.1)$$

причем можно считать, что в последней сумме присутствуют лишь такие слагаемые, в которых порядок однородного полинома $v_1 \hat{F}_i v_2$ не превышает длины слова w . Действительно, из равенства (1.1) следует, что сумма всех других слагаемых равна нулю, так что их можно исключить. Значит,

$$w = \sum_{v < w} C_v v + \sum_{i=1}^M \sum_{v_1, v_2} D_{v_1 v_2}^i v_1 (\hat{F}_i - F_i) v_2 \quad \text{в алгебре } A, \quad (1.2)$$

и поскольку порядок полинома $\hat{F}_i - F_i$ меньше порядка однородного полинома $\hat{F}_i$ для каждого i , порядок каждого слагаемого в последней сумме меньше длины слова w . Тогда (1.2) и есть требуемое разложение. $\square$

Алгоритмы построения множества нормальных слов и вычисления порядка роста конечно заданной алгебры хорошо известны (см., например, [3]). *Базисом Грёбнера* идеала I называется множество $\text{Gr} \subset I$ элементов этого идеала, такое, что для всякого элемента $g \in I$ его старшее слово содержит в качестве подслова одно из старших слов элементов множества Gr . Базис Грёбнера Gr называется *минимальным*, если никакое его собственное подмножество не является базисом Грёбнера. Слово является нормальным в факторалгебре $\mathcal{F}/I$ тогда и только тогда, когда оно не содержит в качестве подслова старшего слова какого-нибудь элемента базиса Грёбнера. Существует алгоритм построения минимального базиса Грёбнера в идеале $I = I(F_1, \dots, F_M)$, исходя из элементов $F_1, \dots, F_M$. Этот алгоритм не обязательно заканчивает работу за конечное число шагов. Существует ли конечный базис Грёбнера, вообще говоря, зависит от исходного выбора порядка на образующих.

Если у нас есть конечный базис Грёбнера, то вычисление роста алгебры сводится к вычислению роста специального ориентированного графа. Вершинами *графа роста* алгебры являются все нормальные слова длины, меньшей на 1, чем максимальная длина старшего слова элементов в базисе Грёбнера. Ребро от слова w к слову v существует, если и только если для некоторых образующих x_i и x_j (возможно, совпадающих) слова $w x_i$ и $x_j v$ равны и нормальны.

§2. Размерность и рост алгебр

Зафиксируем набор степеней полиномов $k_1, \dots, k_N$, т. е. граф $\mathbb{G} = T_{k_1, \dots, k_N}$. Обозначим символом $\mathbb{M}_{\mathbb{G}}$ семейство всех алгебр $A_{P_1, \dots, P_N}$, где $\deg P_i = k_i$ для всех i .

ТАБЛИЦА 1. Конечномерные алгебры

D_n	$x_1^{n-2} = x_2^2 = x_3^2 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_2 x_1} + x_1 x_2 + x_1^2,$ $\underline{x_2^2},$ $\underline{x_1^{n-2}}$	$1, x_1, \dots, x_1^{n-3},$ $x_2, x_1 x_2, \dots, x_1^{n-3} x_2$	$2(n-2)$
E_6	$x_1^3 = x_2^3 = x_3^2 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_2^2} + x_2 x_1 + x_1 x_2 + x_1^2,$ $\underline{x_2 x_1 x_2} - x_1 x_2 x_1,$ $\underline{x_1^3},$ $\underline{x_2 x_1^2 x_2} + x_1 x_2 x_1^2 + x_1^2 x_2 x_1$	$1, x_1, x_2,$ $x_1^2, x_1 x_2, x_2 x_1,$ $x_1^2 x_2, x_1 x_2 x_1, x_2 x_1^2,$ $x_1 x_2 x_1^2, x_1^2 x_2 x_1,$ $x_1^2 x_2 x_1^2$	12
E_7	$x_1^4 = x_2^3 = x_3^2 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_2^2} + x_2 x_1 + x_1 x_2 + x_1^2,$ $\underline{x_2 x_1 x_2} - x_1 x_2 x_1 - x_1^3,$ $\underline{x_1^4},$ $\underline{x_2 x_1^2 x_2} + x_2 x_1^3 + \dots,$ $\underline{x_2 x_1^3 x_2 x_1} + \dots$	$1, x_1, x_2,$ $x_1^2, x_1 x_2, x_2 x_1,$ $x_1^3, x_1^2 x_2, \dots,$ $\dots$	24
E_8	$x_1^5 = x_2^3 = x_3^2 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_2^2} + x_2 x_1 + x_1 x_2 + x_1^2,$ $\underline{x_2 x_1 x_2} - x_1 x_2 x_1 - x_1^3,$ $\underline{x_1^5},$ $\underline{x_2 x_1^2 x_2} + x_2 x_1^3 + \dots,$ $\underline{x_2 x_1^3 x_2 x_1} + x_2 x_1^4 x_2 + \dots,$ $\underline{x_2 x_1^4 x_2 x_1^4} + \dots$	$1, x_1, x_2,$ $x_1^2, x_1 x_2, x_2 x_1,$ $x_1^3, x_1^2 x_2, \dots,$ $x_1^4, \dots,$ $\dots$	60

Обозначим через $A_{\mathbb{G}}^0 \in \mathbb{M}_{\mathbb{G}}$ алгебру с нильпотентными образующими, т. е.

$$A_{\mathbb{G}}^0 = \mathbb{C} \left\langle x_1, \dots, x_N \mid x_i^{k_i} = 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^N x_i = 0 \right\rangle.$$

Из леммы 1 следует, что размерность (рост) алгебры $A_{\mathbb{G}}^0$ не меньше размерности (роста) любой другой алгебры в многообразии $\mathbb{M}_{\mathbb{G}}$.

