Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, П. П. Никитин, Следы на бесконечных алгебрах Брауэра, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 09:05:36

УДК 519.17+519.21

Следы на бесконечных алгебрах Брауэра*

© 2006. А. М. Вершик, П. П. Никитин

§1. Алгебры Брауэра и паскализация графов

Рассмотрим диагональное действие комплексной ортогональной группы $O_k(\mathbb{C})$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ пространства $V = \mathbb{C}^k$:

$$M \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = Mv_1 \otimes \cdots \otimes Mv_n, \quad M \in O_k(\mathbb{C}).$$

Р. Брауэр определил (см. [1], [8]) семейство конечномерных алгебр $Br_n(k)$ (алгебр Брауэра), зависящее от комплексного параметра k и натурального n , которое включает при целых $k \geq n$ алгебры, изоморфные централизаторам указанного действия групп $O_k(\mathbb{C})$. При всех значениях параметра $k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\})$ при фиксированном n алгебры $Br_n(k)$ полупросты и изоморфны между собой [20]; ниже мы будем рассматривать только такие значения параметра и обозначать соответствующую алгебру через Br_n , опуская параметр k в обозначении. Для целых k алгебра $Br_n(k)$, вообще говоря, не полупроста.

Рассмотрим также *разделенную алгебру Брауэра* (wall-Brauer algebra) $Br_{n,m}(k)$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. История определения этой алгебры такова. Впервые задание алгебры $Br_{n,m}(k)$ с помощью копредставления предложил Тураев [5], обратив внимание первого автора на то, что ее размерность равна $(n+m)!$ и она напоминает групповую алгебру симметрической группы. Эта алгебра независимо возникла в работе [14] и позже изучалась в [6] как централизатор диагонального действия группы $GL_k(\mathbb{C})$ в произведении $V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m}$; из ее диаграммного определения ясно, что она является подалгеброй алгебры Брауэра. При этом разделенные алгебры Брауэра также полупросты и изоморфны для параметра общего положения $k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq m+n\}$ (подробнее об этом см. в [4]). Мы рассматриваем ниже только такие значения и опускаем параметр k в обозначении, $Br_{n,m}(k) = Br_{n,m}$.

Мартин [17] ввел понятие *алгебр разбиений* $Part_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{C}$. Алгебры разбиений $Part_{2n}(k)$, $Part_{2n+1}(k)$ для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ изоморфны централизаторам диагонального действия в пространстве $V^{\otimes n}$ подгрупп $S_k \subset GL_k(\mathbb{C})$, $S_{k-1} \subset GL_k(\mathbb{C})$ соответственно. Для параметра $k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2n-1\}$ алгебры $Part_n(k)$ изоморфны и полупросты; мы будем обозначать их через $Part_n$.

Для каждой из рассматриваемых конечномерных алгебр задан идеал J (с соответствующим индексом), натянутый на все необратимые стандартные обра-

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 03-51-5018 и SRDF RUM 1-2622 ST.04.

зующие (см. [20], [4], [17]). При этом

$$\begin{aligned} Br_n/J_n &\cong \mathbb{C}[S_n], & Br_{n,m}/J_{n,m} &\cong \mathbb{C}[S_n \times S_m], \\ Part_{2n}/J_{2n} &\cong Part_{2n+1}/J_{2n+1} \cong \mathbb{C}[S_n]. \end{aligned} \quad (1)$$

Алгебры Br_n , $Br_{n,m}$ и $Part_n$ образуют индуктивные семейства с естественными вложениями, что позволяет рассмотреть их пределы $Br_\infty = \varinjlim Br_n$, $Br_{\infty,\infty} = \varinjlim Br_{n,m}$ и $Part_\infty = \varinjlim Part_n$, которые являются *локально полупростыми (л.п.) алгебрами*. С комбинаторной точки зрения любая л.п. алгебра (индуктивный предел конечномерных полупростых алгебр) $A = \varinjlim A_n$ определяется своей *диаграммой Браттели* (*графом ветвления*) $\Gamma(A)$, т. е. $\mathbb{Z}_+$ -градуированным графом, вершины n -го этажа которого есть простые модули над алгеброй A_n , а ребра, соединяющие вершины $(n-1)$ -го и n -го этажа, задаются разложением на простые A_{n-1} -модули сужения на алгебру A_{n-1} соответствующего простого A_n -модуля. (См. обзоры [2], [19] относительно определений, связанных с л.п. алгебрами.) Нахождение диаграммы Браттели л.п. алгебры, заданной копредставлением или иным явным способом, аналогично отысканию спектра коммутативной алгебры.

