Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский, О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 37–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:20:58

УДК 517.988.67

О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации*

© 2005. А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский

§1. Введение

В настоящей работе предложен метод исследования асимптотически линейных векторных полей с параметром, позволяющий доказывать теоремы об асимптотических точках бифуркации (точках бифуркации на бесконечности) в случае двукратного вырождения главной линейной части. Выделен класс полей, имеющих более двух неограниченных ветвей особых точек в окрестности точки бифуркации.

Бифуркации на бесконечности были введены М. А. Красносельским. В [1] предложен принцип смены индекса и ставшие классическими теоремы о точках бифуркации на бесконечности и в нуле, порожденных собственными значениями нечетной кратности линеаризованных задач.

Изучение собственных значений четной кратности существенно сложнее. Информация о главной линейной части задачи не дает ответа на вопрос, является ли четнократное собственное значение точкой бифуркации; необходимо использовать свойства нелинейностей. Например, для градиентных полей кратность собственного значения роли не играет. Этот факт установлен в [1] для бифуркаций в нуле; в [2] предложены аналоги на бесконечности.

В этой статье используется асимптотическая однородность нелинейностей (см. [3]) и специальное свойство согласованности нелинейностей и главной линейной части. Для асимптотически линейных полей с асимптотически однородными нелинейностями сформулированы условия, при которых двукратное собственное значение линейной части является точкой бифуркации на бесконечности, и предложены оценки числа неограниченных ветвей особых точек.

В следующем параграфе формулируются основные определения и абстрактные результаты. Далее рассматриваются приложения к различным краевым задачам. Наиболее просты приложения к 2π -периодической задаче для уравнения $x'' + \lambda^2 x = b(t) + f(x)$ (разд. 3.1). Здесь линеаризованная на бесконечности задача имеет двукратное вырождение при целых $\lambda = m \neq 0$; указаны оценки снизу числа неограниченных ветвей решений при $\lambda \rightarrow m$. В разд. 3.2 рассмотрены субгармоники (периодические решения кратного периода) и предложены оценки числа неограниченных ветвей $2n\pi$ -периодических решений при $\lambda \rightarrow m/n$. В разд. 3.3 приведены обобщения для уравнений, возникающих в теории управления. Бифуркации периодических решений векторных систем изучаются в §4. В §5 сформулированы приложения к двумерной двухточечной краевой задаче.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 01-01-00146, 03-01-00258), Фондом содействия отечественной науке, Enterprise Ireland (грант SC/2003/376)) и грантами НШ-1532.2003.1 и МД-87.2003.01.

Часть приведенных приложений имеет градиентный вид. Для них новизна полученных результатов заключается в оценке числа возникающих ветвей решений. Однако основные результаты сохраняются при малых неградиентных возмущениях задач. В изучаемых ситуациях смены индекса не происходит.

Предлагаемые теоремы основаны на новом методе выделения главных членов уравнений разветвления в задаче о бифуркациях на бесконечности.

§2. Основные результаты

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ зависящее от скалярного параметра λ векторное поле $x - T(x, \lambda)$. Пусть нелинейный оператор $T(x, \lambda)$ вполне непрерывен по совокупности переменных $x \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \Lambda = [\lambda_-, \lambda_+] \subset \mathbb{R}$ и асимптотически линеен (дифференцируем на бесконечности) по переменной x , т. е. верно равенство

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty} \|x\|_{\mathbb{H}}^{-1} \|T(x, \lambda) - T'_{\infty}(\lambda)x\|_{\mathbb{H}} = 0,$$

где линейный оператор $T'_{\infty}(\lambda)$ также вполне непрерывен (см., например, [4]).

В дальнейшем мы ограничимся классической ситуацией, когда $T'_{\infty}(\lambda) = \lambda A$ при некотором A и $T(x, \lambda) = \lambda Ax + F(Ax, \lambda)$. Такие поля (или эквивалентные им поля $\lambda Ax + AF(x, \lambda)$) возникают при исследовании квазилинейных краевых задач. Рассмотрим уравнение

$$x = \lambda Ax + F(Ax, \lambda); \quad (1)$$

пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех его решений¹⁾ $(x, \lambda) \in \mathbb{H} \times \Lambda$. Значение λ_0 параметра назовем *асимптотической точкой бифуркации*, если для любой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 множество $\mathfrak{F} = \{(x, \lambda) \in \mathfrak{M} : \lambda \in U(\lambda_0)\} \subset \mathbb{H} \times \Lambda$ неограничено. Как известно, каждая асимптотическая точка бифуркации — это характеристическое значение²⁾ линейного вполне непрерывного оператора A .

Положим $Z_{\rho} = \{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < \rho, \lambda \in \Lambda\}$. Следуя [1, 4], назовем множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *неограниченной непрерывной ветвью решений* уравнения (1), если при любом достаточно большом $\rho > 0$ на границе каждого содержащего цилиндр Z_{ρ} ограниченного множества $\Gamma \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ есть хотя бы одна точка $(x, \lambda) \in \mathfrak{N} \setminus Z_{\rho}$. Если $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — единственное характеристическое значение оператора A на промежутке Λ , то

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{(x, \lambda) \in \mathfrak{N} \setminus Z_{\rho}} |\lambda - \lambda_0| = 0 \quad (2)$$

и потому λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Ветвь $\mathfrak{N}$ назовем *направленной при $\lambda \rightarrow \lambda_0$* , если верно соотношение (2) и существует предел

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{(x, \lambda) \in \mathfrak{N} \setminus Z_{\rho}} \|x/\|x\|_{\mathbb{H}} - e\|_{\mathbb{H}} = 0;$$

вектор e назовем *предельным* для $\mathfrak{N}$. Направленная неограниченная непрерывная ветвь может не быть непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$.

¹⁾ Будем называть решениями уравнения (1) и векторы $x \in \mathbb{H}$, и пары $(x, \lambda) \in \mathbb{H} \times \Lambda$; из контекста всегда ясно, о чем идет речь.

²⁾ То есть величина, обратная собственному значению.

Ниже предполагается, что A — вполне непрерывный самосопряженный оператор и $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — его ненулевое характеристическое значение кратности 2. Предлагаются достаточные условия, при которых λ_0 является асимптотической точкой бифуркации, и оценки числа направленных неограниченных ветвей решений уравнения (1) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

2.2. Асимптотически однородные нелинейности. Основные предположения о нелинейности $F(x, \lambda)$ состоят в ее асимптотической однородности и специальной согласованности с линейным оператором A . В 1969 г. Лазер и Лич первыми рассмотрели вырожденные в линейном приближении уравнения с асимптотически однородными нелинейностями [5]; эти нелинейности имеют на бесконечности следующий за линейным порядок.

Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ непрерывно вложено в $\mathbb{H}$ и оператор $F: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$ непрерывен и равномерно ограничен, т.е. $\sup_{x \in \mathbb{B}} \|F(x)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Пусть $\mathbb{E}$ — конечномерное подпространство пространства $\mathbb{H}$, $S = \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{H}} = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{E}$, и пусть $\mathbb{E} \subset \mathbb{B}$. Оператор F назовем *асимптотически однородным*, если определен такой непрерывный оператор $\Psi: S \rightarrow \mathbb{H}$, что при любом $c > 0$ и любом $y \in \mathbb{B}$ справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{u \in S; h \in \mathbb{B}, \|h\|_{\mathbb{B}} \leq c} |\langle y, F(ru + h) - \Psi(u) \rangle| = 0, \quad (3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$, порождающее норму $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$. Оператор Ψ будем называть *асимптотическим пределом* оператора F . Тривиальный пример асимптотически однородного оператора — это $F(x) \equiv F_0$; сумма асимптотически однородных операторов асимптотически однородна.

