Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Топологически свободные частичные действия и точные представления скрещенных произведений, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 54–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 02:36:55

УДК 517.9

Топологически свободные частичные действия и точные представления скрещенных произведений

© 2005. А. В. ЛЕБЕДЕВ

§1. Введение

Понятие скрещенного произведения C^* -алгебры на частичное действие группы $\mathbb{Z}$ частичными автоморфизмами введено Экселем [1]. Оно было распространено Мак-Кланаханом [2] на случай частичных действий дискретных групп. В последнее время скрещенные произведения находят все новые приложения как в анализе, так и в других разделах математики и математической физики. Интересное обсуждение этих и связанных с ними объектов можно найти, например, в [3]. Для исследования универсальных объектов такого типа важно иметь информацию об их точных представлениях. Описание характеристических свойств этих представлений и является темой данной статьи. Одними из основных условий, при выполнении которых можно получить такие представления, являются существование не увеличивающего норму условного ожидания на «алгебру коэффициентов» (свойство $(*)$, см. §2) и топологическая свобода частичного действия. В работе показано, что топологическая свобода частичного действия влечет за собой свойство $(*)$.

В этом вводном параграфе приведены необходимые сведения о частичных действиях и соответствующих скрещенных произведениях. В следующем параграфе вводится понятие топологически свободного частичного действия и доказывается основной результат статьи (теорема 2.7), связывающий топологическую свободу действия и свойство $(*)$. Далее, в §3, на основе этих результатов мы описываем условия существования точных представлений скрещенных произведений и приведенных скрещенных произведений.

Пусть A есть C^* -алгебра и G — дискретная группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частичным действием группы G на A называется набор $\alpha = \{\alpha_g\}_{g \in G}$ изоморфизмов $\alpha_g: D_{g^{-1}} \rightarrow D_g$ замкнутых двусторонних $*$ -идеалов C^* -алгебры A , для которых

- (1) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset D_{gh}$, $g, h \in G$;
- (2) $\alpha_{hg}(d) = \alpha_h(\alpha_g(d))$, $d \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}}$;
- (3) $D_e = A$, $\alpha_e = \text{Id}_A$.

Тройка (A, G, α) называется *частичной динамической системой*.

Ковариантным представлением частичной динамической системы (A, G, α) называется тройка (π, u, H) , где $\pi: A \rightarrow B(H)$ — представление алгебры A в гильбертовом пространстве H (здесь $B(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов в H), $u: G \rightarrow B(H)$ — функция, $u(g) = u_g$, $g \in G$, где u_g — частичная изометрия в H с начальным подпространством $[\pi(D_{g^{-1}})H]$ и финальным подпространством $[\pi(D_g)H]$, такая, что

- (1) $u_g \pi(d) u_{g^{-1}} = \pi(\alpha_g(d))$, $d \in D_{g^{-1}}$,

- (2) $\pi(d)(u_g u_h - u_{gh}) = 0$, $d \in D_g \cap D_{gh}$,
 (3) $u_g^* = u_{g^{-1}}$.

Пусть

$$L = \{a \in l^1(G, A) : a(g) \in D_g\}$$

с обычной нормой $\|a\|_1 = \sum \|a(g)\|$. Определим (сверточное) умножение и инволюцию на L следующим образом:

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a(h))b(h^{-1}g)), \quad a^*(g) = \alpha_g(a(g^{-1})^*).$$

С этими операциями L становится банаховой $*$ -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скрещенное произведение*, ассоциированное с частичной динамической системой (A, G, α) , — это обертывающая C^* -алгебра для L , обозначаемая через $A \times_\alpha G$.

Пусть (π, u, H) — ковариантное представление системы (A, G, α) . Зададим представление $\pi \times u: L \rightarrow B(H)$ формулой

$$(\pi \times u)(a) = \sum \pi(a(g))u_g.$$

Из определения скрещенного произведения $A \times_\alpha G$ следует, что $\pi \times u$ продолжается до $*$ -представления этого произведения.

Приведенное частичное скрещенное произведение. Среди ковариантных представлений системы (A, G, α) одно из важнейших — так называемое *приведенное скрещенное произведение*, которое определяется следующим образом (см. [2, Sec. 3]).