Для описания диаграмм Браттели алгебр Брауэра и алгебры разбиений удобно использовать новую операцию над графами — *паскализацию*, — которая обобщает *основную конструкцию* Джонса. Относительно последней см. работы Джонса и Венця [12], [20], [9], а также обзор Рама и Халверсона [11], посвященный алгебрам разбиений, и литературу в нем. Опишем эту операцию. Пусть Γ есть $\mathbb{Z}_+$ -градуированный локально конечный граф с единственной начальной вершиной и без висячих вершин, и пусть Γ_k — множество вершин k -го этажа, $k \in \mathbb{Z}_+$. Мы будем писать $|\lambda| = i$, если $\lambda \in \Gamma_i$, и $\lambda \nearrow \nu$ (соответственно $\lambda \searrow \nu$), если вершина ν следует за вершиной λ (соответственно предшествует вершине λ). Определим новый $\mathbb{Z}_+$ -градуированный граф $\Pi(\Gamma)$, у которого множество $\Pi(\Gamma)_k$ вершин k -го этажа есть объединение множества Γ_k и множества вершин всех предшествующих этажей графа Γ той же четности. Обозначим вершины k -го этажа графа $\Pi(\Gamma)$ через (k, λ) , где $\lambda \in \Gamma_i$, $i \leq k$, $k - i = 0 \pmod{2}$. Ребра графа $\Pi(\Gamma)$ зададим следующим образом:

$$(k, \lambda) \nearrow (k+1, \nu) \iff \lambda \nearrow \nu \text{ или } \lambda \searrow \nu. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Операция перехода от графа Γ к графу $\Pi(\Gamma)$ называется *паскализацией*, а граф $\Pi(\Gamma)$ — *паскализацией графа* Γ .

Несложно проверить, что следующее определение равносильно данному: для получения k -го этажа графа $\Pi(\Gamma)$ мы отражаем $(k-2)$ -й этаж этого графа относительно $(k-1)$ -го (вместе с соответствующими ребрами) и затем к полученному отражению добавляем k -й этаж Γ_k графа Γ вместе с ребрами, соединяющими этажи Γ_{k-1} и Γ_k в исходном графе.

Очевидно, что исходный граф Γ является подграфом своей паскализации, составляющим, правда, очень небольшую часть всего графа $\Pi(\Gamma)$.

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим граф Γ^0 , множество вершин которого есть множество $\mathbb{Z}_+$, а ребра соединяют вершины n и $n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\Pi(\Gamma^0)$ есть «половина» графа Паскаля (что и объясняет введенный выше термин): $\Pi(\Gamma^0)_{2k} = \{0, 2, \dots, 2k\}$, $\Pi(\Gamma^0)_{2k+1} = \{1, 3, \dots, 2k+1\}$, а ребра имеют вид $(0, 1)$ и $(i, i-1)$, $(i, i+1)$ при $i > 0$. Отметим, что построенный граф отвечает л.п. алгебре Темперли–Либа (см. [9]).

Мы будем обозначать через Y_Γ множество путей на графе Γ ; при этом $Y_\Gamma \subset Y_{\Pi(\Gamma)}$. Пространство путей графа естественно снабжается структурой вполне несвязного компакта, в котором базис открыто-замкнутых множеств состоит из цилиндрических множеств; обозначим через $C_d = C_d^\Gamma$ цилиндр, состоящий из всех путей, проходящих через вершину d .