Если граф $\mathbb{G}$ является диаграммой Дынкина, алгебра $A_{\mathbb{G}}^0$ оказывается конечномерной. Действительно, в табл. 1 приведены базисы Грёбнера для алгебр $A_{\mathbb{G}}^0$, которым соответствуют диаграммы Дынкина $\mathbb{G}$. Нетрудно выписать линейные базисы в этих алгебрах как множества всех мономов, не содержащих старших слов элементов базиса Грёбнера в качестве подслов. В первой колонке указан граф $\mathbb{G}$, вторая содержит соотношения алгебры $A_{\mathbb{G}}^0$ и выбранный порядок на образующих, третья — базис Грёбнера (старшие слова подчеркнуты, отточие обозначает сумму меньших слов с некоторыми коэффициентами), четвертая — нормальные слова алгебры $A_{\mathbb{G}}^0$ (мы перечисляем не все, если этих слов достаточно много), в пятой колонке указано количество нормальных слов, т. е. размерность алгебры $A_{\mathbb{G}}^0$. Тривиальный случай — две линейно связанные образующие с заданными спектрами — мы не приводим. Ему соответствуют диаграммы серии A_n .

ТАБЛИЦА 2. Алгебры полиномиального роста

$\tilde{D}_4$	$x_1^2 = a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^2 = a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_4^2 = a_{41}x_4 + a_{40},$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$ $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$	$\frac{x_4}{x_1} + x_3 + x_2 + x_1,$ $\frac{x_1^2}{x_2} + \dots,$ $\frac{x_2^2}{x_3} + \dots,$ $\frac{x_3^2}{x_4} + \dots,$ $\frac{x_3x_2}{x_1} + \dots,$ $\frac{x_3x_1x_2}{x_4} + \dots$		$[n^2]$
$\tilde{E}_6$	$x_1^3 = a_{12}x_1^2 + a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^3 = a_{22}x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^3 = a_{32}x_3^2 + a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\frac{x_3}{x_1} + x_2 + x_1,$ $\frac{x_1^3}{x_2} + \dots,$ $\frac{x_2^3}{x_3} + \dots,$ $\frac{x_2^2x_1}{x_3} + x_2x_1x_2 + \dots,$ $\frac{x_2x_1x_2x_1^2}{x_3} + \dots$		$[n^2]$

В случае когда $\mathbb{G}$ — расширенная диаграмма Дынкина, оказалось, что главные части элементов базиса Грёбнера не зависят от коэффициентов полиномов $P_1, \dots, P_N$, т.е. одинаковы для всех алгебр, соответствующих данному графу. В табл. 2 и 3 приведены базисы Грёбнера и сосчитан рост алгебр, для которых граф $\mathbb{G}$ — расширенная диаграмма Дынкина. Здесь в первой колонке снова указан граф $\mathbb{G}$, вторая содержит соотношения алгебры (с неопределёнными коэффициентами) и выбранный порядок на образующих, третья — базис Грёбнера, четвертая — граф роста, а в пятой колонке указан порядок роста алгебр, соответствующих $\mathbb{G}$. Оказалось, что в случае всех расширенных диаграмм Дынкина граф роста содержит ровно два цикла, соединённых путем, а значит, его рост квадратичен [3].

Если граф некоторой алгебры не является ни диаграммой Дынкина, ни расширенной диаграммой Дынкина, он обязательно содержит один из следующих графов: $T_{2,2,2,2,2}$, $T_{3,2,2,2}$, $T_{4,3,3}$, $T_{5,4,2}$ или $T_{7,3,2}$. Для этих графов старшие слова базисов Грёбнера соответствующих алгебр снова не зависят от коэффициентов полиномов $P_1, \dots, P_N$. В табл. 4 мы указываем граф (первая колонка), соотношения соответствующих ему алгебр с неопределёнными коэффициентами и выбранный нами порядок на образующих (вторая колонка), базис Грёбнера (третья колонка) и два такие слова a и b , что все слова вида $a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \dots$ ($n_i, m_i \geq 0$) являются нормальными (последняя колонка). Тогда все алгебры, которым соответствуют перечисленные выше графы, содержат свободную подалгебру $\mathbb{C}\langle a, b \rangle$.

