Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Рыбников, Метод сдвига инвариантов и модель Годена, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 30–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:33:25

Метод сдвига инвариантов и модель Годена*

© 2006. Л. Г. РЫБНИКОВ

§1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — ее универсальная обертывающая алгебра. На алгебре $U(\mathfrak{g})$ имеется фильтрация по степени выражения через образующие. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта ассоциированная градуированная алгебра есть симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. Коммутатор в $U(\mathfrak{g})$ задает скобку Пуассона–Ли в $S(\mathfrak{g})$.

Метод сдвига инвариантов позволяет строить коммутативные относительно скобки Пуассона–Ли подалгебры в $S(\mathfrak{g})$. Этот метод состоит в следующем. Пусть $ZS(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ — центр алгебры $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона, и пусть $\mu \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный полупростой элемент. Тогда подалгебра $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$, порожденная элементами вида $\partial_\mu^n \Phi$, где $\Phi \in ZS(\mathfrak{g})$ (или, что то же самое, центральными элементами алгебры $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, сдвинутыми на $t\mu$ при всевозможных $t \in \mathbb{C}$), коммутативна относительно скобки Пуассона и имеет максимально возможную степень трансцендентности, равную $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g})$ (см. [10]). Более того, подалгебры A_μ являются максимальными коммутативными подалгебрами в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли [17]. Подалгебры $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$ названы в [19] подалгебрами Мищенко–Фоменко.

В данной работе мы поднимем подалгебры $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$ до коммутативных подалгебр в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. Иначе говоря, для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы построим семейство коммутативных подалгебр $\mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$, параметризованное регулярными полупростыми элементами $\mu \in \mathfrak{g}^*$, таких, что $\text{gr } \mathcal{A}_\mu = A_\mu$. Для классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ это было сделано (другими методами) Ольшанским и Назаровым (см. [14], [11]), а в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$ также Тарасовым [16].

Наша конструкция является модификацией известной конструкции высших гамильтонианов модели Годена (см. [7], [3]). Модель Годена была введена в [8] как спиновая модель, связанная с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2$, и обобщена на случай произвольной полупростой алгебры Ли в [9, п. 13.2.2]. Эта обобщенная модель Годена допускает следующую алгебраическую интерпретацию. Пусть V_λ — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ . Для любого набора $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ целочисленных доминантных весов положим $V_{(\lambda)} = V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ рассмотрим оператор $x^{(i)} = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ (x стоит на i -м месте), действующий в пространстве $V_{(\lambda)}$. Пусть $\{x_a\}$, $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, — ортонормированный относительно формы Киллинга базис в $\mathfrak{g}$, и пусть $z_1, \dots, z_n$ — набор попарно различных комплексных чисел. Гамильтонианами модели Годе-

*Работа выполнена при поддержке фондов CRDF, грант RM1-2543-MO-03, и РФФИ, грант 05-01-00988-а.

на являются следующие коммутирующие операторы, действующие в пространстве $V_{(\lambda)}$:

$$H_i = \sum_{k \neq i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{x_a^{(i)} x_a^{(k)}}{z_i - z_k}. \quad (1)$$

Гамильтонианы H_i можно рассматривать как элементы алгебры $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$. В [7] был предложен способ построения большой коммутативной подалгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, содержащей H_i . В случае $\mathfrak{g} = sl_2$ алгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ порождается элементами H_i и центральными элементами алгебры $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, в остальных случаях в алгебре $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ появляются еще и новые образующие, которые принято называть высшими гамильтонианами Годена. Конструкция алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ использует следующий глубокий факт [4]: пополненная универсальная обертывающая алгебра аффинной алгебры Када–Муди $\hat{\mathfrak{g}}$ на критическом уровне имеет большой центр $Z(\hat{\mathfrak{g}})$. Каждому набору комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$ естественным образом сопоставляется гомоморфизм $Z(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$. Алгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ есть образ этого гомоморфизма.

Мы построим семейство гомоморфизмов $Z(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})$, параметризованное наборами попарно различных комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$. Для каждого набора $z_1, \dots, z_n$ образом такого гомоморфизма является некоторая коммутативная подалгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})$. Специализация в точке $\mu \in \mathfrak{g}^* = \text{Spec } S(\mathfrak{g})$ дает коммутативную подалгебру $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, зависящую от $z_1, \dots, z_n$ и $\mu \in \mathfrak{g}^*$. При $n = 1$ получаются коммутативные подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1) = \mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$, не зависящие от z_1 . Мы докажем, что $\text{gr } \mathcal{A}_\mu = A_\mu$ для регулярных полупростых μ , т. е. подалгебры $\mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$ являются поднятиями подалгебр Мищенко–Фоменко. При $\mu = 0$ имеем $\mathcal{A}_0(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$, т. е. подалгебры $\mathcal{A}_0(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ порождены (высшими) гамильтонианами Годена. Мы докажем, что при общих значениях параметров $z_1, \dots, z_n$ и μ подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ имеют максимально возможную степень трансцендентности. Эти подалгебры содержат следующие «неоднородные гамильтонианы Годена»:

$$H_i = \sum_{k \neq i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{x_a^{(i)} x_a^{(k)}}{z_i - z_k} + \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mu(x_a) x_a^{(i)}.$$