Полезно пояснить, как выглядят пути в графе $\Pi(\Gamma)$, являющемся паскализацией некоторого исходного графа Γ . Как следует из (2), всякий путь в $\Pi(\Gamma)$ однозначно задается последовательностью вершин $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ графа Γ , в которой любые две последовательные вершины x_n, x_{n+1} являются соседними в исходном графе: либо $x_n \nearrow x_{n+1}$ либо $x_n \searrow x_{n+1}$; иначе говоря, пути в паскализации графа есть траектории простого блуждания по путям исходного графа. Поэтому можно сказать, что граф $\Pi(\Gamma)$ есть граф простых блужданий по графу Γ .

Например, однородное дерево степени $2k$ с выделенной вершиной, определяющей $\mathbb{Z}_+$ -градуировку, есть граф Кэли свободной группы с k образующими, а его паскализация есть граф простых случайных блужданий на свободной группе.

Задавая идеалы J рассматриваемых бесконечномерных алгебр так же, как для конечномерного случая, мы получим

$$Br_\infty/J \cong \mathbb{C}[S_\infty], \quad Br_{\infty,\infty}/J \cong \mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty], \quad Part_\infty/J \cong \mathbb{C}[S_\infty].$$

Операция паскализации позволяет для каждой из алгебр $Br_\infty, Br_{\infty,\infty}, Part_\infty$ строить диаграмму Браттели по диаграмме соответствующей факторалгебры.

Напомним, что диаграмма Браттели групповой алгебры бесконечной симметрической группы есть граф Юнга $\mathbb{Y}$ (см., например, [2]). Следующие три теоремы суть переформулировки в удобных нам терминах доказанных ранее результатов. Диаграмма Браттели для семейства алгебр Брауэра получена Венцлем [20]:

ТЕОРЕМА 1.3. *Диаграмма Браттели алгебры Брауэра Br_∞ (для параметра общего положения) есть паскализация графа Юнга, $\Gamma(Br_\infty) = \Pi(\mathbb{Y})$.*

Для разделенных алгебр Брауэра диаграмма Браттели независимо описана в [16] и [4]. Рассмотрим л.п. алгебру $\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]$ как индуктивный предел групповых алгебр

$$\mathbb{C}[S_0 \times S_0] \subset \mathbb{C}[S_1 \times S_0] \subset \mathbb{C}[S_1 \times S_1] \subset \mathbb{C}[S_2 \times S_1] \subset \cdots \subset \mathbb{C}[S_{[n+1/2]} \times S_{[n/2]}] \subset \cdots$$

и обозначим через $\bar{\mathbb{Y}}$ соответствующую диаграмму Браттели, несложно получающуюся из графа $\mathbb{Y}$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Диаграмма Браттели разделенной алгебры Брауэра $Br_{\infty,\infty}$ (для параметра общего положения) есть паскализация графа $\bar{\mathbb{Y}}$, $\Gamma(Br_{\infty,\infty}) = \Pi(\bar{\mathbb{Y}})$.*

Мартин [17] нашел диаграмму Браттели алгебры разбиений. Диаграмма Браттели для этой алгебры также может быть описана при помощи паскализации. А именно, рассмотрим граф Юнга $\bar{\mathbb{Y}}$ с повторениями на нечетных этажах, отвечающий цепочке

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots, \quad G_{2i} = G_{2i+1} = \mathbb{C}[S_i], \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

ТЕОРЕМА 1.5. *Диаграмма Браттели алгебры разбиений $Part_\infty$ (для параметра общего положения) есть паскализация графа $\bar{\bar{\mathbb{Y}}}$, $\Gamma(Part_\infty) = \Pi(\bar{\bar{\mathbb{Y}}})$.*

§2. Теорема о центральных мерах на паскализации графа

Описание следов (характеров) и K -функтора является общей задачей теории л.п. алгебр. *Конечным следом (характером)* на $*$ -алгебре A называется линейный функционал $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, такой, что

- 1) $f(1) = 1$;
- 2) $f(ab) = f(ba)$, $a, b \in A$;
- 3) $f(a^*a) \geq 0$, $a \in A$.