Везде далее $\mathbb{E}$ — двумерное собственное подпространство оператора A , определяемое равенством $x = \lambda_0 Ax$. В приложениях используются следующие асимптотически однородные операторы.

ПРИМЕР 2.2.1 [6]. Пусть скалярная функция $f(x)$ непрерывна и

$$f(x) \rightarrow f_+ \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad f(x) \rightarrow f_- \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad f_+ \neq f_-. \quad (4)$$

Пусть скалярная функция $f_1(x)$ непрерывна, ограничена и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f_1(s) ds = 0. \quad (5)$$

Пусть $\mathbb{E}$ состоит из функций $u \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\text{mes}\{t : u'(t) = 0\} = 0$. Тогда оператор F суперпозиции $x(t) \mapsto \phi(x(t))$, порожденный функцией $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, асимптотически однороден: равенство (3) выполнено при $\mathbb{H} = L^2([a, b], \mathbb{R})$, $\mathbb{B} = C^1([a, b], \mathbb{R})$ и операторе Ψ суперпозиции, порожденном разрывной функцией $(f_+ + f_- + (f_+ - f_-) \text{sgn } x)/2$. Непрерывность оператора Ψ вытекает из условия $\text{mes}\{t : u'(t) = 0\} = 0$. В доказательствах существенно используется скалярность рассматриваемых функций; заменить C^1 на C нельзя.

ПРИМЕР 2.2.2. Пусть $\mathcal{S}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Пусть непрерывные ограниченные функции $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi: [a, b] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \max_{x \in \mathcal{S}, t \in [a, b]} \|f(t, rx) - \psi(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

т. е. ψ — это радиальный предел функции f на бесконечности. Пусть $\mathbb{E} \subset L^2 = L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ и для всех функций $u(t) \in \mathbb{E}$ верно соотношение $\text{mes}\{t : u(t) = 0\} = 0$. Тогда оператор $F(x(t)) = f(t, x(t))$ асимптотически однороден при $\mathbb{H} = \mathbb{B} = L^2$ и его асимптотический предел равен $\Psi(u(t)) = \psi(t, u(t))$.

Функции с радиальными пределами — это векторный аналог функций f , удовлетворяющих условиям (4) (при $n = 1$ сфера $\mathcal{S}$ вырождается в две точки). Метод, используемый в [6] при анализе операторов суперпозиции, порожденных скалярными функциями $f(x)$, напрямую не применим к векторным ситуациям с осциллирующими на бесконечности слагаемыми, удовлетворяющими аналогам соотношения (5). Было бы интересно установить классы функций $f(x, y)$, порождающих асимптотически однородные операторы суперпозиции в пространствах вектор-функций, но не имеющих радиальных пределов.

2.3. Предположения о согласованности. Пусть оператор $F(x, \lambda)$ со значениями в $\mathbb{H}$ непрерывен по совокупности переменных $x \in \mathbb{B}$, $\lambda \in \Lambda$ и равномерно ограничен: $\sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Пусть самосопряженный в $\mathbb{H}$ оператор A действует из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}$ и вполне непрерывен. Операторы A и $F(x, \lambda)$ назовем *согласованными*, если определен действующий из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{H}$ линейный непрерывный оператор D , удовлетворяющий следующим предположениям:

- (i) оператор D кососимметричен и коммутирует с A на пространстве $\mathbb{B}$, т. е. $\langle Dx, x \rangle = 0$ и $DAx = ADx$ при всех $x \in \mathbb{B}$;
- (ii) при всех $x \in \mathbb{B}$ и всех $\lambda \in \Lambda$ справедливо равенство $\langle Dx, F(x, \lambda) \rangle = 0$.

Из предположения (i) следует, что все собственные подпространства оператора A , отвечающие его ненулевым собственным значениям, инвариантны относительно оператора D . Всякое такое подпространство представимо в виде прямой суммы конечного числа ортогональных инвариантных относительно оператора D плоскостей, в каждой из которых D является композицией поворота на угол $\pi/2$ и растяжения с положительным коэффициентом (для каждой плоскости — своим), и ортогонального этим плоскостям подпространства (возможно, нульмерного), где D обращается в нуль. Отсюда вытекает справедливость при всех $x \in \mathbb{H}$ равенства $\langle DAx, x \rangle = 0$, т. е. кососимметричность оператора DA на $\mathbb{H}$. Более того, аналогичное соотношение $\langle DM(A)x, x \rangle = 0$ верно для функций $M(\cdot)$ от оператора A .

Рассмотрим примеры. Всюду периодические функции отождествляются со своими сужениями на период.

ПРИМЕР 2.3.1. Пусть $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ и $\mathbb{B}$ — подпространство всех удовлетворяющих условию $x(0) = x(2\pi)$ функций $x(t)$ из пространства $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Пусть A — оператор, обратный к дифференциальному оператору $d^2/dt^2 + \alpha^2$ с нецелым вещественным α при 2π -периодических краевых условиях. Пусть F — оператор суперпозиции, порожденный непрерывной ограниченной функцией $f(x, \lambda)$. Тогда операторы A и F согласованы, причем $D = d/dt$.

ПРИМЕР 2.3.2. Пусть $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{B}$ — подпространство всех удовлетворяющих условию $x(0) = x(2\pi)$ вектор-функций $x(t)$ из пространства $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$. Пусть собственные значения симметрической квадратной матрицы $\mathcal{A}$ порядка n не являются квадратами целых чисел. Обозначим через A линейный оператор, обратный к дифференциальному оператору $x'' + \mathcal{A}x$ с 2π -периодическими краевыми условиями. Положим $D = d/dt$. Если $F(x(t)) =$

$f(x(t), x'(t))$, непрерывная ограниченная вектор-функция f имеет вид

$$f(x, y) = \nabla g(x) + f_1(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

и для непрерывной вектор-функции f_1 верно тождество $(y, f_1(x, y))_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$, то выполнены все условия согласованности операторов A и F .

ПРИМЕР 2.3.3. Положим $\mathbb{H} = \mathbb{B} = L^2([0, \pi], \mathbb{R}^2)$. Пусть A — оператор, обратный к дифференциальному оператору d^2/dt^2 при краевых условиях Дирихле $x(0) = x(\pi) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Пусть оператор суперпозиции F_1 порожден непрерывной ограниченной вектор-функцией $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, для компонент которой при всех $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ верно тождество

$$x_2 f_1(x_1, x_2) \equiv x_1 f_2(x_1, x_2). \quad (7)$$

Тогда операторы A и F_1 согласованы; здесь D — оператор, переводящий функцию $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ в функцию $(-x_2(t), x_1(t))$. Отметим неградиентность нелинейностей в этом и предыдущем примерах.

2.4. Основная теорема. Предположим, что на инвариантной относительно D и A плоскости $\mathbb{E} = \{x : x = \lambda_0 A x\} \subset \mathbb{H}$ оператор D ненулевой. Зададимся вектором $v_0 \in \mathbb{E}$, $\|v_0\|_{\mathbb{H}} = 1$, и положим $\xi = \|Dv_0\|_{\mathbb{H}}$. В силу кососимметричности оператора D векторы v_0 и Dv_0 образуют ортогональный базис в $\mathbb{E}$; равенство $v_\varphi = v_0 \cos \varphi + \xi^{-1} Dv_0 \sin \varphi$ параметризует единичную окружность $S \subset \mathbb{E}$.