Пусть $K = \sum_{i=1}^N k_i$. Параметризуем семейство $\mathbb{M}_{\mathbb{G}}$ набором спектров образующих, т.е. вектору $a = (a_1, \dots, a_K) \in \mathbb{C}^K$ поставим в соответствие алгебру $AP_1, \dots, P_N$ с $P_1(x) = \prod_{i=1}^{k_1} (x - a_i)$, $P_2(x) = \prod_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} (x - a_i)$ и т.д.

ТАБЛИЦА 3. Алгебры полиномиального роста (продолжение табл. 2)

$\tilde{E}_7$	$x_1^4 = a_{13}x_1^3 + a_{12}x_1^2$ $+ a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^4 = a_{23}x_2^3 + a_{22}x_2^2$ $+ a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_3 + x_2 + x_1},$ $\underline{x_1^4} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + \dots,$ $\underline{x_2x_1x_2x_1}$ $+ x_2x_1^2x_2 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^2x_2x_1^3} + \dots$	$x_1^3x_2x_1x_2$ $\uparrow$ $x_2x_1^3x_2x_1 \longleftarrow x_1x_2x_1^3x_2$ $\downarrow$ $x_1^3x_2x_1^2 \longrightarrow x_1^2x_2x_1^3$ $\downarrow$ $x_1^2x_2x_1^2x_2 \longleftarrow x_2x_1^2x_2x_1^2$ $\downarrow$ $x_1x_2x_1^2x_2x_1$ $\swarrow$ $x_2x_1^2x_2x_1x_2$	$[n^2]$
$\tilde{E}_8$	$x_1^6 = a_{15}x_1^5 + a_{14}x_1^4$ $+ a_{13}x_1^3 + a_{12}x_1^2$ $+ a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^3 = a_{22}x_2^2$ $+ a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_3 + x_2 + x_1},$ $\underline{x_1^6} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + \dots,$ $\underline{x_2x_1x_2} + \dots,$ $\underline{x_2x_1^2x_2} + \dots,$ $\underline{x_2x_1^3x_2x_1}$ $+ x_2x_1^4x_2 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^4x_2x_1^5} + \dots$	$x_1^5x_2x_1^3x_2$ $\uparrow$ $x_2x_1^5x_2x_1^3 \longleftarrow x_1x_2x_1^5x_2x_1^2$ $\downarrow$ $x_1^5x_2x_1^4 \longrightarrow x_1^4x_2x_1^5$ $\downarrow$ $x_1^4x_2x_1^4x_2 \longrightarrow x_1^3x_2x_1^4x_2x_1$ $\uparrow$ $x_2x_1^4x_2x_1^4$ $\uparrow$ $x_1x_2x_1^4x_2x_1^3 \longrightarrow x_2x_1^4x_2x_1^3x_2$ $\downarrow$ $x_1^3x_2x_1^5x_2$ $\uparrow$ $x_1^2x_2x_1^5x_2x_1$	$[n^2]$

Теперь докажем теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathbb{G}$ — диаграмма Дынкина и $A = A_{P_1, \dots, P_N} \in \mathbb{M}_{\mathbb{G}}$. Тогда, как показано выше, алгебра $A_{\mathbb{G}}^0$ конечномерна. Пусть

ТАБЛИЦА 4. Алгебры экспоненциального роста

$T_{2,2,2,2,2}$	$x_1^2 = a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^2 = a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_4^2 = a_{41}x_4 + a_{40},$ $x_5^2 = a_{51}x_5 + a_{50},$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0;$ $x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_5} + x_4 + x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_1^2} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + \dots,$ $\underline{x_3^2} + \dots,$ $\underline{x_4^2} + \dots,$ $\underline{x_4x_3} + x_4x_2 + \dots,$ $\underline{x_4x_2x_3} + x_4x_1x_3 + \dots$	$a = x_1x_2,$ $b = x_1x_3$
$T_{3,2,2,2}$	$x_1^3 = a_{12}x_1^2 + a_{11}x_1 + a_{10},$ $x_2^2 = a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_4^2 = a_{41}x_4 + a_{40},$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$ $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_4} + x_3 + x_2 + x_1,$ $\underline{x_1^3} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + \dots,$ $\underline{x_3^2} + \dots,$ $\underline{x_3x_2} + x_3x_1 + \dots,$ $\underline{x_3x_1x_2} - x_2x_3x_1 + \dots$	$a = x_1x_2x_1,$ $b = x_1x_3x_1$
$T_{4,3,3}$	$x_1^4 = a_{13}x_1^3 + a_{12}x_1^2 + \dots,$ $x_2^3 = a_{22}x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_3} + x_2 + x_1,$ $\underline{x_1^4} + \dots,$ $\underline{x_2^3} + \dots,$ $\underline{x_2^2x_1} + x_2x_1x_2 + \dots,$ $\underline{x_2x_1x_2x_1^3} + \dots$	$a = x_1x_2,$ $b = x_1^2x_2$
$T_{5,4,2}$	$x_1^5 = a_{14}x_1^4 + a_{13}x_1^3 + \dots,$ $x_2^4 = a_{23}x_2^3 + a_{22}x_2^2 + \dots,$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_3} + x_2 + x_1,$ $\underline{x_1^5} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + x_2x_1 + \dots,$ $\underline{x_2x_1x_2x_1} + x_2x_1^2x_2 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^2x_2x_1^4} + \dots$	$a = x_1^2x_2,$ $b = x_1^3x_2$
$T_{7,3,2}$	$x_1^7 = a_{16}x_1^6 + a_{15}x_1^5 + \dots,$ $x_2^3 = a_{22}x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{20},$ $x_3^2 = a_{31}x_3 + a_{30},$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$ $x_3 > x_2 > x_1$	$\underline{x_3} + x_2 + x_1,$ $\underline{x_1^7} + \dots,$ $\underline{x_2^2} + x_2x_1 + \dots,$ $\underline{x_2x_1x_2} - x_1x_2x_1 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^2x_2} + x_2x_1^3 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^3x_2x_1} + x_2x_1^4x_2 + \dots,$ $\underline{x_2x_1^4x_2x_1^6} + \dots$	$a = x_1^4x_2,$ $b = x_1^5x_2$