Основным вопросом, связанным с моделью Годена, является вопрос о совместной диагонализации (высших) гамильтонианов Годена. Этому вопросу посвящено огромное количество литературы (см. например [5, 6, 7, 12]). Из конструкции, приведенной в [7], следует, что подалгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ состоит из элементов, инвариантных относительно диагонального действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и поэтому достаточно диагонализировать алгебру $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ в подпространстве $V_{(\lambda)}^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)}$ особых векторов относительно $\text{diag}_n(\mathfrak{g})$ (т. е. относительно диагонального действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Стандартная гипотеза состоит в том, что спектр алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}^{\text{sing}}$ прост при общих значениях z_i . Эта гипотеза доказана в [12] для $\mathfrak{g} = sl_r$ при условии, что λ_i равны ω_1 или ω_{r-1} (т. е. когда каждое V_{λ_i} есть стандартное представление алгебры Ли sl_r или двойственное ему).

Естественно также поставить вопрос о диагонализации алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}$. Мы докажем, что представление алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в

пространстве $V_{(\lambda)}$ получается предельным переходом из представления алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_{n+1})$ в пространстве $[V_{(\lambda)} \otimes M_{z_{n+1}\mu}^*]^{\text{sing}}$, состоящем из особых относительно $\text{diag}_{n+1}(\mathfrak{g})$ векторов в $U(\mathfrak{g})^{\otimes(n+1)}$ -модуле $V_{(\lambda)} \otimes M_{z_{n+1}\mu}^*$ при $z_{n+1} \rightarrow \infty$ (где $M_{z_{n+1}\mu}^*$ — модуль, контраградиентный к модулю Верма со старшим весом $z_{n+1}\mu$). Таким образом, представление алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}$ есть, в некотором смысле, предельный случай модели Годена.

Мы проверим гипотезу о простоте спектра для представления алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}$ в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$. Ключевым в доказательстве является тот факт, что замыкание семейства $\mathcal{A}_\mu$ содержит алгебру Гельфанда–Цетлина (на уровне пуассоновых алгебр этот факт был доказан Винбергом в [19]). Пользуясь этим, мы докажем, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$ для любого представления $V_{(\lambda)}$ при общих значениях параметров μ и $z_1, \dots, z_n$ алгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ имеет простой спектр в $V_{(\lambda)}$. Как следствие мы получим, что спектр алгебры $\mathcal{A}_0(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}^{\text{sing}}$ прост при общих значениях z_i и (λ) .

Работа построена следующим образом. В §§ 2 и 3 собраны известные факты о подалгебрах Мищенко–Фоменко и центре $Z(\hat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне соответственно. В § 4 описана конструкция подалгебр $\mathcal{A}_\mu$ и доказано, что $\text{gr } \mathcal{A}_\mu = A_\mu$. В § 5 описана общая конструкция подалгебр $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ и доказано, что эти подалгебры имеют максимально возможную степень трансцендентности. В § 6 дано описание представления алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}$ как «предельной» модели Годена. Наконец, в § 7 доказаны утверждения о простоте спектра в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$.

Я благодарю Б. Л. Фейгина, Э. Б. Винберга, В. В. Шувалова, А. В. Червова и Д. В. Талалаева за полезные обсуждения.

§2. Метод сдвига инвариантов

Метод сдвига инвариантов является частным случаем следующей конструкции (см., например, [1]). Пусть R — коммутативная алгебра с двумя согласованными скобками Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ (т. е. любая линейная комбинация скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ есть скобка Пуассона). Пусть Z_t — центр алгебры R относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}_1 + t\{\cdot, \cdot\}_2$. Пусть A — подалгебра в R , порожденная всеми Z_t для t общего положения.

ФАКТ 1 [1, предложение 4]. *Подалгебра $A \subset R$ коммутативна относительно каждой скобки $\{\cdot, \cdot\}_1 + t\{\cdot, \cdot\}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in Z_{t_1}$, $b \in Z_{t_2}$, причем $t_1 \neq t_2$. Тогда линейная по t функция $\{a, b\}_1 + t\{a, b\}_2$ обращается в нуль в двух различных точках t_1 и t_2 . Следовательно, $\{a, b\}_1 + t\{a, b\}_2 = 0$ для любого t .

Пусть теперь $a, b \in Z_{t_0}$. Тогда (в силу того, что t_0 — значение общего положения) существует непрерывная функция $a(s)$, такая, что $a(t_0) = a$ и $a(s) \in Z_s$ в некоторой окрестности значения t_0 . По доказанному имеем $\{a(s), b\}_1 + t\{a(s), b\}_2 = 0$ для s , принадлежащих проколотой окрестности значения t_0 . Следовательно, $\{a, b\}_1 + t\{a, b\}_2 = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $ZS(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли, и пусть $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Тогда подалгебра $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$, порожденная элементами вида $\partial_\mu^n \Phi$, где $\Phi \in ZS(\mathfrak{g})$ (или, что то же самое, центральными*

элементами алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, сдвинутыми на $t\mu$ при всевозможных $t \in \mathbb{C}$), коммутативна относительно скобки Пуассона–Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\{\cdot, \cdot\}_1$ скобку Пуассона–Ли, а в качестве $\{\cdot, \cdot\}_2$ скобку «с замороженным аргументом», заданную на образующих так:

$$\{x, y\}_2 = \mu([x, y]), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Тогда алгебра Z_t порождена центральными элементами алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g})$, сдвинутыми на $t\mu$. $\square$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, мы можем отождествить ее с $\mathfrak{g}^*$ и считать, что $\mu \in \mathfrak{g}$.