Прежде всего, по каждому представлению $\pi: A \rightarrow B(H)$ мы строим представление $\tilde{\pi}$ (так называемое регулярное представление) алгебры A в $l^2(G, H)$. Пусть $\pi_g: D_g \rightarrow B(H)$ задается формулой $\pi_g(d) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(d))$. Согласно п. 2.10.4 из [4], существует единственное продолжение π'_g представления π_g на A , аннулирующее $[\pi_g(D_g)H]^\perp$. Оно имеет вид

$$\pi'_g(d) = s \lim_{\gamma} \pi_g(v_\gamma d),$$

где $\{v_\gamma\}_\gamma$ — аппроксимативная единица для D_g . Теперь мы определяем представление $\tilde{\pi}: A \rightarrow B(l^2(G, H))$ формулой

$$\tilde{\pi}(d)\xi(g) = \pi'_g(d)\xi(g), \quad \xi \in l^2(G, H), \quad g \in G, \quad d \in A.$$

Для регулярного представления λ группы G , $\lambda: G \rightarrow B(l^2(G, H))$, $(\lambda_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$, имеем [2, Proposition 3.1]

$$\lambda_g \tilde{\pi}(d) \lambda_{g^{-1}} = \tilde{\pi}(\alpha_g(d)), \quad g \in G, \quad d \in D_{g^{-1}}.$$

Если мы положим $\tilde{\lambda}_g = \lambda_g P_{g^{-1}}$, где P_g — ортогональный проектор на гильбертово пространство $[\tilde{\pi}(D_g)l^2(G, H)]$, то $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda}, l^2(G, H))$ станет ковариантным представлением системы (A, G, α) .

Пусть $\|\cdot\|_r$ — норма в $l^1(G, A)$ вида $\|a\|_r = \sup\{\|(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)\| : (\pi, H) \in \text{Rep}(A)\}$, где $\text{Rep}(A)$ — множество всех представлений алгебры A .

Приведенное скрещенное произведение $A \times_{\alpha r} G$, ассоциированное с (A, G, α) , — это пополнение пространства $l^1(G, A)$ относительно нормы $\|\cdot\|_r$.

В действительности, для того чтобы задать приведенное скрещенное произведение, не обязательно использовать все представления алгебры A . Как показывает следующий результат, достаточно любого ее точного представления.

ТЕОРЕМА 1.1 [2, Proposition 3.4]. Пусть $\pi: A \rightarrow B(H)$ — представление. Тогда $\tilde{\pi}$ является точным в том и только том случае, когда $\tilde{\pi} \times \lambda$ является точным представлением алгебры $A \times_{\alpha r} G$.

§2. Свойство $(*)$ и топологически свободное частичное действие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (π, u, H) — ковариантное представление системы (A, G, α) . Будем говорить, что $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$, если для любой конечной суммы $\sum \pi(a(g))u_g$ выполняется неравенство $\|\sum \pi(a(g))u_g\| \geq \|a(e)\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из [2, Proposition 3.5] следует, что $A \times_{\alpha r} G$ и $A \times_{\alpha} G$ обладают свойством $(*)$.

Если $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$, то определенное на конечных суммах отображение $\mathcal{N}(\sum_{g \in F} \pi(a(g))u_g) = a(e)$ единственным образом продолжается до (положительного, не увеличивающего норму условного ожидания) отображения $\mathcal{N}: (\pi \times u)(A \times_{\alpha} G) \rightarrow A$.

Переходим к одному из основных понятий статьи — топологически свободному частичному действию.

Для любого идеала $J \subset A$ мы полагаем $\text{supp } J = \{x \in \text{Prim } A : x \not\subset J\}$. Известно [4, 3.2.1], что отображение $x \rightarrow x \cap J$ устанавливает гомеоморфизм $\text{supp } J \leftrightarrow \text{Prim } J$ (относительно топологии Джекобсона) и $\text{supp } J$ является открытым множеством в $\text{Prim } A$. Положим также $\hat{A}^J = \{\pi \in \hat{A} : \pi(J) \neq 0\}$ (здесь $\hat{A}$ — спектр алгебры A). Отображение $\pi \rightarrow \pi|_J$ устанавливает гомеоморфизм $\hat{A}^J \leftrightarrow \hat{J}$ (относительно топологии Джекобсона), и $\hat{A}^J$ — открытое множество в $\hat{A}$ [4, 3.2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Зададим отображение $\tau_g: \hat{A}^{D_{g^{-1}}} \rightarrow \hat{A}^{D_g}$ следующим образом: для каждого $\pi \in \hat{A}^{D_{g^{-1}}}$ полагаем $\tau_g(\pi)(j) = \pi(\alpha_g^{-1}(j))$, $j \in D_g$. Из приведенных выше наблюдений следует, что τ_g — гомеоморфизм.