Будем отождествлять заданные на S непрерывные скалярные функции $\chi(v_\varphi)$ с 2π -периодическими непрерывными функциями $\tilde{\chi}(\varphi) = \chi(v_\varphi)$ вещественной переменной φ . Изолированный нуль φ_0 функции $\tilde{\chi}(\varphi)$ (и изолированный нуль v_{φ_0} функции $\chi(v_\varphi)$) назовем *правильным*, если в достаточно малой окрестности точки φ_0 функция $\tilde{\chi}(\varphi)$ имеет разные знаки при $\varphi < \varphi_0$ и при $\varphi > \varphi_0$; простейшее условие правильности нуля — это то, что производная $\tilde{\chi}'(\varphi_0)$ существует и отлична от нуля.

Обозначим через $\mathbb{E}^\perp$ ортогональное дополнение к плоскости $\mathbb{E}$ в пространстве $\mathbb{H}$, а через P и Q — ортогональные проекторы на $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^\perp$. Так как $\mathbb{E}$ — это плоскость, инвариантная относительно кососимметрического на $\mathbb{H}$ оператора DA , то $\mathbb{E}^\perp$ инвариантно относительно DA . Поэтому при каждом $b \in \mathbb{E}^\perp$ верно включение $DAb \in \mathbb{E}^\perp$ и по альтернативе Фредгольма линейное неоднородное уравнение $x = \lambda_0 Ax + DAb$ имеет двумерное множество решений; ровно одно из них принадлежит $\mathbb{E}^\perp$ — это $x = DA(I - \lambda_0 AQ)^{-1}b$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F(x, \lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$, операторы A и $F_1(x, \lambda)$ согласованы, оператор $F_1(x, \lambda_0)$ асимптотически однороден, его асимптотический предел равен $\Psi_1(u)$ и справедливы представления

$$F_0(\lambda) = F_0(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G_0(\lambda), \quad F_1(x, \lambda) = F_1(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G_1(x, \lambda), \quad (8)$$

где операторы $G_0 : \Lambda \rightarrow \mathbb{H}$, $G_1 : \mathbb{B} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{H}$ непрерывны и равномерно ограничены. Пусть $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^\perp$. Пусть функция

$$\chi(v_\varphi) = \langle DA(I - \lambda_0 AQ)^{-1}F_0(\lambda_0) + \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda_0) \rangle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle \quad (9)$$

имеет $K > 0$ правильных нулей $v_{\varphi_1}, \dots, v_{\varphi_K}$ на окружности S . Тогда у уравнения (1) есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j} , $j = 1, \dots, K$.

В условиях теоремы 1 число неограниченных непрерывных ветвей решений может быть произвольно большим (см. пример в разд. 3.1).

2.5. Близкие теоремы и замечания. Теоремы этого раздела приводятся без доказательства. Доказательства могут быть получены простыми модификациями приводимого в разд. 2.6 доказательства теоремы 1.

2.5.1. Будем говорить, что непрерывный равномерно ограниченный оператор $F(x, \lambda)$ асимптотически однороден по x , если он асимптотически однороден при каждом λ , асимптотический предел $\Psi(u, \lambda)$ непрерывен по совокупности переменных $u \in S$, $\lambda \in \Lambda$ и выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda; u \in S; h \in \mathbb{B}, \|h\|_{\mathbb{B}} \leq c} |\langle y, F(ru + h, \lambda) - \Psi(u, \lambda) \rangle| = 0,$$

аналогичное равенству (3), причем предел равномерен по λ при любых $c > 0$ и $y \in \mathbb{B}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(x, \lambda) = F_0(x, \lambda) + F_1(x, \lambda)$, операторы A и $F_1(x, \lambda)$ согласованы, оператор $F_0(x, \lambda)$ асимптотически однороден по x и его асимптотический предел равен $\Psi(u, \lambda)$. Пусть функция $\eta(v_\varphi) = \langle Dv_\varphi, \Psi(v_\varphi, \lambda_0) \rangle$ имеет $K > 0$ правильных нулей $v_{\varphi_1}, \dots, v_{\varphi_K}$ на окружности S . Тогда у уравнения (1) есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j} , $j = 1, \dots, K$.

В частности, пусть $F(x, \lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$, где оператор $F_1(x, \lambda)$ согласован с A . Тогда $\eta(v_\varphi) = \langle Dv_\varphi, F_0(\lambda_0) \rangle$. При $F_0(\lambda_0) \notin \mathbb{E}^\perp$ эта функция имеет два правильных нуля $\pm PF_0(\lambda_0)/\|PF_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{H}}$ на окружности S и по теореме 2 у уравнения (1) есть две направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Такая ситуация хорошо известна, например, в задачах о вынужденных колебаниях. Если $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^\perp$ (как в теореме 1), то $\eta \equiv 0$ и теорема 2 оказывается неприменимой, т.е. теоремы 1 и 2 дополняют друг друга. Отметим, что в теореме 1 дополнительно предполагается асимптотическая однородность оператора $F_1(x, \lambda_0)$ и справедливость представлений (8).

Если оператор $F(x, \lambda)$ асимптотически однороден и слагаемое F_1 отсутствует, то аналогии теоремы 2 справедливы без предположений о самосопряженности оператора A и существовании оператора D , удовлетворяющего условию (i). Пусть e, g — ортонормированный базис в плоскости $\mathbb{E}$. Обозначим через e^* и g^* собственные векторы сопряженного к A оператора A^* , отвечающие его характеристическому значению λ_0 и определяемые равенствами $\langle e^*, e \rangle = \langle g^*, g \rangle = 1$, $\langle e^*, g \rangle = \langle g^*, e \rangle = 0$. Тогда каждый правильный нуль $v_{\varphi_j} \in S$ функции $\eta(v_\varphi) = \langle g^* \cos \varphi - e^* \sin \varphi, \Psi(v_\varphi, \lambda_0) \rangle$ определяет направленную неограниченную непрерывную ветвь решений уравнения (1) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельным вектором v_{φ_j} ; здесь $\Psi(u, \lambda)$ — асимптотический предел оператора $F(x, \lambda)$. Близкие факты верны для уравнений (1) в банаховых пространствах.

2.5.2. Приведем аналог теоремы 1, не использующий представлений (8).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F(x, \lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$, операторы A и $F_1(x, \lambda)$ согласованы, оператор $F_1(x, \lambda)$ асимптотически однороден по x и его асимптотический предел равен $\Psi_1(u, \lambda)$. Пусть $F_0(\lambda) \in \mathbb{E}^\perp$ при всех λ . Пусть функция

$$\chi(v_\varphi) = \langle DA(I - \lambda_0 A Q)^{-1} F_0(\lambda_0), \Psi_1(v_\varphi, \lambda_0) \rangle \quad (10)$$

имеет $K > 0$ правильных нулей $v_{\varphi_1}, \dots, v_{\varphi_K}$ на окружности S . Тогда у уравнения (1) есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j} , $j = 1, \dots, K$.

При $F(x, \lambda) \equiv F(x, \lambda_0)$ теоремы 1 и 3 совпадают.

2.5.3. Будем говорить, что неограниченная непрерывная ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda > \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus Z_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_0, \lambda_+)$ при достаточно больших ρ . Аналогично, ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus Z_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_-, \lambda_0)$.

Пусть либо $\|F(x, \lambda) - F(x, \lambda_0)\|_{\mathbb{H}} \leq c|\lambda - \lambda_0|$ и оператор $F(x, \lambda_0)$ асимптотически однороден, либо оператор $F(x, \lambda)$ асимптотически однороден по x при всех $\lambda \in \Lambda$. Например, это верно в условиях теорем 1 и 3. Положим $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi(v_\varphi) \rangle$, где $\Psi(u)$ — асимптотический предел оператора $F(x, \lambda_0)$. Пусть $\mathfrak{N}$ — направленная неограниченная непрерывная ветвь решений уравнения (1) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельным вектором e , для которого $\omega(e) \neq 0$. Тогда ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\omega(e) > 0$, и при $\lambda > \lambda_0$, если $\omega(e) < 0$.