Множество конечных следов на алгебре A обозначим через $\text{Char}(A) = \text{Char}(\Gamma(A))$. След называется *неразложимым*, если он не представим в виде нетривиальной выпуклой комбинации следов.

Центральной мерой на множестве Y_Γ путей $\mathbb{Z}_+$ -градуированного бесконечного графа Γ называется вероятностная борелевская мера, индуцирующая равномерные условные меры на конечных множествах путей, совпадающих с некоторого места. Обозначим множество центральных мер на путях графа Γ через $\text{Cent}(\Gamma) = \text{Cent}(Y_\Gamma)$. Центральная мера называется *эргодической*, если она не является нетривиальной выпуклой комбинацией центральных мер. Хорошо известно, что конечные следы на локально полупростой алгебре находятся в естественном биективном соответствии с центральными мерами на множестве путей диаграммы Браттели,

$$\text{Char}(A) \longleftrightarrow \text{Cent}(\Gamma(A))$$

(см., например, [2], [19]). При этом неразложимым следам отвечают эргодические центральные меры.

Мы сведем задачу нахождения следов на паскализации графа (для некоторых алгебр) к задаче о следах на исходном графе и применим эти соображения к бесконечномерным алгебрам Брауэра и алгебре разбиений. *Оказывается, при некоторых условиях на граф ветвления всякая центральная мера на паскализации графа сосредоточена на исходном графе (как подграфе своей паскализации) и, таким образом, совпадает с центральной мерой на самом графе.* В частности, мы доказываем, что следы на алгебрах Br_∞ и $Part_\infty$ находятся во взаимно однозначном соответствии со следами на бесконечной симметрической группе S_∞ , а следы на алгебре $Br_{\infty, \infty}$ — во взаимно однозначном соответствии со следами на группе $S_\infty \times S_\infty$.

Центральные меры для бесконечномерной алгебры Брауэра были описаны без доказательств и детализации множества полной меры в работе Керова [13]; следы на бесконечномерной раздельной алгебре Брауэра и на алгебре разбиений, видимо, вообще не рассматривались.

Для произвольного $\mathbb{Z}_+$ -градуированного графа Γ мы будем через $\dim(d; d')$ обозначать число путей из вершины d в вершину d' , а через $\dim(d)$ число путей из начальной вершины графа в вершину d . Напомним следующий метод нахождения центральных мер (эргодический метод):

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [2]). *Рассмотрим произвольный $\mathbb{Z}_+$ -градуированный граф и произвольную эргодическую центральную меру μ на нем. Тогда множество путей вида $s = (s_0 \nearrow s_1 \nearrow \dots \nearrow s_n \nearrow \dots)$, таких, что*

$$\mu(C_d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(d) \cdot \dim(d; s_n)}{\dim s_n} \quad (3)$$

для всех вершин d , имеет полную меру.

Таким образом, для отыскания центральных мер надо описать все пределы вида (3). Перейдем к описанию центральных мер на паскализациях графов.

ЛЕММА 2.2. *Если для вершин графа $\Pi(\Gamma)$ выполняется условие*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda, |\lambda| < n} \frac{\dim(n-2, \lambda)}{\dim(n, \lambda)} = 0, \quad (4)$$

то для любой центральной эргодической меры μ на графе $\Pi(\Gamma)$ и любой вершины $(n_0, \lambda) \in \Pi(\Gamma)_{n_0}$, $|\lambda| < n_0$, будет выполняться равенство $\mu(C_{(n_0, \lambda)}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для эргодической центральной меры μ и пути s из условия теоремы 2.1

$$\mu(C_{(n_0, \lambda)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(n_0, \lambda) \cdot \dim((n_0, \lambda); (n, s_n))}{\dim(n, s_n)}.$$