ФАКТ 2 [10]. Если $\mu \in \mathfrak{g}$ — регулярный полупростой элемент, то A_μ есть свободная коммутативная подалгебра в $S(\mathfrak{g})$ с $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$ образующими (и, таким образом, имеет максимально возможную степень трансцендентности). В качестве свободных образующих алгебры A_μ могут быть выбраны элементы $\partial_\mu^n \Phi_k$, $k = 1, \dots, \operatorname{rk} \mathfrak{g}$, $n = 0, 1, \dots, \deg \Phi_k$, где Φ_k — базисные $\mathfrak{g}$ -инварианты в $S(\mathfrak{g})$.

В работе [15] Шуваловым получено описание замыкания семейства подалгебр $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$, $\mu \in \mathfrak{h}^{\operatorname{reg}}$ (т.е. параметр μ лежит в фиксированной подалгебре Картана). В частности, доказано следующее утверждение.

ФАКТ 3. Пусть $\mu(t) = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \dots \in \mathfrak{h}^{\operatorname{reg}}$ при t общего положения. Положим $\mathfrak{z}_k = \bigcap_{i=0}^k \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu_i)$ (где $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu_i)$ — централизатор в $\mathfrak{g}$ элемента μ_i), $\mathfrak{z}_{-1} = \mathfrak{g}$. Тогда

(1) подалгебра $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)} \subset S(\mathfrak{g})$ порождена элементами $S(\mathfrak{z}_k)^{\mathfrak{z}_k}$ и их производными (любого порядка) вдоль μ_{k+1} для всех k ;

(2) алгебра $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)}$ свободна; в качестве свободных образующих можно взять некоторые производные образующих алгебр $S(\mathfrak{z}_k)^{\mathfrak{z}_k}$ вдоль μ_{k+1} .

В частности, это означает, что замыкание семейства A_μ в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$ содержит алгебру Гельфанда–Цетлина (см. [19, п. 6.1–6.4]). Мы разберем этот случай в §7.

Следующие результаты получены А. А. Тарасовым.

ФАКТ 4 [17]. Подалгебры A_μ и предельные подалгебры вида $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)}$ являются максимальными коммутативными подалгебрами, т.е. совпадают со своими централизаторами в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона.

Отображение симметризации $\sigma: S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ однозначно задается следующим свойством:

$$\sigma(x^k) = x^k \quad \forall x \in \mathfrak{g}, k = 0, 1, 2, \dots$$

ФАКТ 5 [16, 18]. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_r$ образующие подалгебр A_μ и предельных подалгебр вида $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)}$ могут быть подняты до коммутирующих элементов в $U(\mathfrak{g})$ при помощи отображения симметризации. Это поднятие подалгебр A_μ в универсальную обертывающую алгебру единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [16] указан явный вид поднимаемых образующих подалгебр A_μ и предельных подалгебр вида $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)}$. Это, с точностью до пропорциональности, элементы $\partial_\mu^n \Phi_k$, $k = 1, \dots, r-1$, $n = 0, 1, \dots, \deg \Phi_k$ (где Φ_k — элементы из $S(\mathfrak{sl}_r)^{\mathfrak{sl}_r}$, являющиеся как функции на $\mathfrak{sl}_r$ коэффициентами харак-

теристического многочлена), и их пределы соответственно. Для нас будет существенно только то, что этот выбор образующих с точностью до пропорциональности непрерывен по параметру μ .

§3. Центр на критическом уровне

Пусть $\hat{\mathfrak{g}}$ — аффинная алгебра Каца–Мути, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ есть центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}((t))$ токов на окружности со значениями в $\mathfrak{g}$ с помощью элемента K . Коммутационные соотношения заданы следующим образом:

$$[g_1 \otimes x(t), g_2 \otimes y(t)] = [g_1, g_2] \otimes x(t)y(t) + \kappa_c(g_1, g_2) \operatorname{Res}_{t=0} x(t)dy(t) \cdot K, \quad (2)$$

где κ_c — инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, заданное формулой

$$\kappa_c(g_1, g_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad}(g_1) \operatorname{ad}(g_2). \quad (3)$$

Положим $\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g}[[t]] \subset \hat{\mathfrak{g}}$ и $\hat{\mathfrak{g}}_- = t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}] \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Определим пополнение $\tilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}})$ как обратный предел факторпространств $U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(t^n\mathfrak{g}[[t]])$, $n > 0$. Действие алгебры $\tilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ корректно определено на $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулях из категории $\mathcal{O}^0$ (т.е. на $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулях, на которых подалгебра $\hat{\mathfrak{g}}_+$ действует локально конечно). Положим $\tilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})_c = \tilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})/(K - 1)$. Эта алгебра действует на $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулях *критического уровня* (т.е. $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулях из категории $\mathcal{O}^0$, на которых элемент K действует как единица). Название «критический» обусловлено тем, что теория представлений на этом уровне устроена наиболее сложно. Частным проявлением этого является тот факт, что алгебра $\tilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})_c$ имеет нетривиальный центр $Z(\hat{\mathfrak{g}})$. Следующий факт показывает, что этот центр достаточно велик.