Функция ω определяется равенством $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle$ в теореме 1 и равенством $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi, \lambda_0) \rangle$ в теореме 3. В приложениях этих теорем к задачам о периодических решениях дифференциальных уравнений $\omega \equiv \text{const}$ и либо все направленные неограниченные непрерывные ветви определены при $\lambda > \lambda_0$, либо все они определены при $\lambda < \lambda_0$.

2.5.4. Вместо уравнения (1) в условиях теоремы 1 рассмотрим возмущенное уравнение

$$x = \lambda Ax + F(Ax, \lambda) + (\lambda - \lambda_0)\Phi(x, \lambda) \quad (11)$$

с произвольным вполне непрерывным оператором $\Phi: \mathbb{H} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{H}$, для которого верна равномерная оценка $\|\Phi(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} \leq \delta$. Будем говорить, что $(v_{\varphi_1}, v_{\varphi_2}) \subset S$ является ε -правильным интервалом для функции (9), если $\chi(v_{\varphi_1})\chi(v_{\varphi_2}) < 0$ и $|\chi(v_{\varphi_1})|, |\chi(v_{\varphi_2})| > \varepsilon$. По определению сумма функции $\chi(v_\varphi)$ и любой заданной на S непрерывной функции, по модулю меньшей ε , имеет хотя бы один нуль на каждом ε -правильном для $\chi(v_\varphi)$ интервале. Положим

$$\kappa = \sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} \|Dv_0\|_{\mathbb{H}}.$$

Простая модификация приводимого ниже доказательства теоремы 1 позволяет показать, что число непересекающихся ε -правильных для функции (9) интервалов на окружности S служит оценкой снизу числа непересекающихся неограниченных непрерывных ветвей решений возмущенного уравнения (11) при $0 \leq \delta\kappa < \varepsilon$; направленность ветвей при этом не гарантируется.

Если $\Phi(x, \lambda) = G(Ax, \lambda)$ и оператор $G(x, \lambda)$ асимптотически однороден по x и имеет асимптотический предел $\Psi(u, \lambda)$, то оценки норм значений операторов G и F роли не играют и верно следующее близкое к теореме 1 утверждение: каждый правильный нуль v_{φ_j} функции $\chi(v_\varphi) + \langle Dv_\varphi, \Psi(v_\varphi, \lambda_0) \rangle \langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle$ определяет направленную неограниченную непрерывную ветвь решений уравнения (11) с предельным вектором v_{φ_j} ; здесь $\chi(v_\varphi)$ — функция (9). Это утверждение интересно возможностями применения к уравнениям с несогласованными с оператором A асимптотически однородными возмущениями. Например, для периодической задачи нелинейность G может быть гистерезисной (в [7] указаны классы классических гистерезисных нелинейностей, обладающих свойством асимптотической однородности).

2.5.5. Рассмотрим уравнение

$$x = A(\lambda)x + F(A(\lambda)x, \lambda). \quad (12)$$

Пусть все линейные операторы $A(\lambda)$ самосопряжены в $\mathbb{H}$ и коммутируют между собой. Пусть каждый из них согласован с асимптотически однородным по x оператором F_1 (при некотором общем для всех λ операторе D), пусть Ψ_1 — асимптотический предел оператора F_1 , и пусть $F(x, \lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$. Предположим, что оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{B})$ действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}$ линейных ограниченных операторов непрерывна по λ . Приведем аналог теоремы 3 в этой ситуации.

Пусть плоскость $\mathbb{E} \subset \mathbb{H}$ — это общее собственное подпространство всех операторов $A(\lambda)$, отвечающее при каждом λ собственному значению $\sigma(\lambda)$ кратности 2, т.е. $A(\lambda)e = \sigma(\lambda)e$ при $e \in \mathbb{E}$. Пусть $\sigma(\lambda_0) = 1$, и пусть непрерывная функция $\sigma(\lambda)$ строго монотонна.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_0(\lambda) \in \mathbb{E}^\perp$ при всех λ , и пусть функция

$$\chi(v_\varphi) = \langle DA(\lambda_0)(I - A(\lambda_0)Q)^{-1}F_0(\lambda_0), \Psi_1(v_\varphi, \lambda_0) \rangle$$

имеет $K > 0$ правильных нулей $v_{\varphi_1}, \dots, v_{\varphi_K}$ на окружности S . Тогда у уравнения (12) есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j} , $j = 1, \dots, K$.

Пример приложения теоремы 4 приведен в разд. 3.3.

2.5.6. Пусть $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — единственное характеристическое значение оператора A на промежутке Λ . Если все нули функции (9) на окружности S правильные и их $K > 0$, то в предположениях теоремы 1 множество решений уравнения (1) вне некоторого цилиндра $Z_\rho \subset \mathbb{H} \times \Lambda$ — это объединение K непересекающихся направленных неограниченных непрерывных ветвей. Интересны условия, при которых каждая направленная ветвь является непрерывной кривой. Если функция (9) не обращается в нуль на S , то множество всех решений уравнения (1) ограничено.

2.5.7. Одно из возможных направлений развития сформулированных результатов — переход к уравнениям с неограниченными сублинейными операторами F . При таком переходе основная проблема в приложениях состоит в доказательстве асимптотической однородности; если F — оператор суперпозиции, то можно использовать методы из [8]. Можно рассматривать асимптотически однородные в более слабом смысле нелинейности с разрывным асимптотическим пределом, например, используя технику из [9].

2.6. Доказательство теоремы 1.

2.6.1. Эквивалентная система. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = rv_\varphi + h$, где $r \geq 0$, $h \in \mathbb{E}^\perp$. Спроектируем это уравнение на ортогональные собственные векторы v_φ , $Dv_\varphi \in \mathbb{E}$ оператора A и на ортогональное им подпространство $\mathbb{E}^\perp$ пространства $\mathbb{H}$. Так как по предположению $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^\perp$ и $F(x, \lambda) = F_0(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$, то равенства проекций имеют вид

$$(1 - \lambda/\lambda_0)r = \langle v_\varphi, F(Ax, \lambda) \rangle, \quad (13)$$

$$0 = \langle Dv_\varphi, (\lambda - \lambda_0)G_0(\lambda) + F_1(Ax, \lambda) \rangle, \quad (14)$$

$$h = \lambda Ah + QF(Ax, \lambda). \quad (15)$$

При больших значениях r и $\lambda \rightarrow \lambda_0$ уравнения (13) и (15) в естественном смысле невырожденные (грубые), а уравнение (14) в силу условия (ii) согласованности операторов A и F_1 вырождается в тождество $0 = 0$. Преобразуем уравнение (14) также к грубому виду. Для этого умножим его на r/λ_0 и вычтем из тождества $0 \equiv \langle DAx, F_1(Ax, \lambda) \rangle$, вытекающего из согласованности операторов A и F_1 . Так как $Ax = rv_\varphi/\lambda_0 + Ah$, то мы получим

$$0 = \langle DAh, F_1(Ax, \lambda) \rangle + (1 - \lambda/\lambda_0)r \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda) \rangle \quad (16)$$

и, воспользовавшись уравнением (13), перепишем (16) в эквивалентном виде

$$0 = \langle DAh, F_1(Ax, \lambda) \rangle + \langle v_\varphi, F(Ax, \lambda) \rangle \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda) \rangle. \quad (17)$$