$d^0 = \dim A_{\mathbb{C}}^0$. Значения d^0 указаны в табл. 1. Из леммы 1 следует, что $d := \dim A \leq d^0$. Допустим, что алгебра A ненулевая. Рассмотрим ее левое регулярное представление, и пусть комплексная матрица X_i соответствует умножению на x_i в алгебре A для $i = 1, \dots, N$. Пусть $a_1^i, \dots, a_{s_i}^i$ — корни полинома P_i без учета кратности ($s_i \leq \deg P_i$), и пусть d_j^i — кратность собственного числа a_j^i матрицы X_i ($j = 1, \dots, s_i$). Тогда $\text{tr } X_i = \sum_{j=1}^{s_i} a_j^i d_j^i$, и из равенства $\sum_{i=1}^N X_i = 0$ мы получаем равенство для следов $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{s_i} a_j^i d_j^i = 0$. Таким образом, вектор $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_{s_N}^N)$ ортогонален вектору $(d_1^1, d_2^1, \dots, d_{s_N}^N)$ в пространстве $\mathbb{C}^{\sum_{i=1}^N s_i}$.

Ясно, что вектор корней полиномов с учетом кратностей также ортогонален некоторому вектору с неотрицательными компонентами, сумма которых не превосходит d_0 . Поскольку для данного графа $\mathbb{G}$ существует лишь конечное множество таких векторов, то существует такое конечное число гиперплоскостей в пространстве параметров $\mathbb{C}^K$, вне которого соответствующие алгебры нулевые.

Для расширенных диаграмм Дынкина мы уже проверили утверждение теоремы, построив графы роста в соответствующих алгебрах (они приведены в табл. 2 и 3).

Третье утверждение теоремы докажем по индукции. Если граф $\mathbb{G}$ есть один из графов $T_{2,2,2,2,2}$, $T_{3,2,2,2}$, $T_{4,3,3}$, $T_{5,4,2}$ или $T_{7,3,2}$, то все алгебры семейства $\mathbb{M}_{\mathbb{G}}$ содержат свободную подалгебру с двумя образующими $\mathbb{C}\langle a, b \rangle$ (в табл. 4 указаны образующие a и b). Любой другой граф, не являющийся ни диаграммой Дынкина, ни расширенной диаграммой Дынкина, можно получить из этих графов, удлиняя и приклеивая ветки. Пусть $\mathbb{G} = T_{k_1, \dots, k_N}$ и $\mathbb{G}' = T_{k_1-1, k_2, \dots, k_N}$, если $k_1 > 2$, и $\mathbb{G}' = T_{k_2, \dots, k_N}$, если $k_2 = 2$. Пусть для $\mathbb{G}'$ утверждение уже доказано. Рассмотрим произвольную алгебру $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{G}}$,

$$A = A_{P_1, \dots, P_N} = \mathbb{C} \left\langle x_1, \dots, x_N \mid P_i(x_i) = 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^N x_i = 0 \right\rangle,$$

где $\deg P_i = k_i$ для $i = 1, \dots, N$. Пусть a — корень полинома P_1 и $Q(x) = P_1(x)/(x-a)$. Тогда факторалгебра $A' = A/\{Q(x_1) = 0\}$ принадлежит семейству $\mathbb{M}_{\mathbb{G}'}$. По предположению индукции A' содержит свободную подалгебру с двумя образующими. Тогда то же самое верно и для A , что и требовалось доказать. $\square$

§3. Центральные элементы и полиномиальные тождества

Рассмотрим семейство алгебр, которым соответствуют расширенные диаграммы Дынкина. Свойство таких алгебр быть PI-алгебрами зависит от самих полиномов, а не только от их степеней. Пусть $S = S(P_1, \dots, P_N)$ задается равенством $S = \sum_{i=1}^N s_i$, где s_i есть среднее арифметическое корней полинома P_i с учетом их кратностей.