ФАКТ 6 [4]. (1) *Естественный гомоморфизм $Z(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow (U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}(K - 1)))^{\hat{\mathfrak{g}}_+}$ сюръективен.*

(2) *Фильтрация Пуанкаре–Биркгофа–Витта на универсальной обертывающей алгебре задает фильтрацию на $\hat{\mathfrak{g}}_+$ -модуле $U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}(K - 1))$. Относительно этой фильтрации имеем $\operatorname{gr}(U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}(K - 1)))^{\hat{\mathfrak{g}}_+} = (S(\hat{\mathfrak{g}})/S(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}K))^{\hat{\mathfrak{g}}_+}$.*

Дадим теперь явное описание алгебры $(S(\hat{\mathfrak{g}})/S(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}K))^{\hat{\mathfrak{g}}_+}$. Так как $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \hat{\mathfrak{g}}_- \oplus \mathbb{C}K$ как векторное пространство, то каждый элемент пространства $U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}(K - 1))$ (соответственно $S(\hat{\mathfrak{g}})/S(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}K)$) имеет единственный представитель в $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ (соответственно в $S(\hat{\mathfrak{g}}_-)$). Таким образом, имеем естественные вложения

$$(U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}(K - 1)))^{\hat{\mathfrak{g}}_+} \hookrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \quad (4)$$

и

$$(S(\hat{\mathfrak{g}})/S(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+ + \mathbb{C}K))^{\hat{\mathfrak{g}}_+} \hookrightarrow S(\hat{\mathfrak{g}}_-). \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{A} \subset U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ и $A \subset S(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ — образы этих вложений. Рассмотрим следующие дифференцирования алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}_-$:

$$\partial_t(g \otimes t^m) = mg \otimes t^{m-1} \quad \forall g \in \mathfrak{g}, m = -1, -2, \dots, \quad (6)$$

$$t\partial_t(g \otimes t^m) = mg \otimes t^m \quad \forall g \in \mathfrak{g}, m = -1, -2, \dots \quad (7)$$

Дифференцирования (6), (7) продолжаются до дифференцирований алгебры $S(\hat{\mathfrak{g}}_-)$, а также алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$. Дифференцирование (7) задает на этих алгебрах градуировку.

Пусть $i_{-1}: S(\mathfrak{g}) \hookrightarrow S(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ — вложение, переводящее $g \in \mathfrak{g}$ в $g \otimes t^{-1}$. Пусть Φ_k , $k = 1, \dots, \text{rk } \mathfrak{g}$, — образующие алгебры инвариантов $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

ФАКТ 7 [2, 6, 13]. *Подалгебра $A \subset S(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ свободно порождена элементами $\partial_t^n \bar{S}_k$, $k = 1, \dots, \text{rk } \mathfrak{g}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\bar{S}_k = i_{-1}(\Phi_k)$.*

Из факта 6 следует, что образующие $\bar{S}_k$ поднимаются до (коммутирующих) образующих алгебры $\mathcal{A}$. Иначе говоря, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. (1) *Существуют такие однородные относительно $t\partial_t$ элементы $S_k \in \mathcal{A}$, что $\text{gr } S_k = \bar{S}_k$.*

(2) *Алгебра $\mathcal{A}$ есть свободная коммутативная алгебра, порожденная элементами $\partial_t^n S_k$, $k = 1, \dots, \text{rk } \mathfrak{g}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

В дальнейших рассуждениях мы будем использовать только существование коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ и это ее описание.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На данный момент не известно общей формулы для элементов S_k . Для Φ_1 (квадратичного элемента Казимира) соответствующий элемент $S_1 \in \mathcal{A}$ получается симметризацией из $\bar{S}_1 = i_{-1}(\Phi_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Конструкция высших гамильтонианов Годена устроена так: коммутативная подалгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ получается как образ подалгебры $\mathcal{A} \subset U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ при гомоморфизме специализации $U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ в точках $z_1, \dots, z_n$ (см. [7], [3]). Мы остановимся на этом подробнее в § 5.