Зададим также отображение $t_g: \text{supp } D_{g^{-1}} \rightarrow \text{supp } D_g$ по следующему правилу: для каждой точки $x \in \text{supp } D_{g^{-1}}$, такой, что $x = \ker \pi$, где $\pi \in \hat{A}^{D_{g^{-1}}}$, полагаем $t_g(x) = \ker \tau_g(\pi)$. Ясно, что t_g — гомеоморфизм.

Тогда $\{\tau_g\}_{g \in G}$ определяет *частичное действие* группы G *частичными гомеоморфизмами* на $\hat{A}$, а $\{t_g\}_{g \in G}$ определяет *частичное действие* группы G *частичными гомеоморфизмами* на $\text{Prim } A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ *топологически свободно*, если для каждого конечного множества $\{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ и любого непустого открытого множества $U \subset \text{supp } D_{g_1^{-1}} \cap \dots \cap \text{supp } D_{g_k^{-1}}$ существует точка $x \in U$, такая, что все точки $t_{g_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, различны.

Это условие можно также сформулировать следующим образом: для каждого конечного множества $\{g_1, \dots, g_k\} \subset G$ и любого непустого открытого множества U существует точка $x \in U$, такая, что все точки $t_{g_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, которые определены (т. е. $x \in \text{supp } D_{g_i^{-1}}$), различны.

Если для каждого $g \in G$ мы введем в рассмотрение множество $X_g = \{x \in \text{supp } D_{g^{-1}} : t_g(x) = x\}$, то упомянутое выше условие может быть переписано так: для любого конечного множества $\{g_1, \dots, g_n\}$, $g_i \neq e$, внутренность множества $\bigcup_{i=1}^n X_{g_i}$ пуста.

Основным утверждением данного параграфа является теорема 2.4, а техническим результатом — лемма 2.3. Одним из технических инструментов доказательства этой леммы служит следующая лемма 2.2, которая полезная и сама по себе.

ЛЕММА 2.2 [5, Lemma 12.15]. Пусть D есть C^* -подалгебра алгебры $B(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H и D' — коммутант алгебры D . Если $P_1, P_2 \in D'$ — два ортогональных проектора, таких, что сужения $D|_{H_{P_1}}$ и $D|_{H_{P_2}}$ (где $H_{P_1} = P_1(H)$, $H_{P_2} = P_2(H)$) являются неприводимыми и различными представлениями, то $H_{P_1} \perp H_{P_2}$.

ЛЕММА 2.3. Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно и $\pi \times u$ — представление, такое, что π является точным представлением алгебры A . Пусть F — конечное подмножество в G , $a \in L$ — любая функция, такая, что $a(g) = 0$, $g \notin F$, и $c \in (\pi \times u)(L)$ — оператор вида

$$c = \sum_{g \in F} \pi(a(g))u_g. \quad (2.1)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует неприводимое представление π' алгебры $\pi(A)$, такое, что для любого неприводимого представления ν алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$, являющегося продолжением представления π' , выполняются условия

- (i) $\|\pi'(\pi(a(e)))\| \geq \|a(e)\| - \varepsilon$,
- (ii) $P_{\pi'}\pi'(\pi(a(e)))P_{\pi'} = P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}$, где $P_{\pi'}$ — ортогональный проектор на $H_{\pi'}$ в H_ν , а $H_{\pi'}$ и H_ν — пространства представлений π' и ν соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\pi(A) \cong A$, то в дальнейшем мы будем их отождествлять.

Для любого $d \in A$ и $x \in \text{Prim } A$ через $\check{d}(x)$ обозначается число $\inf_{j \in x} \|d + j\|$. Для каждого $d \in A$ функция $\check{d}(x)$ полунепрерывна снизу на $\text{Prim } A$ и достигает своей верхней грани, равной $\|d\|$ [4, 3.3.2, 3.3.6].