Будем считать, что λ_0 — это единственное¹⁾ характеристическое значение оператора A на промежутке Λ . Поэтому оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим на инвариантном подпространстве $\mathbb{E}^\perp$ при каждом $\lambda \in \Lambda$ и уравнение (15) равносильно уравнению

$$h = (I - \lambda AQ)^{-1} QF(Ax, \lambda). \quad (18)$$

Заменив h в равенстве (17) этим выражением, получим

$$0 = \langle DA(I - \lambda AQ)^{-1} QF(Ax, \lambda), F_1(Ax, \lambda) \rangle + \langle v_\varphi, F(Ax, \lambda) \rangle \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda) \rangle,$$

и так как из кососимметричности оператора D на пространстве $\mathbb{B}$ вытекает тождество $\langle DA(I - \lambda AQ)^{-1} Qy, y \rangle \equiv 0$ при всех $y \in \mathbb{H}$, то

$$0 = \langle DA(I - \lambda AQ)^{-1} QF_0(\lambda), F_1(Ax, \lambda) \rangle + \langle v_\varphi, F(Ax, \lambda) \rangle \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda) \rangle.$$

Используя это уравнение вместо уравнения (14) и уравнение (18) вместо уравнения (15), окончательно приходим к эквивалентной уравнению (1) системе

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \lambda/\lambda_0)r - \langle v_\varphi, F(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_\lambda(r, \lambda, \varphi, h), \\ 0 &= \langle DA(I - \lambda AQ)^{-1} QF_0(\lambda), F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda) \rangle \\ &\quad + \langle v_\varphi, F_0(\lambda) + F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda) \rangle \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi, h), \\ 0 &= h - (I - \lambda AQ)^{-1} QF(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_h(r, \lambda, \varphi, h) \end{aligned} \quad (19)$$

со скалярными неизвестными r, φ, λ и неизвестным вектором $h \in \mathbb{E}^\perp \subset \mathbb{H}$.

2.6.2. Локализация решений. Пусть множество $\Gamma \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ограничено, а $\partial\Gamma$ и $\bar{\Gamma}$ — его граница и замыкание. Определим на произведении $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ непрерывный ограниченный на ограниченных множествах функционал

$$\Phi_\Gamma(x, \lambda) = \begin{cases} -\inf\{\|x - y\|_{\mathbb{H}} + |\lambda - \mu| : (y, \mu) \in \partial\Gamma\} & \text{при } (x, \lambda) \in \Gamma, \\ \inf\{\|x - y\|_{\mathbb{H}} + |\lambda - \mu| : (y, \mu) \in \partial\Gamma\} & \text{при } (x, \lambda) \notin \Gamma, \end{cases}$$

обращающийся в нуль на $\partial\Gamma$, и дополним систему (19) уравнением

$$0 = \Phi_\Gamma(rv_\varphi + h, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_r(r, \lambda, \varphi, h).$$

Введем в рассмотрение векторное поле $\Theta = (\Theta_r, \Theta_\lambda, \Theta_\varphi, \Theta_h)$ в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E}^\perp$ переменных (r, λ, φ, h) с нормой $|r| + |\lambda| + |\varphi| + \|h\|_{\mathbb{H}}$, определенное

¹⁾Это предположение не ограничивает общности, так как вместо Λ можно использовать любой меньший промежуток, содержащий в своей внутренности точку λ_0 .

при всех $r \geq 0$, $\lambda \in \Lambda$ и всех φ и h . По построению каждый нуль этого поля определяет решение (x, λ) уравнения (1) с первой компонентой $x = rv_\varphi + h$, лежащее на границе $\partial\Gamma$ множества Γ ; из полной непрерывности оператора $A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{B}$ и предположений о непрерывности операторов D , F_0 , F_1 и G_0 вытекает полная непрерывность поля $\Theta = \Theta(r, \lambda, \varphi, h)$.

Существование нулей поля Θ сравнительно просто доказывается топологическими методами. Достаточно указать открытое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E}^\perp$, на границе которого вращение $\gamma = \gamma(\Theta, \Omega)$ поля Θ отлично от нуля [4]. Пусть v_{φ_0} — правильный нуль функции (9) или, что то же самое, φ_0 — правильный нуль функции $\tilde{\chi}(\varphi) = \chi(v_\varphi)$. Фиксируем $\varepsilon_\varphi > 0$, при котором φ_0 является единственным нулем функции $\tilde{\chi}(\varphi)$ на промежутке $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon_\varphi$ и потому $\tilde{\chi}(\varphi_0 - \varepsilon_\varphi)\tilde{\chi}(\varphi_0 + \varepsilon_\varphi) < 0$. Положим $\delta = \min\{|\tilde{\chi}(\varphi_0 - \varepsilon_\varphi)|, |\tilde{\chi}(\varphi_0 + \varepsilon_\varphi)|\} > 0$. Из равенства $F_1(x, \lambda) = F_1(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G_1(x, \lambda)$ в силу ограниченности множества значений оператора G_1 в пространстве $\mathbb{H}$ следует соотношение

$$\sup_{r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{E}^\perp} |\Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi, h) - \Theta_\varphi(r, \lambda_0, \varphi, h)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_0. \quad (20)$$

Зададимся достаточно малым $\varepsilon_\lambda > 0$ и достаточно большим $C_h > 0$, при которых промежутки $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_\lambda$ содержится во внутренней части промежутка Λ и справедливы оценки

$$\sup_{r \geq 0, |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_\lambda, \varphi \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{E}^\perp} |\Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi, h) - \Theta_\varphi(r, \lambda_0, \varphi, h)| < \delta/2, \quad (21)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|(I - \lambda AQ)^{-1} QF(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} < C_h; \quad (22)$$

существование C_h вытекает из оценки $\sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Положим

$$y_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} DA(I - \lambda_0 AQ)^{-1} F_0(\lambda_0) + \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda_0) \rangle v_\varphi.$$

Теперь формулу (9) можно переписать в виде $\chi(v_\varphi) = \langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle$, и в силу соотношений $F_0(\lambda_0) = QF_0(\lambda_0)$, $\langle v_\varphi, F_0(\lambda_0) \rangle = 0$ верно равенство $\Theta_\varphi(r, \lambda_0, \varphi, h) = \langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) \rangle$. Так как оператор A преобразует шар $\|h\|_{\mathbb{H}} \leq C_h$ пространства $\mathbb{H}$ в ограниченное множество пространства $\mathbb{B}$, то из асимптотической однородности оператора $F_1(x, \lambda_0)$ вытекает существование такого $r_0 \geq 0$, при котором для всех $r \geq r_0$ верна оценка

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}, \|h\|_{\mathbb{H}} \leq C_h} |\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) - \Psi_1(v_\varphi) \rangle| < \delta/2$$

или, что то же самое,

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}, \|h\|_{\mathbb{H}} \leq C_h} |\Theta_\varphi(r, \lambda_0, \varphi, h) - \chi(v_\varphi)| < \delta/2 \quad \text{при } r \geq r_0. \quad (23)$$

Фиксируем $r_1 \geq r_0$, при котором

$$r_1 \varepsilon_\lambda > \lambda_0 \sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}}. \quad (24)$$

Заметим, что числа ε_φ , ε_λ , C_h , r_1 определяются по уравнению (1) без использования множества Γ . Пусть ограниченное множество Γ телесно и его внутренность $\text{int } \Gamma$ содержит цилиндр $\{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} \leq \rho, |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_\lambda\}$ при $\rho \geq r_1 + C_h$.

Построим содержащий замыкание $\bar{\Gamma}$ множества Γ цилиндр $\{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < r_2, \lambda \in (\tilde{\lambda}_-, \tilde{\lambda}_+)\}$ и положим

$$\Omega = \{(r, \lambda, \varphi, h) : r_1 < r < r_2, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_\lambda, |\varphi - \varphi_0| < \varepsilon_\varphi, \|h\|_{\mathbb{H}} < C_h\}.$$

Обозначим через $\bar{\Omega}$ замыкание области Ω в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E}^\perp$.