Для любой вершины (n, s_n) , в которую существует путь из вершины (n_0, λ) , $|\lambda| < n_0$, очевидным образом выполняется неравенство $|s_n| < n$. Следовательно, с учетом четности $|\lambda| \leq n_0 - 2$, $|s_n| \leq n - 2$, что доказывает существование вершин вида $(n_0 - 2, \lambda)$, $(n - 2, s_n)$. Рассмотрев биекцию (подъем на два этажа) между путями из вершины (n_0, λ) в (n, s_n) и путями из $(n_0 - 2, \lambda)$ в $(n - 2, s_n)$, получим, что для пути s

$$\begin{aligned} \mu(C_{(n_0, \lambda)}) &= \dim(n_0, \lambda) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim((n_0 - 2, \lambda); (n - 2, s_n))}{\dim(n, s_n)} \\ &\leq \dim(n_0, \lambda) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(n - 2, s_n)}{\dim(n, s_n)}. \end{aligned}$$

Это доказывает лемму. □

Для произвольного индуктивного семейства алгебр

$$A_0 \cong \mathbb{C} \subset A_1 \subset \dots \subset A_l \subset \dots$$

положим $a_{l+1} = [\dim A_{l+1} / \dim A_l]$, $l \in \mathbb{Z}_+$, где $\dim A_l$ — размерность алгебры A_l .

ЛЕММА 2.3. *Пусть для графа ветвления Γ , отвечающего семейству алгебр*

$$A_0 \cong \mathbb{C} \subset A_1 \subset \dots \subset A_l \subset \dots,$$

произвольного числа $l \in \mathbb{Z}_+$ и простого модуля $\lambda \in \Gamma_l$ выполняется следующее соотношение между размерностями исходного и индуцированного модулей:

$$\dim(\text{Ind}_{A_l}^{A_{l+1}} \lambda) = a_{l+1} \dim \lambda.$$

Тогда отношение размерностей $\dim(n, \lambda) / \dim \lambda$ зависит только от номера этажа n и от номера этажа $|\lambda|$ исходного графа. Иначе говоря, существуют числа $M(n, l)$, $l \leq n$, $n - l = 0 \pmod{2}$, такие, что

$$\dim(n, \lambda) = M(n, |\lambda|) \dim \lambda$$

для любого простого модуля $(n, \lambda) \in \Pi(\Gamma)_n$. Числа $M(n, l)$ задаются по индукции соотношениями

$$\begin{aligned} M(n, n) &= 1, \quad M(2n+2, 0) = M(2n+1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ M(n, l) &= M(n-1, l-1) + a_{l+1} M(n-1, l+1), \quad 0 < l < n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф ветвления $\Pi(\Gamma)$ позволяет записать размерность $\dim(n, \lambda)$, $0 < |\lambda| < n$, следующим образом:

$$\dim(n, \lambda) = \sum_{\eta \nearrow \lambda} \dim(n-1, \eta) + \sum_{\nu \searrow \lambda} \dim(n-1, \nu).$$

По индукции получаем

$$\dim(n, \lambda) = M(n-1, |\lambda|-1) \sum_{\eta \nearrow \lambda} \dim \eta + M(n-1, |\lambda|+1) \sum_{\nu \searrow \lambda} \dim \nu.$$

Для любого графа ветвления $\sum_{\eta \nearrow \lambda} \dim \eta = \dim \lambda$. Кроме того, по условию леммы $\sum_{\nu \searrow \lambda} \dim \nu = \dim(\text{Ind}_{A_{|\lambda|}}^{A_{|\lambda|+1}} \lambda) = a_{|\lambda|+1} \dim \lambda$, откуда следует, что

$$\dim(n, \lambda) = (M(n-1, |\lambda|-1) + a_{|\lambda|+1} M(n-1, |\lambda|+1)) \dim \lambda,$$

и это доказывает требуемую формулу. Случай $|\lambda| = 0$ рассматривается аналогично, случай $|\lambda| = n$ очевиден.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Аналогично проверяется утверждение, обратное лемме 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если $G = \{G_n\}$ — индуктивное семейство групп, то для групповой алгебры $\mathbb{C}[G] = \bigcup \mathbb{C}[G_n]$ условия леммы 2.3 выполняются, причем $a_{l+1} = [G_{l+1} : G_l]$, т.е. $(l+1)$ -е отношение размерностей алгебр равно индексу подгруппы G_l в группе G_{l+1} . При этом приведенный выше пример 1.2 показывает, что списки следов на графах Γ и $\Pi(\Gamma)$ могут сильно различаться — на графе Γ существует единственный след, а следы на графе $\Pi(\Gamma)$ параметризуются отрезком $[0, 1/2]$.