Пусть $x_0 \in \text{Prim } A$ — точка, в которой $\check{a}(e)(x_0) = \|a(e)\|$, и π_0 — неприводимое представление алгебры A , такое, что $x_0 = \ker \pi_0$ (т. е. $\|\pi_0(a(e))\| = \|a(e)\|$). Так как функция $\check{a}(e)(x)$ полунепрерывна снизу, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \subset \text{Prim } A$, такое, что

$$\check{a}(e)(x) > \|a(e)\| - \varepsilon \quad \text{для каждого } x \in U. \quad (2.2)$$

Из топологической свободы частичного действия $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ вытекает существование точки $x' \in U$, такой, что все точки $t_{g_i}(x')$, $i = 1, \dots, k$, различны (если они определены, т. е. $x' \in \text{supp } D_{g_i^{-1}}$).

Пусть π' — неприводимое представление алгебры A , такое, что $\ker \pi' = x'$, и пусть ν — произвольное продолжение представления π' до неприводимого представления алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$. Мы будем обозначать той же буквой ν продолжение упомянутого представления до неприводимого представления C^* -алгебры C , порожденной алгеброй $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$ и элементами $\{u_g\}_{g \in G}$ (см. [4, 2.10.2]). Для этого представления ν имеет место включение $H_{\pi'} \subset H_\nu$.

Из выбора представления π' и неравенства (2.2) мы заключаем, что существует вектор $\xi \in H_{\pi'}$, такой, что $\|\xi\| = 1$ и $\|\pi'(a(e))\xi\| > \|a(e)\| - \varepsilon$. Итак, п. (i) доказан.

Для доказательства п. (ii) установим, что для любых векторов $\xi, \eta \in H_{\pi'}$

$$\langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2 u_g)\xi \rangle = 0, \quad d_1 \in A, \quad d_2 \in D_g, \quad g \in F, \quad g \neq e. \quad (2.3)$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$P_{\pi'} \nu(d_2 u_g) P_{\pi'} = 0, \quad g \in F, \quad d_2 \in D_g, \quad g \neq e. \quad (2.4)$$

Чтобы проверить равенство (2.3), рассмотрим следующие положения точки x' :

1) $x' \notin \text{supp } D_g$. В этом случае $\pi'(d_2^*) = 0$ и

$$\langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\xi \rangle = \langle \nu(d_2^*)\pi'(d_1)\eta, \nu(u_g)\xi \rangle = \langle \pi'(d_2^*)\pi'(d_1)\eta, \nu(u_g)\xi \rangle = 0.$$

2) $x' \notin \text{supp } D_{g^{-1}}$. Замечая, что $\nu(u_g^* u_g)$ — проектор на существенное пространство для $\nu(D_{g^{-1}})$, мы заключаем, что $\nu(u_g^* u_g)\xi = 0$ и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\xi \rangle &= \langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g u_g^* u_g)\xi \rangle \\ &= \langle \pi'(d_1)\eta, \nu(d_2)\nu(u_g)\nu(u_g^* u_g)\xi \rangle = 0. \end{aligned}$$

3) Наконец, пусть $x' \in \text{supp } D_g \cap \text{supp } D_{g^{-1}}$. В этом случае π' — неприводимое представление как для D_g , так и для $D_{g^{-1}}$, и $t_g(x') \in \text{supp } D_g$ (в соответствии с определением t_g в начале параграфа). Более того, мы имеем

$$\nu(u_g^* u_g)\eta = \eta, \quad \nu(u_g u_g^*)\eta = \eta \quad \text{для любого } \eta \in H_{\pi'}. \quad (2.5)$$

Так как $\nu(u_g)$ — частичная изометрия, то из формул (2.5) следует, что $H_{\pi'}$ принадлежит как начальному, так и финальному подпространствам частичных изометрий $\nu(u_g)$, а также начальному и финальному подпространствам для $\nu(u_g^*)$ и отображения $\nu(u_g): H_{\pi'} \rightarrow \nu(u_g)(H_{\pi'})$ и $\nu(u_g^*): H_{\pi'} \rightarrow \nu(u_g^*)(H_{\pi'})$ являются изоморфизмами.