2.6.3. *Завершение доказательства.* Воспользуемся теоремами о произведении вращений [4] для вычисления вращения $\gamma(\Theta, \Omega)$. Докажем для точек границы области Ω оценки

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(r, \lambda_0 - \varepsilon_\lambda, \varphi, h) \Theta_\lambda(r, \lambda_0 + \varepsilon_\lambda, \varphi, h) &< 0, \\ \Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi_0 - \varepsilon_\varphi, h) \Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi_0 + \varepsilon_\varphi, h) &< 0, \\ \Theta_r(r_1, \lambda, \varphi, h) \Theta_r(r_2, \lambda, \varphi, h) &< 0, \\ \|h - \Theta_h(r, \lambda, \varphi, h)\|_{\mathbb{H}} &< C_h \quad \text{при} \quad \|h\|_{\mathbb{H}} = C_h. \end{aligned} \tag{25}$$

Первая из них вытекает из соотношений (24) и равенства $\|v_\varphi\|_{\mathbb{H}} = 1$. Вторая следует из оценки $\tilde{\chi}(\varphi_0 - \varepsilon_\varphi) \tilde{\chi}(\varphi_0 + \varepsilon_\varphi) < 0$, определения числа δ и вытекающей из соотношений (21) и (23) оценки $|\Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi, h) - \tilde{\chi}(\varphi)| < \delta$ на множестве $\bar{\Omega}$. Третья из оценок (25) верна в силу включений

$\{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} \leq \rho, |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_\lambda\} \subset \text{int } \Gamma \subset \bar{\Gamma} \subset \{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < r_2, \lambda \in (\tilde{\lambda}_-, \tilde{\lambda}_+)\}$, соотношений $\|r_1 v_\varphi + h\|_{\mathbb{H}} \leq \rho$, $\|r_2 v_\varphi + h\|_{\mathbb{H}} \geq r_2$ при $\|h\|_{\mathbb{H}} \leq C_h$ и оценок $\Phi_\Gamma(x, \lambda) < 0$ при $(x, \lambda) \in \text{int } \Gamma$ и $\Phi_\Gamma(x, \lambda) > 0$ при $(x, \lambda) \notin \bar{\Gamma}$. Наконец, последняя из оценок (25) следует из соотношения (22).

По теореме о произведении вращений из оценок (25) вытекает равенство $|\gamma(\Theta, \Omega)| = 1$. Тот факт, что вращение $\gamma(\Theta, \Omega)$ отлично от нуля, означает, что у поля Θ есть хотя бы один нуль в области Ω и поэтому уравнение (1) имеет решение $(x, \lambda) \in \partial\Gamma \cap \Pi$, где

$$\Pi = \{(x, \lambda) : x = rv_\varphi + h, r > r_1, |\varphi - \varphi_0| < \varepsilon_\varphi, h \in \mathbb{E}^\perp, \|h\|_{\mathbb{H}} < C_h, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_\lambda\}.$$

Так как здесь Γ — любое ограниченное множество, содержащее в своей внутренности цилиндр $\{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} \leq \rho, |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_\lambda\}$ при $\rho \geq r_1 + C_h$, то этим доказано, что множество всех лежащих в Π решений уравнения (1) является неограниченной непрерывной ветвью. Обозначим эту ветвь через $\mathfrak{N}$.

Пусть $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$, $x = rv_\varphi + h$ и, следовательно, верны равенства (19). Так как $\|h\|_{\mathbb{H}} < C_h$ для всех точек множества Π , то при $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ соотношения $r \rightarrow \infty$ и $\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$ эквивалентны и в силу оценки $\sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x, \lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$ из первого равенства системы (19) вытекает соотношение (2). Из соотношений (2), (20) и $\Theta_\varphi(r, \lambda, \varphi, h) = 0$ следует соотношение

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty, (x, \lambda) \in \mathfrak{N}, x = rv_\varphi + h} |\Theta_\varphi(r, \lambda_0, \varphi, h)| = 0$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty, (x, \lambda) \in \mathfrak{N}, x = rv_\varphi + h} |\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) \rangle| = 0.$$

Далее, в силу асимптотической однородности оператора $F_1(x, \lambda_0)$

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty, (x, \lambda) \in \mathfrak{N}, x = rv_\varphi + h} |\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) - \Psi_1(v_\varphi) \rangle| = 0$$

(здесь используется оценка $\|Ah\|_{\mathbb{B}} \leq C_h \|A\|_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{B}}$ при $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$), а следовательно, $\langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle \rightarrow 0$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$, $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Но φ содержится в интервале $(\varphi_0 - \varepsilon_\varphi, \varphi_0 + \varepsilon_\varphi)$ при $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ и φ_0 — это единственный нуль функции $\tilde{\chi}(\varphi) = \langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi) \rangle$ в этом интервале. Поэтому $\varphi \rightarrow \varphi_0$ и $v_\varphi \rightarrow v_{\varphi_0}$ или, что то же самое, $(x - h)/\|x - h\|_{\mathbb{H}} \rightarrow v_{\varphi_0}$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$, $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$, и так как $\|h\|_{\mathbb{H}} < C_h$, то $x/\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow v_{\varphi_0}$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$, $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Значит, $\mathfrak{N}$ — это направленная ветвь с предельным вектором v_{φ_0} . Поскольку каждый правильный нуль v_{φ_0} функции (9) определяет подобную ветвь, теорема 1 полностью доказана.

§3. Периодические решения уравнения Дуффинга

3.1. Вынужденные колебания. Рассмотрим уравнение

$$x'' + \lambda^2 x = b(t) + \phi(x) \quad (26)$$

с 2π -периодической непрерывной функцией $b(t)$ и непрерывной функцией $\phi(x)$. Нас интересует число неограниченных ветвей 2π -периодических решений при $\lambda \rightarrow m$, где m — натуральное число.

Уравнение (26) и периодическая задача для такого уравнения изучались многими авторами. Традиционно наибольший интерес вызывает резонансный случай, т. е. уравнение (26) с фиксированным $\lambda = m$:

$$x'' + m^2 x = b(t) + \phi(x). \quad (27)$$

После работы [5], в которой рассматривались уравнения (27) с нелинейностями $\phi(x) = f(x)$, удовлетворяющими условиям (4), на эту тему появились сотни работ. Для таких уравнений существование 2π -периодических решений определяют числа $\bar{f} = 2|f_+ - f_-|$ и

$$\bar{b} = \left| \int_0^{2\pi} e^{imt} b(t) dt \right|. \quad (28)$$

При $\bar{b} \neq \bar{f}$ все 2π -периодические решения уравнения (27) допускают общую априорную оценку нормы $\|x\|_C$. Если $\bar{b} > \bar{f}$ и $f_+ < f(x) < f_-$ при всех x , то решений периода 2π нет. При $\bar{b} < \bar{f}$ существует по крайней мере одно 2π -периодическое решение. Случай $\bar{b} = \bar{f}$ (двойной резонанс) изучен в [10].

Предположим, что верны соотношения (4), (5) и $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$. Тогда число неограниченных непрерывных ветвей 2π -периодических решений уравнения (26) при $\lambda \rightarrow m$ определяется величиной (28). Если $\bar{b} > 0$, то $\lambda_0 = m$ — асимптотическая точка бифуркации и у уравнения (26) есть две направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ (например, в силу теоремы 2). Если $\bar{f} > \bar{b}$, то либо обе ветви определены при $\lambda > \lambda_0$, либо обе они определены при $\lambda < \lambda_0$; если $\bar{f} < \bar{b}$, то одна ветвь определена при $\lambda > \lambda_0$, а другая — при $\lambda < \lambda_0$.