ЛЕММА 2.6. Если $n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \frac{M(2n-2, 0)}{M(2n, 0)} &= \frac{M(2n-3, 1)}{M(2n-1, 1)} > \frac{M(2n-2, 2)}{M(2n, 2)} > \frac{M(2n-3, 3)}{M(2n-1, 3)} > \frac{M(2n-2, 4)}{M(2n, 4)} > \dots, \\ \frac{M(2n-2, 0)}{M(2n, 0)} &> \frac{M(2n-1, 1)}{M(2n+1, 1)} > \frac{M(2n-2, 2)}{M(2n, 2)} > \frac{M(2n-1, 3)}{M(2n+1, 3)} > \frac{M(2n-2, 4)}{M(2n, 4)} > \dots. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство

$$\frac{M(2n-2, 0)}{M(2n, 0)} = \frac{M(2n-3, 1)}{M(2n-1, 1)}$$

непосредственно следует из соотношений (5). Для доказательства неравенств напомним следующий несложный факт:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}, \quad A, B, C, D, x > 0 \implies \frac{A}{B} > \frac{A + xC}{B + xD} > \frac{C}{D}.$$

Теперь, например, двойное неравенство

$$\frac{M(2n-3, 1)}{M(2n-1, 1)} > \frac{M(2n-2, 2)}{M(2n, 2)} > \frac{M(2n-3, 3)}{M(2n-1, 3)}$$

будет следовать из того, что в силу соотношений (5) $M(2n-2, 2) = M(2n-3, 1) + a_3 M(2n-3, 3)$, $M(2n, 2) = M(2n-1, 1) + a_3 M(2n-1, 3)$. Остальные неравенства проверяются аналогично. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Положим $\varepsilon(n) = 0$, если n четно, и $\varepsilon(n) = 1$, если n нечетно. Тогда в условиях леммы 2.3

$$\max_{\lambda, |\lambda| < n} \frac{\dim(n-2, \lambda)}{\dim(n, \lambda)} = \frac{M(n-2+\varepsilon(n), 0)}{M(n+\varepsilon(n), 0)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Последовательность $\left\{ \frac{M(2n, 0)}{M(2n+2, 0)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ убывает.

Таким образом, в условиях леммы 2.3 стремление к нулю предела (4) равносильно стремлению к нулю убывающей последовательности $\left\{ \frac{M(2n, 0)}{M(2n+2, 0)} \right\}_{n=0}^{\infty}$.

ЛЕММА 2.9. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(2n, 0)}{M(2n+2, 0)} > 0 \iff \exists M, C \forall n M(2n, 0) < C \cdot M^n$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(2n, 0)}{M(2n+2, 0)} = 0 \iff \forall M \exists C \forall n M(2n, 0) > C \cdot M^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для убывающей последовательности $\{m_n = \frac{M(2n, 0)}{M(2n+2, 0)}\}_{n=0}^{\infty}$ всегда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m \geq 0$. Если $m > 0$, то

$$M(2n, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{M(2k+2, 0)}{M(2k, 0)} < C \left(\frac{1}{m} \right)^n.$$

Если $m = 0$, то для любого $M > 0$ существует N , такое, что $\frac{M(2k, 0)}{M(2k+2, 0)} < \frac{1}{M}$ при $k > N$. Тогда

$$M(2n, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{M(2k+2, 0)}{M(2k, 0)} > C_1 \cdot M^{n-N} = C_2 \cdot M^n. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 2.10. В условиях леммы 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda, |\lambda| < n} \frac{\dim(n-2, \lambda)}{\dim(n, \lambda)} = 0 \iff \sup_l \{a_l = [\dim A_l / \dim A_{l-1}]\} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sup_l \{a_l\} = a$, то с помощью индукции, исходя из формул (5), легко проверить, что $M(n, l) < (a+1)^n$ для любого l .