§ 4. Максимальные коммутативные подалгебры в $U(\mathfrak{g})$

Для любого $z \neq 0$ имеется гомоморфизм

$$\phi_z: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g}), \quad g \otimes t^m \mapsto z^m g. \quad (8)$$

Кроме того, имеется гомоморфизм

$$\phi_\infty: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow S(\mathfrak{g}), \quad g \otimes t^{-1} \mapsto g, \quad g \otimes t^m \mapsto 0, \quad m = -2, -3, \dots \quad (9)$$

Пусть $\Delta: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \hookrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ — коумножение. Для любого $z \neq 0$ имеется следующий гомоморфизм:

$$\phi_{z,\infty} = (\phi_z \otimes \phi_\infty) \circ \Delta: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g}). \quad (10)$$

Более явно,

$$\phi_{z,\infty}(g \otimes t^m) = z^m g \otimes 1 + \delta_{-1,m} \otimes g.$$

Положим

$$\mathcal{A}(z, \infty) = \phi_{z,\infty}(\mathcal{A}) \subset U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подалгебра $\mathcal{A}(z, \infty)$ порождена коэффициентами главных частей рядов Лорана функций $S_k(w) = \phi_{w-z,\infty}(S_k)$ в точке z и значениями этих функций в точке ∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, подалгебра $\mathcal{A}(z, \infty)$ порождена элементами $\phi_{z,\infty}(\partial_t^n S_k)$. Эти элементы есть коэффициенты ряда Тейлора функции $S_k(w) = \phi_{w-z,\infty}(S_k)$ в точке $w = 0$. Так как функция $S_k(w)$ имеет единственный полюс в точке z , то коэффициенты ряда Тейлора функции $S_k(w)$ в точке

$w = 0$ линейно выражаются через коэффициенты главной части ряда Лорана этой функции в точке z и ее значение в точке ∞ , и наоборот. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Подалгебра $\mathcal{A}(z, \infty) \subset U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$ не зависит от z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, коэффициенты главных частей рядов Лорана функций $S_k(w) = \phi_{w-z, \infty}(S_k)$ в точке z и значения этих функций в точке ∞ не зависят от z . $\square$

Каждый элемент $\mu \in \mathfrak{g}^*$ задает гомоморфизм $S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ «специализации в точке μ », который мы также будем обозначать буквой μ . Рассмотрим следующее семейство коммутативных подалгебр в $U(\mathfrak{g})$, параметризованное с помощью $\mu \in \mathfrak{g}^*$:

$$\mathcal{A}_\mu := (\text{id} \otimes \mu)(\mathcal{A}(z, \infty)) \subset U(\mathfrak{g}). \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Элементы подалгебры $\mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$ инвариантны относительно действия централизатора $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu)$ элемента μ в $\mathfrak{g}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, $\mathcal{A}(z, \infty) \subset [U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})]^{\Delta(\mathfrak{g})}$, а гомоморфизм $\mu|_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu)}$ -эквивариантен. Отсюда следует, что $\mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu)}$. $\square$

Мы теперь докажем, что подалгебры $\mathcal{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$ дают квантование подалгебр Мищенко–Фоменко в $S(\mathfrak{g})$, получаемых методом сдвига инвариантов.

ТЕОРЕМА 1. *Для регулярных полупростых элементов $\mu \in \mathfrak{g}^*$ имеют место равенства $\text{gr } \mathcal{A}_\mu = A_\mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathfrak{g}$ -инвариантное дифференцирование E алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes S(\mathfrak{g})$, заданное на образующих следующим образом:

$$E((g \otimes x(t)) \otimes 1) = 1 \otimes g \text{Res}_{t=0} x(t) dt, \quad E(1 \otimes g) = 0 \quad \forall g \in \mathfrak{g}. \quad (12)$$

Иначе говоря,

$$(g \otimes t^{-m}) \otimes 1 \mapsto \delta_{-1, m} \otimes g, \quad 1 \otimes g \mapsto 0 \quad \forall g \in \mathfrak{g}.$$

ЛЕММА 1. *Подалгебра $\mathcal{A}(z, \infty) \subset U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$ порождена элементами*

$$(\phi_z \otimes \text{id})(E^j(S_k \otimes 1)) \in U(\mathfrak{g}) \otimes S^j(\mathfrak{g}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$(\text{id} \otimes \phi_\infty \circ \Delta)(\partial_t^n S_k) = (\exp E)(\partial_t^n S_k) \in U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes S(\mathfrak{g}).$$

Так как элементы S_k однородны относительно $t\partial_t$, то указанные элементы $(\phi_z \otimes \text{id})(E^j(S_k \otimes 1))$ суть коэффициенты ряда Лорана функций $S_k(w) = \phi_{w-z, \infty}(S_k) = \phi_{w-z}((\exp E)(S_k \otimes 1))$ в точке $w = z$. Теперь воспользуемся предложением 1. $\square$

Рассмотрим $\mathfrak{g}$ -инвариантное дифференцирование e алгебры $S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$, заданное на образующих следующим образом:

$$e(g \otimes 1) = 1 \otimes g, \quad e(1 \otimes g) = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что для любого $f \in S(\mathfrak{g})$ выполнено равенство $(\text{id} \otimes \mu) \circ e^j(f \otimes 1) = \partial_\mu^j f$.