Пусть P_1 — ортогональный проектор в H_ν на $H_{\pi'}$. Согласно определению представления ν , мы имеем $P_1 \in \nu(A)'$. Равенства (2.5) означают, что

$$P_1 = P_1 \nu(u_g^* u_g) = P_1 \nu(u_g u_g^*). \quad (2.6)$$

Положим $P_2 = \nu(u_g) P_1 \nu(u_g^*)$. Из приведенных выше наблюдений следует, что $\nu(u_g): P_1(H_{\pi'}) \rightarrow P_2(H_{\pi'})$ является изоморфизмом. Заметим также, что

$$P_2 \in (\nu(D_g))'. \quad (2.7)$$

Действительно, для любого $d \in D_g$ имеем

$$\begin{aligned} \nu(d) &= \nu(u_g u_g^*) \nu(d) = \nu(d) \nu(u_g u_g^*), \\ \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)) &= \nu(u_g^* u_g) \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)) = \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)) \nu(u_g^* u_g), \\ \nu(u_g^*) \nu(d) \nu(u_g) &= \nu(\alpha_{g^{-1}}(d)), \quad \nu(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}}(d)) = \nu(a). \end{aligned}$$

Пользуясь этими равенствами, мы для каждого $d \in D_g$ получаем $P_2 \nu(d) = \nu(d) P_2$.

Кроме того, неприводимость представления $\nu(D_g)|_{H_{P_1}}$ влечет за собой неприводимость представления $\nu(D_g)|_{H_{P_2}}$ (здесь $H_{P_1} = P_1(H_\nu) = H_{\pi'}$ и $H_{P_2} = P_2(H_\nu)$).

Заметим теперь, что для $d \in D_g$

$$P_1\nu(d) = 0 \iff \check{d}(x') = 0, \quad P_2\nu(d) = 0 \iff \check{d}(t_g(x')) = 0.$$

Таким образом (так как точки x' и $t_g(x')$ различны), мы заключаем, что представления $\nu(D_g)|_{H_{P_1}}$ и $\nu(D_g)|_{H_{P_2}}$ различны. Применяя лемму 2.2, мы получаем

$$P_1 \cdot P_2 = 0. \quad (2.8)$$

Из формул (2.8), (2.5), (2.6) и (2.7) следует (2.3).

Возвращаясь теперь к оператору (2.1) (напомним, что мы отождествляем A и $\pi(A)$) и используя равенство (2.4), мы получаем

$$P_{\pi'}\nu\left(\sum_{g \in F} a(g)u_g\right)P_{\pi'} = P_{\pi'}\nu(a(e))P_{\pi'} = P_{\pi'}\pi'(a(e))P_{\pi'};$$

таким образом, условие (ii) выполняется, и доказательство леммы закончено.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно. Если представление $\pi \times u$ таково, что π является точным представлением алгебры A , то $\pi \times u$ обладает свойством (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c — оператор вида (2.1). Возьмем π' , упомянутое в утверждении леммы 2.3. Тогда из (ii) и (i) вытекает, что

$$\|c\| \geq \|\nu(c)\| \geq \|P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}\| \geq \|a(e)\| - \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, отсюда следует (*).

ЛЕММА 2.5. Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно и представление $\pi \times u$ таково, что π — точное представление алгебры A . Тогда для любого $c \in (\pi \times u)(A \times_\alpha G)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует неприводимое представление π' алгебры $\pi(A)$, такое, что для любого неприводимого представления ν алгебры $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$, являющегося продолжением π' ,

- (i) $\|\pi'(\mathcal{N}(c))\| \geq \|\mathcal{N}(c)\| - \varepsilon,$
- (ii) $\|P_{\pi'}\pi'(\mathcal{N}(c))P_{\pi'} - P_{\pi'}\nu(c)P_{\pi'}\| \leq \varepsilon.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается стандартным аппроксимационным рассуждением ввиду плотности конечных сумм вида (2.1) в $(\pi \times u)(A \times_\alpha G)$ и того факта, что $\pi \times u$ обладает свойством (*).