Если $\sup_l \{a_l\} = \infty$, то для любого M существует индекс L , для которого $a_L > M$. Полагая $2n > 2L$ и рассматривая путь

$$(0, 0) \nearrow (1, 1) \nearrow \dots \nearrow (L, L) \nearrow (L+1, L-1) \nearrow (L+2, L) \nearrow (L+3, L-1) \nearrow \dots \\ \dots \nearrow (2n-L, L) \nearrow (2n-L+1, L-1) \nearrow (2n-L+2, L-2) \nearrow \dots \nearrow (2n, 0),$$

мы получим по индукции, что $M(L+2i, L) > M^i$, откуда следует, что $M(2n, 0) > M^{n-2L} = CM^n$. $\square$

Мы получили критерий сохранения центральных мер при паскализации графа. Если условия теоремы 2.10 выполнены, то

1) всякая центральная мера на графе $\Pi(\Gamma)$ сосредоточена на подграфе $\Gamma \subset \Pi(\Gamma)$ и, таким образом, совпадает с центральной мерой на Γ ;

2) следовательно, существует естественная биекция между множествами центральных мер $\text{Cent}(\Gamma) \leftrightarrow \text{Cent}(\Pi(\Gamma))$ и вытекающая из нее биекция между следами на соответствующих алгебрах.

Для индуктивного семейства алгебр Брауэра $a_l = \dim \mathbb{C}[S_l] / \dim \mathbb{C}[S_{l-1}] = l$, для разделенных алгебр Брауэра $a_l = [(l+1)/2]$, для алгебр разбиений $a_{2l} = l$, $a_{2l+1} = 1$. Это приводит нас к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.11. *Для каждой из алгебр Br_∞ , $Br_{\infty,\infty}$, $Part_\infty$ диаграмма Браттели есть паскализация $\Pi(\Gamma)$ некоторого графа Γ . При этом центральные меры на графе $\Pi(\Gamma)$ сосредоточены на подграфе $\Gamma \subset \Pi(\Gamma)$ и находятся во взаимно однозначном соответствии с центральными мерами на графе Γ .*

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Всякий след на алгебре Br_∞ , $Br_{\infty,\infty}$ или $Part_\infty$ есть поднятие некоторого следа на факторалгебре $\mathbb{C}[S_\infty]$, $\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]$ или $\mathbb{C}[S_\infty]$ соответственно.*

Полученные результаты о следах переносятся на деформации алгебр Брауэра (алгебры Бирман–Венцля, изучавшиеся в работах [7], [18], [13]) и деформации разделенных алгебр Брауэра (см. [5], [15], [10], [16]) для общих значений параметров.

§3. Замечания о K_0 -функторе

Напомним, что $K_0(A)$ -функтор (группа Гротендика) локально полупростой алгебры A есть индуктивный предел конечно порожденных бесконечных циклических групп, образующие которых суть вершины диаграммы Браттели алгебры A , а вложения определяются этой же диаграммой. Это является следствием отождествления вершин графа ветвления и соответствующих им неприводимых представлений (простых конечномерных модулей) конечномерных подалгебр. С помощью операции индуцирования можно сопоставить каждому такому модулю простой модуль над всей алгеброй (см. [2]). Назовем вершину графа *инфинитезимальной*, если цилиндр путей, проходящих через нее, имеет нулевую меру для всех конечных центральных мер. Проективный модуль (и, в частности, простой модуль) называется *инфинитезимальным*, если инфинитезимальна отвечающая ему вершина; иначе говоря, на инфинитезимальном проективном модуле все конечные следы аннулируются. Таким образом, в группе Гротендика определена подгруппа $I(A) = I$ инфинитезимальных модулей. Нетрудно видеть, что простые инфинитезимальные модули порождают подгруппу I . Для групповой алгебры бесконечной симметрической группы эта подгруппа тривиальна. Для рассматриваемых в этой работе алгебр Br_∞ , $Br_{\infty,\infty}$ и $Part_\infty$ из теоремы 2.11 непосредственно вытекает, что подгруппа инфинитезимальных модулей уже не тривиальна: она совпадает с подгруппой, порожденной вершинами, принадлежащими разности $\Pi(\Gamma) \setminus \Gamma$ для соответствующего графа Γ . Это приводит к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеют место изоморфизмы*

$$K_0(Br_\infty)/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty]), \quad K_0(Br_{\infty,\infty})/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]), \\ K_0(Part_\infty)/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty]).$$