Случай $\bar{b} = 0$ более богатый. Здесь оценки числа направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \rightarrow m$ следуют из теоремы 1. Всюду далее непрерывные ветви решений рассматриваются для определенности в пространствах $\mathbb{H} = L^2$ суммируемых с квадратом функций (эти функции заданы на естественно определяемых конечных промежутках: например, $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ в этом разделе и в разд. 3.3, а в следующем разделе $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi n], \mathbb{R})$); можно

использовать и другие пространства. Во всех приложениях речь идет о классических решениях.

Условие $\bar{b} = 0$ эквивалентно равенству нулю коэффициента B_m при гармонике порядка m ряда Фурье

$$b(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kt + \beta_k), \quad B_k \geq 0, \quad (29)$$

функции $b(t)$. Введем 2π -периодическую непрерывную функцию

$$\chi_m(\varphi) = \sum_{k=3,5,7,\dots} \frac{B_{km}}{1-k^2} \sin(k\varphi - \beta_{km}). \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\bar{b} = 0$. Пусть $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, функции $f(x)$ и $f_1(x)$ непрерывны и ограничены и верны соотношения (4), (5). Тогда каждому правильному нулю φ^* функции (30) отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь 2π -периодических решений уравнения (26) при $\lambda \rightarrow m$ с предельным вектором $v_{\varphi^*}(t) = \pi^{-1/2} \sin(mt + \varphi^*)$.

В силу теоремы Штурма–Гурвица (см., например, задачу 1996-5 в [11]) непрерывная вещественная периодическая функция имеет на периоде не меньше нулей (перем. знака), чем ненулевая гармоника наименьшего порядка ее ряда Фурье. Поэтому у функции (30) есть хотя бы 6 перем. знака на промежутке $[0, 2\pi)$. В ситуации общего положения (например, если все нули функции (30) изолированные) у нее есть хотя бы 6 правильных нулей на $[0, 2\pi)$ и в силу теоремы 3 уравнение (26) имеет по крайней мере 6 различных ветвей 2π -периодических решений при $\lambda \rightarrow m$. Так как $\chi_m(\varphi + \pi) \equiv -\chi_m(\varphi)$, то число правильных нулей функции $\chi_m(\varphi)$ на промежутке $[0, 2\pi)$ всегда четно.

Пусть $m = 1$, $\bar{b} = 0$. Если 2π — наименьший период функции $b(t)$, то у нее есть ненулевые нечетные гармоники и поэтому $\chi_1(\varphi) \not\equiv 0$. Простое достаточное условие существования по крайней мере $2k$ правильных нулей у функции $\chi_1(\varphi)$ на промежутке $[0, 2\pi)$ при любом нечетном $k > 1$ состоит в том, чтобы амплитуда B_k гармоники порядка k функции $b(t)$ была достаточно велика по сравнению с амплитудами B_j всех ее остальных нечетных гармоник. Например, при нечетном $k > 1$ и $b(t) = \cos(2t) + \sin(kt)$ у функции $\chi_1(\varphi) = (1-k^2)^{-1} \sin(k\varphi)$ есть ровно $2k$ правильных нулей на $[0, 2\pi)$.

Теорема 5 вытекает из теоремы 1. Определим пространство $\mathbb{B}$ и операторы A , D , как в примере 2.3.1, с произвольным нецелым $\alpha \in \mathbb{R}$ и положим $F = F_0 + F_1$, где $F_0 = b(t)$, $F_1(x(t)) = \phi(x(t))$. Замена параметра $\alpha^2 - \lambda^2 \mapsto \lambda$ приводит 2π -периодическую задачу для уравнения (26) к эквивалентному уравнению (1), удовлетворяющему всем предположениям теоремы 1 при $\Psi_1(u(t)) = (f_+ - f_-) \operatorname{sgn} u(t)/2$, $\mathbb{E} = \{x(t) = r \sin(mt + \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ и при $G_0 = G_1 = 0$. Функции (9) и (30) связаны равенством $\chi(v_\varphi) = 2(f_+ - f_-)m^{-1}\chi_m(\varphi)$.

Теоремы 1 и 3 применимы к уравнениям с правыми частями более общего вида: зависящими от параметра λ , содержащими запаздывания и производные.

3.2. Субгармоники. Субгармониками уравнения (26) с непрерывной 2π -периодической функцией $b(t)$ называют его периодические решения периодов $2\pi n$ при натуральных $n > 1$. Отметим, что вместе с каждой субгармоникой $x(t)$ периода $2\pi n$ субгармониками того же периода являются ее сдвиги $x(t + 2\pi\ell)$ при $\ell = 1, \dots, n-1$ (вообще говоря, отличные от $x(t)$).

Пусть натуральные числа m и n взаимно просты. Будем изучать существование неограниченных ветвей субгармоник уравнения (26) с фиксированным периодом $2\pi n$ при $\lambda \rightarrow m/n$. Эта задача сводится заменой времени $t \mapsto nt$ к задаче о 2π -периодических решениях близкого уравнения

$$x'' + n^2 \lambda^2 x = n^2 b(nt) + n^2 \phi(x). \quad (31)$$

Так как каждой направленной неограниченной непрерывной ветви 2π -периодических решений $x(t)$ уравнения (31) при $\lambda \rightarrow m/n$ отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь субгармоник $x(t/n)$ уравнения (26), то оценка числа ветвей вытекает из теоремы 5, примененной к уравнению (31). При этом в силу взаимной простоты чисел m и n автоматически выполняется аналогичное условию $\bar{b} = 0$ требование

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} b(nt) dt = 0.$$

По разложению (29) функции $b(t)$ в ряд Фурье определим функцию

$$\chi_{m,n}(\varphi) = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{B_{km}}{1 - n^2 k^2} \sin(k\varphi - \beta_{km}). \quad (32)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, непрерывные функции $f(x)$ и $f_1(x)$ ограничены и справедливы соотношения (4), (5). Пусть $n > 1$ нечетно. Пусть у функции (32) есть $K > 0$ правильных нулей на промежутке $[0, 2\pi)$. Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей субгармоник уравнения (26) с периодом $2\pi n$ при $\lambda \rightarrow m/n$ не меньше, чем nK .

3.3. Уравнение теории управления. Аналогично уравнению (26) можно рассмотреть уравнения высших порядков и уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)x = M\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)(b(t) + \phi(x)) \quad (33)$$

динамики одноконтурных систем управления, состоящих из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией и функциональной нелинейности. Здесь $L(p, \lambda)$ и $M(p, \lambda)$ — взаимно простые при каждом λ многочлены от переменной p с непрерывно зависящими от λ вещественными коэффициентами; степени ℓ и m этих многочленов не зависят от λ и $\ell > m$. Определение решения уравнения (33) есть в любом учебнике по теории управления; при $M \equiv 1$ это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка ℓ .

Пусть многочлены L и M четные, т. е. $L(p, \lambda) \equiv L(-p, \lambda)$, $M(p, \lambda) \equiv M(-p, \lambda)$. Пусть многочлен $L(p, \lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$ имеет пару простых корней $\pm\mu(\lambda)i$, непрерывная вещественная функция $\mu(\lambda)$ строго монотонна и $\mu(\lambda_0) = m$ при некоторых $\lambda = \lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ и натуральном m . Пусть $L(ki, \lambda) \neq 0$ при целых $k \neq \pm m$ и всех $\lambda \in \Lambda$ и $L(mi, \lambda) \neq 0$ при $\lambda \neq \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. По ряду Фурье (29) непрерывной функции $b(t) \equiv b(t + 2\pi)$ построим функцию

$$\chi_m(\varphi) = m^2 \sum_{k=3,5,7,\dots} B_{km} \frac{M(kmi, \lambda_0)}{L(kmi, \lambda_0)} \sin(k\varphi - \beta_{km}). \quad (34)$$

При $L(p, \lambda) = p^2 + \lambda^2$, $M \equiv 1$ функция (34) совпадает с функцией (30).