§3. Скрещенные произведения и приведенные скрещенные произведения

Скрещенное произведение $A \times_\alpha G$ естественно рассматривать как *максимальную* C^* -алгебру, обладающую свойством (*) (это следует из конструкции $A \times_\alpha G$ и замечания 2.1). С другой стороны, Эксель показал, что приведенное скрещенное произведение $A \times_{\alpha r} G$ является *минимальной* C^* -алгеброй, обладающей этим свойством. Точное значение «минимальности» дается в следующем утверждении, которое является переформулировкой для рассматриваемой ситуации теоремы 3.3 из [6] (напомним при этом, что, согласно теореме 1.1 настоящей статьи, $\tilde{\pi} \times \lambda$ для любого точного представления π алгебры A является точным представлением алгебры $A \times_{\alpha r} G$).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\pi \times u$ — представление, для которого π — точное представление алгебры A . Если $\pi \times u$ обладает свойством $(*)$, то отображение

$$(\pi \times u)(A \times_{\alpha} G) \ni \sum \pi(a(g))u_g \mapsto \sum \tilde{\pi}(a(g))\tilde{\lambda}_g \in (\tilde{\pi} \times \lambda)(A \times_{\alpha r} G)$$

продолжается до эпиморфизма C^* -алгебр (здесь $(\tilde{\pi} \times \lambda)$ — представление, упомянутое в теореме 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Известно также, что если G — аменабельная группа, то каноническая сюръекция $\Lambda: A \times_{\alpha} G \rightarrow A \times_{\alpha r} G$ является изоморфизмом (см., например, [2, Proposition 4.2]).

Это замечание вместе с теоремой 3.1 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть G — аменабельная группа и (π^i, u^i, H^i) , $i = 1, 2$, — два ковариантных представления системы (A, G, α) , таких, что оба представления $\pi^i \times u^i$, $i = 1, 2$, обладают свойством $(*)$. Тогда отображение

$$\sum \pi^1(a(g))u_g^1 \mapsto \sum \pi^2(a(g))u_g^2$$

задает изоморфизм алгебр $(\pi^1 \times u^1)(A \times_{\alpha} G)$ и $(\pi^2 \times u^2)(A \times_{\alpha} G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Важность свойства $(*)$ впервые (по-видимому) была выявлена О'Донованом [7] в связи с описанием C^* -алгебр, порожденных взвешенными сдвигами. Наиболее общий результат (типа теоремы 3.3), устанавливающий принципиальную роль этого свойства в теории скрещенных произведений C^* -алгебр на дискретные группы автоморфизмов, был получен в [8] для произвольной C^* -алгебры и аменабельной дискретной группы (см. также [5, Chap. 2, 3] по поводу полных доказательств и различных приложений). Взаимосвязи соответствующего свойства со скрещенными произведениями на эндоморфизмы, порожденные изометриями, исследовались в [9, 10].

Следует отметить, что в [5] теорема 12.8 (аналог нашей теоремы 3.3) доказана прямым способом, не использующим приведенного скрещенного произведения. Таким образом, в частности, изоморфизм $\Lambda: A \times_{\alpha} G \rightarrow A \times_{\alpha r} G$ для аменабельных групп может быть выведен из этого результата (доказательство теоремы 12.8 из [5] легко переносится на ситуацию скрещенного произведения, ассоциированного с частичной динамической системой).

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно и представление $\pi \times u$ таково, что π является точным представлением алгебры A . Тогда отображение

$$(\pi \times u)(A \times_{\alpha} G) \ni \sum \pi(a(g))u_g \mapsto \sum \tilde{\pi}(a(g))\tilde{\lambda}_g \in (\tilde{\pi} \times \lambda)(A \times_{\alpha r} G)$$

продолжается до эпиморфизма C^* -алгебр (здесь $\tilde{\pi} \times \lambda$ — представление, упомянутое в теореме 1.1).

Для доказательства применяем теорему 2.4 и теорему 3.1.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть G — аменабельная группа и частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно. Если (π^i, u^i, H^i) , $i = 1, 2$, — два ковариантных представления для (A, G, α) , таких, что оба представления π^i , $i = 1, 2$, являются точными представлениями алгебры A , то отображение

$$\sum \pi^1(a(g))u_g^1 \mapsto \sum \pi^2(a(g))u_g^2$$

задает изоморфизм алгебр $(\pi^1 \times u^1)(A \times_{\alpha} G)$ и $(\pi^2 \times u^2)(A \times_{\alpha} G)$.

Применяем теорему 2.4 и теорему 3.3.

Следующие теорема 3.7 и следствие 3.8 в некотором смысле противоположны теореме 3.1. Они составляют также обобщение теоремы 2.6 из [11] (где $A = C_0(X)$).