Структура инфинитезимальных модулей локально полупростых алгебр, по видимому, не изучалась. Такие модули встречались также в [3] в качестве модулей комплексной групповой алгебры группы $SL(2, F)$ над счетным полем F . Эти модули не являются подмодулями никаких факторпредставлений, допускающих след и, в частности, регулярного представления, поскольку конечным следам отвечают либо конечномерные представления, либо факторпредставления типа Π_1 соответствующих алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Вейль, *Классические группы*, ИЛ, М., 1947.
- [2] А. М. Вершик, С. В. Керов, “Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор”, в кн.: *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, т. 26, ВИНТИ, М., 1985, 2–56.
- [3] А. М. Вершик, К. П. Кохась, “Вычисление группы Гротендика алгебры $\mathbb{C}(PSL(2, k))$, где k — счетное алгебраически замкнутое поле”, *Алгебра и анализ*, **2:6** (1990), 98–106.
- [4] П. П. Никитин, *Описание коммутанта действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах*, Препринт ПОМИ 08/2006.
- [5] В. Г. Тураев, “Операторные инварианты связок и R -матрицы”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **53:5** (1989), 1073–1107.
- [6] G. Benkart, M. Chakrabarti, T. Halverson, R. Leduc, C. Lee, J. Stroome, “Tensor product representations of general linear groups and their connections with Brauer algebras”, *J. Algebra*, **166:3** (1994), 529–567.
- [7] J. S. Birman, H. Wenzl, “Braids, link polynomials and a new algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **313:1** (1989), 249–274.
- [8] R. Brauer, “On algebras which are connected with the semisimple continuous groups”, *Ann. of Math.*, **38:4** (1937), 854–872.
- [9] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 14, Springer-Verlag, 1989.
- [10] T. Halverson, “Characters of the centralizer algebras of mixed tensor representations of $gl(r, \mathbb{C})$ and the quantum group $\mathcal{U}_q(gl(r, \mathbb{C}))$ ”, *Pacific J. Math.*, **174:2** (1996), 359–410.
- [11] T. Halverson, A. Ram, “Partition algebras”, *European J. Combin.*, **26:6** (2005), 869–921.
- [12] V. F. R. Jones, “Index for subfactors”, *Invent. Math.*, **72:1** (1983), 1–25.
- [13] S. V. Kerov, “Characters of Hecke and Birman–Wenzl algebras”, in: *Quantum Groups* (Proc. Workshops Euler Int. Math. Inst., Leningrad, USSR), Lecture Notes in Math., vol. 1510, 1991, 335–340.
- [14] K. Koike, “On the decomposition of tensor products of the representations of classical groups: By means of universal characters”, *Adv. Math.*, **74:1** (1989), 57–86.
- [15] M. Kosuda, J. Murakami, “Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group $u_q(gl(m, \mathbb{C}))$ ”, *Osaka J. Math.*, **30** (1993), 475–507.
- [16] R. Leduc, *A two-parameter version of the centralizer algebra of mixed tensor representations of quantum $GL(r)$* , PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, 1994.
- [17] P. Martin, “The partition algebra and the Potts model transfer matrix spectrum in high dimensions”, *J. Phys. A*, **33:19** (2000), 3669–3695.
- [18] J. Murakami, “The Kauffman polynomial of links and the representation theory”, *Osaka J. Math.*, **24:4** (1987), 745–758.
- [19] D. Voiculescu, S. Strătilă, *Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$* , Lecture Notes in Math., vol. 486, 1975.
- [20] H. Wenzl, “On the structure of Brauer’s centralizer algebras”, *Ann. of Math.*, **129:1** (1988), 173–193.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk

Поступило в редакцию
31 марта 2006 г.