Заметим теперь, что

$$\text{gr}(\phi_z \otimes \text{id})(E^j(S_k \otimes 1)) = z^{(-\deg \Phi_k + j)} e^j(\Phi_k \otimes 1) \in S(\mathfrak{g}) \otimes S^j(\mathfrak{g}),$$

так как $\text{gr } S_k = i_{-1}(\Phi_k)$. Отсюда

$$\text{gr}(\text{id} \otimes \mu) \circ (\phi_z \otimes \text{id})(E^j(S_k \otimes 1)) = z^{(-\deg \Phi_k + j)} \partial_\mu^j(\Phi_k).$$

Но элементы $\partial_\mu^j(\Phi_k)$ порождают подалгебру A_μ . Значит, $\text{gr } \mathcal{A}_\mu \supset A_\mu$. Так как элементы $\partial_\mu^j(\Phi_k)$ алгебраически независимы (факт 2), а из леммы следует, что элементы $(\text{id} \otimes \mu) \circ (\phi_z \otimes \text{id})(E^j(S_k \otimes 1))$ порождают алгебру $\mathcal{A}_\mu$, то $\text{gr } \mathcal{A}_\mu = A_\mu$. $\square$

§5. Коммутативные подалгебры в $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$

Теперь рассмотрим более общую конструкцию. Пусть $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ — тензорное произведение n экземпляров универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Мы будем обозначать через $\mathfrak{g}^{(i)}$ подпространство $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mathfrak{g} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, где $\mathfrak{g}$ стоит на i -м месте. Соответственно для элемента $u \in U(\mathfrak{g})$ мы положим

$$u^{(i)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes u \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \in U(\mathfrak{g})^{\otimes n}. \quad (14)$$

Пусть $\text{diag}_n: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \hookrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\otimes n}$ — диагональное вложение. Для каждого набора попарно различных z_i , $i = 1, \dots, n$, имеется следующий гомоморфизм:

$$\phi_{z_1, \dots, z_n, \infty} = (\phi_{z_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{z_n} \otimes \phi_\infty) \circ \text{diag}_{n+1}: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g}). \quad (15)$$

Более явно,

$$\phi_{z_1, \dots, z_n, \infty}(g \otimes t^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m g^{(i)} \otimes 1 + \delta_{-1, m} \otimes g.$$

Положим

$$\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty) = \phi_{z_1, \dots, z_n, \infty}(\mathcal{A}) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g}).$$

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 1 и следствию 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) *Подалгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty)$ порождены коэффициентами главных частей рядов Лорана функций*

$$S_k(w; z_1, \dots, z_n) = \phi_{w-z_1, \dots, w-z_n, \infty}(S_k)$$

в точках $z_1, \dots, z_n$ и значениями этих функций в точке ∞ .

(2) *Подалгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty)$ не меняются при одновременной аффинной замене параметров $z_i \mapsto az_i + b$.*

(3) *Элементы подалгебр $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty)$ инвариантны относительно диагонального действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Рассмотрим следующее семейство коммутативных подалгебр в $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, параметризованное числами $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ и элементами $\mu \in \mathfrak{g}^*$:

$$\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n) := (\text{id} \otimes \mu)(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty)) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}. \quad (16)$$

Как непосредственное следствие предложения 3 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (1) *Подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ не меняются при одновременном сдвиге параметров $z_i \mapsto z_i + b$.*

(2) *Элементы подалгебр $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ инвариантны относительно диагонального действия централизатора $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Подалгебры $\mathcal{A}_0(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ могут быть получены как образы подалгебры $\mathcal{A} \subset U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ при гомоморфизме

$$\phi_{z_1, \dots, z_n} = (\phi_{z_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{z_n}) \circ \text{diag}_n: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes n}.$$

Это в точности подалгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ высших гамильтонианов Годена, построенные в [7] (см. также [3]). Квадратичные гамильтонианы Годена (1) получаются как линейные комбинации элементов $\phi_{z_1, \dots, z_n}(\partial_t^n \bar{S}_1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

В дальнейшем мы будем писать $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ вместо $\mathcal{A}_0(z_1, \dots, z_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ содержат следующие «неоднородные гамильтонианы Годена»:*

$$H_i = \sum_{k \neq i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{x_a^{(i)} x_a^{(k)}}{z_i - z_k} + \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mu(x_a) x_a^{(i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как элемент $S_1 \in \mathcal{A}$ получается симметризацией из $\bar{S}_1 = i_{-1}(\Phi_1)$, то элемент H_i есть коэффициент при $1/(z - z_i)$ в разложении функции $S_1(w; z_1, \dots, z_n) = \phi_{w-z_1, \dots, w-z_n, \infty}(S_1)$ в точке $w = z_i$. Теперь воспользуемся предложением 3. $\square$

Алгебра $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})^{\otimes m}$ имеет возрастающую фильтрацию конечномерными пространствами, $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})^{\otimes m} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})^{\otimes m})_{(k)}$ (по степени выражения через образующие). Для однопараметрического семейства подалгебр $B(s) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})^{\otimes m}$ определим предел $\lim_{s \rightarrow \infty} B(s)$ как

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} B(s) \cap (U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})^{\otimes m})_{(k)}.$$

Ясно, что предел семейства *коммутативных* подалгебр есть коммутативная подалгебра. Ясно также, что такие предельные переходы коммутируют с гомоморфизмами фильтрованных алгебр (в частности, с проекциями на любой сомножитель и с конечномерными представлениями).