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно. Если I — идеал в $A \times_{\alpha r} G$, то $I = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $I \cap A = \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \cap A = \{0\}$. Обозначим через $\pi: A \times_{\alpha r} G \rightarrow (A \times_{\alpha r} G)/I$ факторотображение, и пусть $c \in I$ — любой элемент, такой, что $c \geq 0$ и $\pi(c) = 0$. Для доказательства равенства $I = \{0\}$ достаточно проверить, что

$$c = 0. \quad (3.1)$$

Так как отображение $\mathcal{N}: A \times_{\alpha r} G \rightarrow A$, определенное после замечания 2.1, является точным (см., например, [6, Proposition 2.12]), то равенство (3.1) будет доказано, если мы установим, что

$$\mathcal{N}(c) = 0. \quad (3.2)$$

Поэтому проверим это равенство.

Из равенства $I \cap A = \{0\}$ вытекает, что $\pi(A) \cong A$. Задав произвольным $\varepsilon > 0$, возьмем представление π' из утверждения леммы 2.5 (мы можем считать его представлением как алгебры $\pi(A)$, так и алгебры A) и продолжим его до неприводимого представления ν алгебры $\pi(A \times_{\alpha r} G)$ (здесь мы считаем π представлением $\pi \times u$ из утверждения леммы 2.5). Очевидно, что $\nu \circ \pi$ — неприводимое представление алгебры $A \times_{\alpha r} G$.

Теперь из условия $\pi(c) = 0$ и свойства (ii) в утверждении леммы 2.5 следует, что

$$\varepsilon \geq \|P_{\pi'} \pi'(\mathcal{N}(\pi(c))) P_{\pi'} - P_{\pi'} \nu(\pi(c)) P_{\pi'}\| = \|\pi'(\mathcal{N}(\pi(c)))\| = \|\pi'(\mathcal{N}(c))\|.$$

Это вместе со свойством (i) влечет за собой неравенство

$$\|\mathcal{N}(c)\| \leq 2\varepsilon.$$

Тем самым (ввиду произвольности ε) равенство (3.2) установлено и доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. *Пусть частичное действие $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ топологически свободно. Представление π приведенного скрещенного произведения $A \times_{\alpha r} G$ является точным тогда и только тогда, когда оно точно на A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в утверждении теоремы 3.7 взять $I = \ker \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Взаимосвязи между топологической свободой действия и свойством (*), а также приложения этих свойств к различным результатам, связанным со скрещенными произведениями, интенсивно эксплуатировались многими авторами. Начало использования топологической свободы как инструмента исследования идеалов в скрещенных произведениях положено (по-видимому) О'Донованом в [7, Theorem 1.2.1]. Теорема 3.6 в случае коммутативной алгебры A и действия группы $\mathbb{Z}$ автоморфизмами была доказана в [12, 13]. Развитие этого направления и его многочисленные (не только чисто C^* -алгебраические) приложения, такие, как, например, конструкция символического исчисления и построение теории разрешимости функционально-дифференциальных уравнений, представлены в [14, 5, 15, 16]. Для общей ситуации автоморфизмов теорема 3.6 была получена в [8] (см. также в этой связи [5, Chap. 2, 3]). В [17]

для C^* -алгебр с «большим» центром введено понятие топологически свободного действия в терминах сужения действия автоморфизмов на центр и получен соответствующий аналог теоремы 3.6. Среди уже упомянутых «чисто» C^* -алгебраических источников необходимо отметить фундаментальный вклад в данную тематику, внесенный в [6]. Для случая $A = C_0(X)$ в [11] исследован ряд структурных проблем теории скрещенных произведений, ассоциированных с топологически свободным частичным действием.

В случае лебеговых пространств топологической свободе действия соответствует так называемая *метрическая свобода*. Взаимосвязь между этим свойством, свойством $(*)$ и соответствующими результатами для скрещенных произведений (для случая *автоморфизмов*) была исследована и применена к решению проблемы классификации сохраняющих меру автоморфизмов Арвесоном и Джозефсоном в [18, 19].