Для случая диаграммы $\tilde{D}_4$ из работ [6, 7] следует, что при $S = 0$ алгебра A является $\mathbb{F}_4$ -алгеброй. Для $\tilde{E}_6$ в [8] с помощью описания *-представлений алгебры A_{P_1, P_2, P_3} из работы [9], показано, что при $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = (x-1)x(x+1)$ эта алгебра является $\mathbb{F}_6$ -алгеброй.

В этом параграфе мы доказываем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. Алгебра $A = A_{P_1, \dots, P_N}$, для которой граф $\mathbb{G}$ есть расширенная диаграмма Дынкина и $S = 0$, является конечно порожденным модулем над своим центром и, следовательно, алгеброй с полиномиальными тождествами.

Приведенное ниже доказательство теоремы исчерпывает случаи $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$. Для случая $\tilde{D}_4$ существует аналогичное доказательство, но мы его здесь не приводим.

Для начала заметим, что в случае $S = 0$ мы можем перейти к новой системе образующих $x'_i = x_i - s_i$, $i = 1, \dots, N$, где s_i — среднее арифметическое корней

полинома P_i . Тогда соотношения переписутся следующим образом:

$$P'_i(x'_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N x'_i = 0,$$

где у полиномов P'_i коэффициент при члене степени $\deg P'_i - 1$ уже равен нулю. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что у исходных полиномов P_i коэффициент при члене степени $\deg P_i - 1$ равен нулю. Также будем предполагать, что $\deg P_1 \geq \deg P_2 \geq \deg P_3$ (в случае расширенных диаграмм Дынкина $N = 3$). Это означает, что $(\deg P_1, \deg P_2, \deg P_3)$ — одна из троек $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$, $(6, 3, 2)$.

Сначала мы найдем два элемента z_1, z_2 из центра алгебры A . Оказывается, их будет достаточно для того, чтобы алгебра A была конечно порожденным модулем над $\mathbb{C}(z_1, z_2)$. Для нахождения элементов центра введем следующие обозначения. Пусть

$$\{v_1, \dots, v_n\} = \sum_{\pi \in S_n} v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(n)},$$

где $v_1, \dots, v_n$ принадлежат алгебре A , и пусть $\{v^k : w^l\}$ — сумма всевозможных слов из k букв v и l букв w . Если $P(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ — некоторый полином, то положим

$$P(v : w) = \sum_{i=1}^n p_i \{v^{i-1} : w\}.$$

ЛЕММА 2. *Если $v \in A$ и P — полином, аннулирующий v , то $P(v : w)$ коммутирует с v для любого $w \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскрывая скобки, можно убедиться, что

$$[P(v : w), v] = [w, P(v)] = 0. \quad \square$$

Теперь опишем процедуру построения элементов из центра. Пусть $L_0 \subset A$ — линейное пространство, состоящее из элементов, которые представляются в виде суммы двух элементов, из которых один является полиномом от x_1 , а другой коммутирует с x_2 . Когда будет определен первый элемент из центра, z_1 , то символом L_1 мы будем обозначать пространство элементов, которые представляются в виде суммы двух, из которых один — полином над $\mathbb{C}(z_1)$ от x_1 , а другой коммутирует с x_2 . Допустим теперь, что $P_1(x_1 : y_1)$ лежит в L_0 для некоторого $y_1 \in A$. Это значит, что из $P_1(x_1 : y_1)$ можно вычесть некоторый полином от x_1 и получить элемент из центра. Обозначим этот элемент символом z_1 . Теперь пусть $P_1(x_1 : y_2)$ лежит в L_1 для некоторого $y_2 \in A$. Аналогично, из $P_1(x_1 : y_2)$ можно вычесть полином от x_1 (только теперь над $\mathbb{C}(z_1)$) и получить второй элемент из центра, z_2 . Положим

$$y_1 = x_2,$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Элемент $P_1(x_1 : x_2)$ лежит в $L_0 = \mathbb{C}(x_1) + Z(x_2)$, где $Z(x_2)$ — пространство элементов, коммутирующих с x_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $P_1(x_1 : x_2)$ является линейной комбинацией элементов вида $\{x_1^k : x_2\}$ с $k \leq \deg P_1 - 1$, причем так как $P_1(x)$ не содержит $x^{\deg P_1 - 1}$, то в эту линейную комбинацию не входит элемент с $k = \deg P_1 - 2$.

Мы покажем, что каждый из элементов вида $\{x_1^k : x_2\}$, входящих в разложение элемента $P_1(x_1 : x_2)$, лежит в L_0 . Рассмотрим такие пары неотрицательных целых чисел (k, l) , что $\{x_1^k : x_2^l\}$ лежит в L_0 .

1. Если $k = 0$ или $l = 0$, то $\{x_1^k : x_2^l\}$ лежит в L_0 . Это непосредственно следует из определения.

2. $x_3^k \in L_0$ для любого k в случаях $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$ и для $k = 1, 3$ в случае $\tilde{E}_6$. Так как в случаях $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$ степень полинома P_3 равна двум, x_3^k является линейной комбинацией единицы и $x_3 = -x_1 - x_2$, которые лежат в L_0 . В случае $\tilde{E}_6$ это также верно для $k = 3$ и $k = 1$, так как P_3 — кубический полином без квадратов.