ТЕОРЕМА 2. *Для регулярных полупростых $\mu \in \mathfrak{g}^*$ имеет место равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\mu(sz_1, \dots, sz_n) = \mathcal{A}_\mu^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu^{(n)} \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам понадобится

ЛЕММА 2. $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_z = \varepsilon$, где $\varepsilon: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow \mathbb{C} \cdot 1 \subset U(\mathfrak{g})$ — коединица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить это на образующих. Имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_z(g \otimes t^m) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^m g = 0 \quad \forall g \in \mathfrak{g}, m = -1, -2, \dots \quad \square$$

Выберем образующие алгебры $\mathcal{A}(sz_1, \dots, sz_n, \infty)$, как в предложении 3. Коэффициенты ряда Лорана функции $S_k(w; sz_1, \dots, sz_n)$ в точке sz_i равны коэффициентам ряда Лорана функции $S_k(w + sz_i; sz_1, \dots, sz_n)$ в точке 0. С другой стороны, из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} S_k(w + sz_i; sz_1, \dots, sz_n) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{w-s(z_1-z_i), \dots, w-s(z_n-z_i), \infty}(S_k) \\ &= (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon \otimes \phi_w \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon \otimes \phi_\infty) \circ \text{diag}_{n+1}(S_k) = S_k^{(i)}(w; 0). \end{aligned}$$

Таким образом, образующие алгебры $\mathcal{A}(sz_1, \dots, sz_n, \infty)$ дают в пределе образующие алгебры $\mathcal{A}(z_1, \infty)^{(1)} \dots \mathcal{A}(z_n, \infty)^{(n)}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}(sz_1, \dots, sz_n, \infty) \supset \mathcal{A}(z_1, \infty)^{(1)} \dots \mathcal{A}(z_n, \infty)^{(n)},$$

а значит, и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\mu(sz_1, \dots, sz_n) \supset \mathcal{A}_\mu^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu^{(n)}.$$

Но из факта 4 следует, что подалгебра $\mathcal{A}_\mu^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu^{(n)} \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ совпадает со своим централизатором. Значит, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\mu(sz_1, \dots, sz_n) = \mathcal{A}_\mu^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu^{(n)}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Коммутативные подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ при общих значениях параметров имеют максимально возможную степень трансцендентности (равную $\frac{n}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g})$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, при общих μ подалгебра $\mathcal{A}_\mu^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu^{(n)} \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ имеет максимально возможную степень трансцендентности (это следует из факта 2). Так как такие подалгебры лежат в замыкании семейства $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$, то при общих значениях параметров подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ также имеют максимально возможную степень трансцендентности. $\square$

Рассмотрим однопараметрическое семейство алгебр $U(\mathfrak{g})_t$ с пространством образующих $\mathfrak{g}$ и определяющими соотношениями

$$xy - yx = t[x, y] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (17)$$

При $t \neq 0$ отображение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $x \mapsto t^{-1}x$, индуцирует изоморфизм алгебр

$$\psi_t: U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})_t. \quad (18)$$

При $t = 0$ имеем $U(\mathfrak{g})_0 = S(\mathfrak{g})$.

Рассмотрим коммутативную подалгебру

$$(\text{id}^{\otimes n} \otimes \psi_{z^{-1}})(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{g})_{z^{-1}}.$$

В пределе при $z \rightarrow \infty$ получается некоторая коммутативная подалгебра в $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})$.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\text{id}^{\otimes n} \otimes \psi_{z^{-1}})(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)) = \mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем такую лемму:

ЛЕММА 3. $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_{z^{-1}} \circ \phi_z = \phi_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить это на образующих. Имеем

$$\psi_{z^{-1}} \circ \phi_z(g \otimes t^m) = z \cdot z^m g \in U(\mathfrak{g})_{z^{-1}} \quad \forall g \in \mathfrak{g}, m = -1, -2, \dots$$

Отсюда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_{z^{-1}} \circ \phi_z(g \otimes t^m) = \delta_{-1, m} g = \psi_\infty(g \otimes t^m) \in S(\mathfrak{g}). \quad \square$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} (\text{id}^{\otimes n} \otimes \psi_{z^{-1}})(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} (\phi_{z_1} \otimes \dots \otimes \phi_{z_n} \otimes (\psi_{z^{-1}} \circ \phi_z)) \circ \text{diag}_{n+1}(\mathcal{A}) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} (\phi_{z_1} \otimes \dots \otimes \phi_{z_n} \otimes \phi_\infty) \circ \text{diag}_{n+1}(\mathcal{A}) \\ &= \mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g}). \end{aligned} \quad \square$$

§ 6. «Предельная» модель Годена

Пусть V_λ — конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ . Мы будем рассматривать следующий $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ -модуль:

$$V_{(\lambda)} := V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}. \quad (19)$$

Подалгебра $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ состоит из $\text{diag}_n(\mathfrak{g})$ -инвариантных элементов и поэтому действует в подпространстве $V_{(\lambda)}^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)}$ особых векторов относительно $\text{diag}_n(\mathfrak{g})$. Это представление алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ называют (n -точечной) *моделью Годена*.

Мы покажем, что для полупростого $\mu \in \mathfrak{g}^*$ представление подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ в пространстве $V_{(\lambda)}$ есть предельный случай ($n+1$)-точечной модели Годена.