В ситуации *эндоморфизмов*, а именно, в случае, когда эндоморфизм C^* -алгебры порождается *одной* изометрией, взаимосвязи между топологической свободой действия и свойством $(*)$ исследованы в [20, 8, 21], где, в частности, получены аналоги теорем 2.4, 3.3, 3.6 для рассматриваемой ситуации. В действительности это исследование было инспирировано пионерскими работами Арзуманяна и Вершика [22–25], в которых были введены и изучены соответствующие объекты в лебеговых пространствах. В последнее время данная тематика получила новое развитие в работах Экселя [26, 27] и Экселя и Вершика [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Exel R.* Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence. *J. Funct. Anal.*, **122**, 361–401 (1994).
2. *McClanahan K.* K -theory for partial crossed products by discrete groups. *J. Funct. Anal.*, **130**, 77–117 (1995).
3. *Paterson Alan L. T.* Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras. *Progr. Math.*, Vol. 170, Birkhäuser, 1999.
4. *Dixmier J.* Les C^* -algebres et leurs representations. Gauthier-Villars Editeur, 1969.
5. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^* -theory. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 70, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
6. *Exel R.* Amenability for Fell bundles. *J. Reine Angew. Math.*, **492**, 41–73 (1997).
7. *O'Donovan D. P.* Weighted shifts and covariance algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **208**, 1–25 (1975).
8. *Лебедев А. В.* О некоторых C^* -методах, применяемых при исследовании алгебр, ассоциированных с автоморфизмами и эндоморфизмами. Деп. в ВИНТИ, №5351-B 87, 1987.
9. *Boyd S., Keswani N., Raeburn I.* Faithful representations of crossed products by endomorphisms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**, No. 2, 427–436 (1993).
10. *Adji S., Laca M., Nilsen M., Raeburn I.* Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**, No. 4, 1133–1141 (1994).
11. *Exel R., Laca M., Quigg J.* Partial dynamical systems and C^* -algebras generated by partial isometries. *J. Operator Theory*, **47**, 169–186 (2002).
12. *Лебедев А. В.* Об обратимости элементов в C^* -алгебрах, порожденных динамическими системами. УМН, **34**, No. 4, 199–200 (1979).
13. *Лебедев А. В.* Операторы типа взвешенного сдвига. Дис. канд. физ.-мат. наук, Минск, 1980.

14. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Университетское, Минск, 1988.
15. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 1. Equations with continuous coefficients. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 94, Longman, Harlow, 1998.
16. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 2. Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 95, Longman, Harlow, 1998.
17. *Карлович Ю. И.* Локально-траекторный метод исследования обратимости в C^* -алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов. ДАН СССР, **299**, No. 3, 546–550 (1988).
18. *Arveson W. B.* Operator algebras and measure preserving automorphisms. Acta Math., **118**, 95–109 (1967).
19. *Arveson W. B., Josephson K. B.* Operator algebras and measure preserving automorphisms. II. J. Funct. Anal., **4**, No. 1, 100–134 (1969).
20. *Лебедев А. В.* О расширении операторных алгебр с помощью изометрических операторов, порождающих эндоморфизмы. УМН, **39**, вып. 5, 247–248 (1984).
21. *Лебедев А. В.* Конструкции и объекты, ассоциированные с C^* -динамическими системами, порожденными эндоморфизмами. Труды ИМ НАН Беларуси, **1**, 133–142 (1998).
22. *Арзуманян В. А., Вершик А. М.* Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^* -алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов. Докл. АН СССР, **238**, №3, 513–517 (1978).
23. *Арзуманян В. А.*, Структура и представления инволютивных алгебр, ассоциированных с полугруппами эндоморфизмов: Дис. канд. физ.-мат. наук, Ленинград, 1978.
24. *Arzumanyan V. A., Vershik A. M.* Star algebras associated with endomorphisms. In: Operator Algebras and Group Representations, Proc. Int. Conf. Neptun/Rom., 1980, Vol. I, Monographs Stud. Math., Vol. 17, 1984, pp. 17–27.
25. *Арзуманян В. А.* Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространств Лебега. Изв. АН АрмССР, **20**, №6, 596–616 (1986).
26. *Exel R.* A new look at the crossed-product of a C^* -algebra by an endomorphism. arXiv:math.OA/0012084 v1 12 Dec 2000.
27. *Exel R.* Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states. arXiv:math.OA/0105195 v1 24 May 2001.
28. *Exel R., Vershik A.* C^* -algebras of irreversible dynamical systems. arXiv:math.OA/0203185 v1 19 May 2002.

Белорусский государственный университет, Минск
University of Bialystok, Bialystok
e-mail: lebedev@bsu.by

Поступила в редакцию
2 октября 2003 г.