3. В случаях $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$ элемент $\{x_1 : x_2\}$ лежит в L_0 , так как

$$\{x_1 : x_2\} = x_3^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

4. $\{x_1 : x_2^k\} \in L_0$ для любого k в случае $\tilde{E}_8$, для $k = 0, 1, 3$ в случае $\tilde{E}_7$ и для $k = 0, 2$ в случае $\tilde{E}_6$. Для $\tilde{E}_8$ представим x_2^{k+1} как линейную комбинацию элементов x_2^2 , x_2 и e . Пусть

$$x_2^{k+1} - a_2 x_2^2 - a_1 x_2 - a_0 = 0, \quad \text{где } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Воспользовавшись леммой 2, получаем, что

$$\{x_1 : x_2^k\} - a_2 \{x_1 : x_2\} - a_1 x_1 \text{ коммутирует с } x_2,$$

и это завершает доказательство. В случаях $\tilde{E}_6$ и $\tilde{E}_7$ аналогичным образом нужно выразить x_2^3 через x_2 и e и x_2^4 через x_2^2 , x_2 и e , а затем воспользоваться такими же соображениями.

5. Для случаев $\tilde{E}_6$ и $\tilde{E}_8$ элемент $\{x_1^2 : x_2\}$ лежит в L_0 . Это следует из тождества

$$-x_3^3 = (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + \{x_1^2 : x_2\} + \{x_1 : x_2^2\} + x_2^3,$$

и из предыдущих пунктов. Для $\tilde{E}_6$ элемент $P_1(x_1 : x_2)$, являясь линейной комбинацией элементов $\{x_1^2 : x_2\}$ и $\{x_1^0 : x_2\}$, лежит в L_0 , и доказательство для этого случая завершено.

6. Для случаев $\tilde{E}_7$ и $\tilde{E}_8$ элемент $\{x_1^3 : x_2\}$ принадлежит L_0 . Можно воспользоваться тем, что

$$\begin{aligned} \{x_3^2, x_1^2 - x_2^2\} &= \{x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2\} + \{\{x_1, x_2\}, x_1^2 - x_2^2\} \\ &= 2x_1^4 - 2x_2^4 + \{x_1^3 : x_2\} - \{x_1 : x_2^3\}, \end{aligned}$$

причем так как x_3^2 кратен единице, левая часть принадлежит L_0 . Кроме того, x_1^4 , x_2^4 и $\{x_1 : x_2^3\}$ принадлежат L_0 . Значит, и $\{x_1^3 : x_2\}$ принадлежит L_0 . Для случая $\tilde{E}_7$ это завершает доказательство.

7. Осталось разобрать случай $\tilde{E}_8$ и доказать, что $\{x_1^5 : x_2\}$ принадлежит L_0 . Пусть $P_2(x) = x^3 - b_1 x - b_0$. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \{x_1^2 : x_2^4\} &= \{\{x_1^2 : x_2\}, x_2^3\} + (\{x_1 : x_2^2\})^2 \\ &= b_1 \{\{x_1^2 : x_2\}, x_2\} + 2b_0 \{x_1^2 : x_2\} + (\{x_1 : x_2^2\} - b_1 x_1 + b_1 x_1)^2. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $\{x_1 : x_2^2\} - b_1 x_1$ коммутирует с x_2 , получаем, что последнее выражение эквивалентно (mod L_0) выражению

$$b_1 (\{\{x_1^2 : x_2\}, x_2\} + \{\{x_1 : x_2^2\}, x_1\}) = 2b_1 \{x_1^2 : x_2^2\}.$$

Так как

$$x_3^4 = (x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + \{x_1^3 : x_2\} + \{x_1^2 : x_2^2\} + \{x_1 : x_2^3\} + x_2^4,$$

из того, что x_3^4 , x_1^4 , $\{x_1^3 : x_2\}$, $\{x_1 : x_2^3\}$ и x_2^4 лежат в L_0 , следует, что $\{x_1^2 : x_2^2\}$, а значит, и $\{x_1^2 : x_2^4\}$ лежат в L_0 .