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда каждому правильному нулю функции (34) отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь 2π -периодических решений уравнения (33) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Теорема 7 вытекает из теоремы 4.

§4. Вынужденные колебания в векторных системах

Рассмотрим систему

$$x'' + \lambda x + \mathcal{A}x = b(t) + f(x, x'), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (35)$$

при $n > 1$. Здесь $\mathcal{A}$ — симметрическая квадратная матрица порядка n , периодическая с периодом 2π функция $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна, а функция $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и ограничена.

Пусть 1 — простое собственное значение матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}g = g$ и $\|g\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Пусть все отличные от 1 собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ не являются квадратами целых чисел. Положим $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{E} = \{rg \sin(t + \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ и обозначим через $\mathbb{E}^\perp$ ортогональное дополнение к плоскости $\mathbb{E}$ в пространстве $\mathbb{H}$. Пусть $b(t) \in \mathbb{E}^\perp$ или, что то же самое,

$$\int_0^{2\pi} (g, b(t))_{\mathbb{R}^n} \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} (g, b(t))_{\mathbb{R}^n} \cos t \, dt = 0. \quad (36)$$

Тогда у уравнения $u'' + \mathcal{A}u = b(t)$ есть единственное 2π -периодическое решение $u_*(t)$ в подпространстве $\mathbb{E}^\perp$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f(x, y)$ имеет вид (6) и для непрерывной ограниченной функции $f_1(x, y)$ верно тождество $(f_1(x, y), y)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$. Пусть при некоторой непрерывной функции $\psi(u, v)$ верно асимптотическое равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\|u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|v\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 1} \|f(ru, rv) - \psi(u, v)\|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Пусть справедливо соотношение (36). Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей 2π -периодических решений системы (35) при $\lambda \rightarrow 0$ не меньше числа правильных нулей $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ функции

$$\chi(\varphi) = \int_0^{2\pi} (u'_*(t - \varphi), \psi(g \sin t, g \cos t))_{\mathbb{R}^n} \, dt.$$

Эта теорема вытекает из теоремы 1. Зададимся числом $\alpha > \mu$, где μ — наибольшее собственное значение матрицы $\mathcal{A}$, и обозначим через A обратный оператор для дифференциального оператора $d^2/dt^2 + \mathcal{A} - \alpha$ при 2π -периодических краевых условиях. Определим пространство $\mathbb{B}$, как в примере 2.3.2, и положим $F_1(x(t)) = f(x(t), x'(t))$, $F(x(t)) = b(t) + F_1(x(t))$ при $x(t) \in \mathbb{B}$. Тогда после замены $\lambda + \alpha \mapsto -\lambda$ параметра 2π -периодическая задача для системы (35) сводится к эквивалентному уравнению (1). Из соотношений (6) и $(f_1(x, y), y)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$ вытекает согласованность операторов A и F_1 при $D = d/dt$. Существование равномерного непрерывного радиального предела $\psi(u, v)$ у функции $f(x, y)$ на бесконечности гарантирует асимптотическую однородность оператора F_1 .

§5. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим двумерную двухточечную краевую задачу

$$\begin{aligned} x_1'' + \lambda^2 x_1 &= b_1(t) + f_1(x_1, x_2), & x_2'' + \lambda^2 x_2 &= b_2(t) + f_2(x_1, x_2), \\ x_1(0) &= x_1(\pi) = x_2(0) = x_2(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

при λ , близких к 1, где все функции скалярны и непрерывны.

Определим пространства $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}$ и операторы A , D , F_1 , как в примере 2.3.3, и положим $F(x(t)) = F_1(x(t)) + F_0$, где $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $F_0 = (b_1(t), b_2(t)) \in \mathbb{H}$. Здесь плоскость $\mathbb{E}$ состоит из функций $x_0 \sin t$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Пусть справедливы тождество (7) и соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f_j(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - \psi_j(\cos \varphi, \sin \varphi)| = 0, \quad j = 1, 2, \quad (38)$$

где функции $\psi_j(u, v)$ непрерывны при $u^2 + v^2 = 1$. Положим

$$\psi(\varphi) = \psi_1(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + \psi_2(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi.$$

Из (7) вытекает согласованность операторов A и F_1 и тождество $v \psi_1(u, v) \equiv u \psi_2(u, v)$, в силу которого

$$\psi_1(\cos \varphi, \sin \varphi) = \psi(\varphi) \cos \varphi, \quad \psi_2(\cos \varphi, \sin \varphi) = \psi(\varphi) \sin \varphi.$$

Из (38) следует, что оператор F_1 асимптотически однороден и его асимптотический предел равен $\Psi(v_\varphi) = \psi(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Введем обозначения

$$B_k^{(j)} = \int_0^\pi b_j(t) \sin(kt) dt, \quad \beta_j = \sum_{k=3,5,\dots} \frac{B_k^{(j)}}{k(1-k^2)}, \quad j = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = 0$. Пусть верны соотношения (7) и (38). Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей решений задачи (37) при $\lambda \rightarrow 1$ не меньше числа правильных нулей функции $\chi(\varphi) = \psi(\varphi)(\beta_1 \sin \varphi - \beta_2 \cos \varphi)$ на промежутке $[0, 2\pi]$.

Например, пусть $f_1(x_1, x_2) = x_1 p(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2) = x_2 p(x_1, x_2)$ при $p(x_1, x_2) = (x_2 + 1)/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$. Здесь $\psi(\varphi) = \sin \varphi$. Если $\beta_2 \neq 0$, то у функции $\chi(\varphi)$ есть 4 правильных нуля $\varphi_j \in [0, 2\pi]$ и задача (37) имеет 4 направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \rightarrow 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.
2. Schmitt K., Wang Z. Q. On bifurcation from infinity for potential operators. Differential Integral Equations, 4, No. 5, 933–943 (1991).
3. Krasnosel'skii A. M. Asymptotic homogeneity of hysteresis operators. Z. Angew. Math. Mech., 76, Suppl. 2, 313–316 (1996).
4. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. Наука, М., 1975.
5. Lazer A. C., Leach D. E. Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 82, 46–68 (1969).

6. *Krasnosel'skii A. M., Mawhin J.* Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities. Nonlinear operator theory. Math. Comput. Modelling, **32**, 1445–1455 (2000).
7. *Блиман П.-А., Владимиров А. А., Красносельский А. М., Сорин М.* Вынужденные колебания в системах управления с гистерезисом. Докл. РАН, **347**, №4, 458–461 (1996).
8. *Krasnosel'skii A. M., Kuznetsov N. A., Rachinskii D. I.* On resonant differential equations with unbounded non-linearities. Z. Anal. Anwendungen, **21**, №3, 639–668 (2002).
9. *Diamond P., Kloeden P. E., Krasnosel'skii A. M., Pokrovskii A. V.* Bifurcations at infinity for equations in spaces of vector-valued functions. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **63**, No. 2, 263–280 (1997).
10. *Krasnosel'skii A. M., Mawhin J.* The index at infinity of some twice degenerate compact vector fields. Discrete Contin. Dynam. Systems, **1**, No. 2, 207–216 (1995).
11. *Арнольд В. И.* Задачи Арнольда. Фазис, М., 2000.

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: sashaamk@iitp.ru

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: rach@iitp.ru

Поступило в редакцию
15 сентября 2003 г.