Пусть $P_3(x) = x^2 - c_0$, т. е. $x_3^2 = c_0$. Рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \underline{\{x_2^2, x_2^2, \{x_1, x_2\}\}} &= 2\{x_1 : x_2^5\}, \\ \{x_2^2, x_2^2, x_2^2\} + \{x_2^2, x_2^2, \{x_1, x_2\}\} + \underline{\{x_2^2, x_2^2, x_1^2\}} &= \{x_2^2, x_2^2, x_3^2\} = 6c_0x_2^4, \\ \{x_2^2, x_2^2, x_1^2\} + \underline{\{x_2^2, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2\}\}} &= 2\{x_1^2 : x_2^4\}, \\ \{x_2^2, \{x_1, x_2\}, x_2^2\} + \{x_2^2, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2\}\} + \underline{\{x_2^2, \{x_1, x_2\}, x_1^2\}} \\ &= \{x_2^2, \{x_1, x_2\}, x_3^2\} = 3c_0\{x_2^2, \{x_1, x_2\}\} = 3c_0\{x_1 : x_2^3\}, \\ \{x_1^2, x_2^2, x_2^2\} + \{x_1^2, x_2^2, \{x_1, x_2\}\} + \underline{\{x_1^2, x_2^2, x_1^2\}} \\ &= \{x_1^2, x_2^2, x_3^2\} = 3c_0\{x_1^2, x_2^2\} = 3c_0(2c_0x_2^2 - 2x_2^4 - \{x_1 : x_2^3\}), \\ \{x_1^2, x_1^2, x_2^2\} + \underline{\{x_1^2, x_1^2, \{x_1, x_2\}\}} + \{x_1^2, x_1^2, x_1^2\} &= \{x_1^2, x_1^2, x_3^2\} = 6c_0x_1^4, \\ \{x_1^2, x_1^2, \{x_1, x_2\}\} &= \underline{2\{x_1^5 : x_2\}}. \end{aligned}$$

Используя эти равенства последовательно, получаем, что подчеркнутые выражения принадлежат L_0 . Это завершает доказательство для $\tilde{E}_8$. $\square$

Итак, пусть $P_1(x_1 : x_2) = Q_1(x_1) + z_1$, где Q_1 — некоторый полином, а z_1 коммутирует с x_2 . Тогда z_1 коммутирует с x_1 в силу леммы 2 и, значит, лежит в центре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Элемент $P_1(x_1 : y_2)$ лежит в $L_1 = \mathbb{C}(x_1, z_1) + Z(x_2)$, где $Z(x_2)$ — пространство элементов, коммутирующих с x_2 , а y_2 задано формулой*

$$y_2 = \begin{cases} x_2^2 & \text{для случая } \tilde{E}_6, \\ x_2x_1x_2 & \text{для случая } \tilde{E}_7, \\ x_2x_1^3x_2 & \text{для случая } \tilde{E}_8. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение эквивалентно тому, что $[P_1(x_1 : y_2), x_2]$ является линейной комбинацией элементов вида $[P_1(x_1 : x_2)^k x_1^l, x_2]$, так как $\mathbb{C}(x_1, z_1) = \mathbb{C}(x_1, P_1(x_1 : x_2))$, а $P_1(x_1 : x_2)^k x_1^l$ образуют базис в $\mathbb{C}(x_1, P_1(x_1 : x_2))$. Оказывается, требуемую линейную комбинацию можно составить из элементов $[P_1(x_1 : x_2)^k x_1^l, x_2]$ для $k = 0, 1$ и $l = 1, \dots, \deg P_1 - 1$. Мы проверили это утверждение с помощью написанной вторым автором программы для вычислений в конечно заданных алгебрах, которая основана на технике базисов Грёбнера. Эта программа доступна в Интернете по адресу <http://www.imath.kiev.ua/~mellit/groebner>. $\square$

Теперь $P_1(x_1 : y_2) = Q_2(x_1, z_1) + z_2$, где Q_2 — некоторый полином от двух переменных, а z_2 коммутирует с x_2 . Следовательно, z_2 лежит в центре. Рассмотрим подалгебру $B = \mathbb{C}(z_1, z_2)$, лежащую в центре алгебры A . Справедливо следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Алгебра A является конечно порожденным модулем над B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на словах из букв x_1, x_2, x_3 порядок, заданный в §1. Назовем слово w нормальным относительно B , если оно не является линейной комбинацией над B слов, строго меньших w . Можно доказать следующие свойства нормальных относительно B слов:

- (1) нормальные слова над B порождают A как B -модуль;
- (2) любое подслово нормального относительно B слова также нормально относительно B ;
- (3) множество нормальных относительно B слов содержится в множестве нормальных слов (см. §1).

Докажем, что нормальных относительно B слов не может быть бесконечно много. Рассмотрим равенства

$$P_1(x_1 : x_2) = Q_1(x_1) + z_1, \quad P_1(x_1 : y_2) = Q_2(x_1, z_1) + z_2. \quad (3.1)$$

Так как $P_1(x_1) = 0$, мы можем преобразовать $Q_1(x_1)$ и $Q_2(x_1, z_1)$ так, чтобы их степень как полиномов от переменной x_1 была меньше степени полинома P_1 . Найдем старшие слова элементов $P_1(x_1 : x_2)$ и $P_1(x_1 : y_2)$, оставшиеся после редукции с помощью базиса Грёбнера, приведенного в табл. 2 и 3. Отточиями мы обозначаем младшие слова, если они не повлияют на дальнейшие выкладки. Старшие слова подчеркнуты. Имеется 3 случая:

- (1) Случай $\tilde{E}_6$:

$$P_1(x_1 : x_2) = \underline{x_2 x_1^2} + \dots$$

Здесь старшее слово уже нормально и поэтому редукции не требуется. Далее,

$$P_1(x_1 : y_2) = P_1(x_1 : x_2^2) = x_2^2 x_1^2 + x_1 x_2^2 x_1 + \dots$$

Мы применяем редукцию относительно элемента базиса Грёбнера

$$x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + \dots$$

и получаем, что элемент $P_1(x_1 : y_2)$ эквивалентен следующему:

$$(x_2^2 x_1^2 + x_1 x_2^2 x_1 + \dots) - (x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + \dots) x_1 = (x_1 x_2^2 x_1 + \dots) - (x_2 x_1 x_2 x_1 + \dots).$$

Так как все слова в выражении $x_1 x_2^2 x_1 + \dots$ меньше $x_2 x_1 x_2 x_1$, это выражение можно отбросить, и получается, что старшим словом в результате оказывается $x_2 x_1 x_2 x_1$ с коэффициентом -1 . Аналогично разбираются остальные случаи.

- (2) Случай $\tilde{E}_7$:

$$P_1(x_1 : x_2) = \underline{x_2 x_1^3} + \dots,$$

$$P_1(x_1 : y_2) = P_1(x_1 : x_2 x_1 x_2) = x_2 x_1 x_2 x_1^3 + x_1 x_2 x_1 x_2 x_1^2 + \dots = \underline{-x_2 x_1^2 x_2 x_1^2} + \dots$$

- (3) Случай $\tilde{E}_8$:

$$P_1(x_1 : x_2) = \underline{x_2 x_1^5} + \dots,$$

$$P_1(x_1 : y_2) = P_1(x_1 : x_2 x_1^3 x_2) = x_2 x_1^3 x_2 x_1^5 + x_1 x_2 x_1^3 x_2 x_1^4 + \dots = \underline{-x_2 x_1^4 x_2 x_1^4} + \dots$$

Заметим, что найденные старшие слова выражаются с помощью формул (3.1) через меньшие слова с коэффициентами из B , так как степени $Q_1(x_1)$ и $Q_2(x_1, z_1)$ как полиномов от x_1 над B меньше длин найденных старших слов в каждом из трех случаев. Это значит, что эти слова не являются нормальными относительно B . Рассмотрим графы роста алгебры A , приведенные в табл. 2 и 3. Следующие слова не являются нормальными относительно B :

- (1) $x_2x_1^2x_2, x_1x_2x_1^2, x_2x_1x_2x_1$ для $\tilde{E}_6$,
- (2) $x_2x_1^3x_2x_1, x_1x_2x_1^3x_2, x_1^2x_2x_1^3, x_2x_1^2x_2x_1^3$ для $\tilde{E}_7$,
- (3) $x_2x_1^5x_2x_1^3, x_1x_2x_1^5x_2x_1^2, x_1^2x_2x_1^5x_2x_1, x_1^3x_2x_1^5x_2, x_1^4x_2x_1^5, x_2x_1^4x_2x_1^4$ для $\tilde{E}_8$.

Значит, если мы вычеркнем эти слова из графа роста, то оставшиеся пути будут исчерпывать все достаточно длинные нормальные относительно B слова. Из того, что количество оставшихся путей конечно, следует конечность множества нормальных относительно B слов, а значит, и тот факт, что алгебра A является конечно порожденной как модуль над B . $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fulton W.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37**, No. 3, 209–249 (2000).
2. *Klyachko A. A.* Stable bundles, representation theory and Hermitian operators. *Selecta Math.*, **4**, 419–445 (1998).
3. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 57, 1990, с. 5–177.
4. *Rowen L. H.* Ring theory. Academic Press, 1991.
5. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. Мир, М., 1986.
6. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О тождествах в алгебрах $Q_{n,\lambda}$, порожденных идемпотентами. *Укр. матем. ж.*, **53**, №10, 1380–1390 (2001).
7. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О тождествах в алгебрах, порожденных линейно связанными идемпотентами. *Укр. матем. ж.*, **56**, №6, 782–795 (2004).
8. *Strelets A. V.* On identities in the algebra generated by three partial reflections sum of which is zero. *Methods Funct. Anal. Topol.*, **10**, No. 2, 86–90 (2004).
9. *Меллит А. С.* Когда сумма трех частичных отражений равна нулю. *Укр. матем. ж.*, **55**, №9, 1277–1283 (2003).
10. *Crawley-Boevey W., Holland M. P.* Noncommutative deformations of Kleinian singularities. *Duke Math. J.*, **92**, No. 3, 605–635 (1998).
11. *Ringel C. M.* The preprojective algebra of a quiver. In: *Algebras and modules, II*, CMS Conf. Proc., Vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 467–480.
12. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Модельные алгебры и представления графов. *Функц. анализ и его прил.*, **13**, вып. 3, 1–12 (1979).
13. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице. *Функц. анализ и его прил.*, **34**, вып. 4, 91–93 (2000).
14. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов. *Функц. анализ и его прил.*, **36**, вып. 3, 20–35 (2002).
15. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств. Препринт Института математики НАН Украины, 2003.4, 2003.

Институт математики НАН Украины,
e-mail: mariyka@imath.kiev.ua

Институт математики НАН Украины,
e-mail: mellit@imath.kiev.ua

Институт математики НАН Украины,
e-mail: yurii_sam@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
12 февраля 2003 г.