Пусть M_χ^* — модуль, контраградиентный к модулю Верма со старшим весом χ . Этот модуль может быть реализован следующим образом. Пусть Δ_+ — множество положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $M_\chi^* = \mathbb{C}[x_\alpha]_{\alpha \in \Delta_+}$ (образующие x_α имеют (мульти)степень α), а элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действуют по следующим формулам.

(1) Элементы e_α , $\alpha \in \Delta_+$, подалгебры $\mathfrak{n}_+$ действуют как

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta > \alpha} P_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta},$$

где P_β^α — некоторые многочлены степеней $\beta - \alpha$.

(2) Элементы $h \in \mathfrak{h}$ действуют как

$$\chi(h) - \sum_{\beta \in \Delta_+} \beta(h) x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}.$$

(3) Образующие $e_{-\alpha_i}$ (α_i — простые корни) подалгебры $\mathfrak{n}_-$ действуют как

$$\chi(h_{\alpha_i}) x_{\alpha_i} + \sum_{\beta \in \Delta_+} Q_\beta^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_\beta},$$

где $Q_\beta^{\alpha_i}$ — некоторые многочлены степеней $\beta + \alpha_i$.

Рассмотрим $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{g})$ -модуль $V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*$. отождествим векторное пространство $M_{z\mu}^*$ с $\mathbb{C}[x_\alpha]$ и перенормируем образующие, полагая $y_\alpha = z^{ht(\alpha)} x_\alpha$, где $ht(\alpha)$ — высота корня α . Формулы для действия элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $M_{z\mu}^* = \mathbb{C}[y_\alpha]$ переписываются следующим образом:

$$e_\alpha = z^{ht(\alpha)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta > \alpha} z^{ht(\alpha)} P_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta},$$

$$h = z\mu(h) - \sum_{\beta \in \Delta_+} \beta(h) y_\beta \frac{\partial}{\partial y_\beta},$$

$$e_{-\alpha_i} = \mu(h_{\alpha_i}) y_{\alpha_i} + z^{-1} \sum_{\beta \in \Delta_+} Q_\beta^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial y_\beta}.$$

Таким образом, можно считать базис в пространстве $V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^* = V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ не зависящим от z , а операторы из $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{g})$ зависящими от z . Подпространство особых векторов $[V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ становится также зависящим от z . Далее, пространство $V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^* = V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ градуировано весами диагонального действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем однородные компоненты не зависят от z и имеют конечные размерности. Подпространство $[V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ лежит в конечной сумме однородных компонент; поэтому корректно определен предел $\lim_{z \rightarrow \infty} [V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$. При этом образ алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)$ в $\text{End}([V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}})$ в пределе при $z \rightarrow \infty$ дает некоторую коммутативную подалгебру в $\text{End}(\lim_{z \rightarrow \infty} [V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}})$.

ТЕОРЕМА 4. При $z \rightarrow \infty$

- (1) предел подпространств $[V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ есть $V_{(\lambda)} \otimes 1$;
- (2) предел образа алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)$ в $\text{End}([V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}})$ содержит образ алгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в $\text{End}(V_{(\lambda)} \otimes 1) = \text{End}(V_{(\lambda)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Подпространство $[V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*$ есть пересечение ядер операторов $\text{diag}_{n+1}(e_\alpha) = \sum_{i=1}^{n+1} e_\alpha^{(i)}$, $\alpha \in \Delta_+$. Легко видеть, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-ht(\alpha)} \text{diag}_{n+1}(e_\alpha) = 1^{\otimes n} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta > \alpha} P_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right).$$

Это означает, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \subset \bigcap_{\alpha \in \Delta_+} \text{Ker } 1^{\otimes n} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta > \alpha} P_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) = V_{(\lambda)} \otimes 1.$$

Но $\dim[V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} \geq \dim V_{(\lambda)}$. Значит, $\lim_{z \rightarrow \infty} [V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}} = V_{(\lambda)} \otimes 1$.

Докажем второе утверждение. Модуль $V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^* = V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ можно считать $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{g})_{z^{-1}}$ -модулем со старшим весом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu)$. Легко видеть (из формул для действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathbb{C}[y_\alpha]$), что для простых корней $\alpha_i \in \Delta_+$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes e_{-\alpha_i} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \psi_{z^{-1}}(e_{-\alpha_i}) = 0.$$

Это значит, что подпространство $V_{(\lambda)} \otimes 1 \subset V_{(\lambda)} \otimes \mathbb{C}[y_\alpha]$ является собственным относительно действия $\lim_{z \rightarrow \infty} U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{g})_{z^{-1}} = U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g})$, причем $1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes S(\mathfrak{g})$ действует на нем характером μ . По теореме 3 имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\text{id}^{\otimes n} \otimes \psi_{z^{-1}})(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)) = \mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S(\mathfrak{g}).$$

Это значит, что предел образа алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, z)$ в $\text{End}([V_{(\lambda)} \otimes M_{z\mu}^*]^{\text{sing}})$ содержит образ алгебры $(\text{id} \otimes \mu)(\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n, \infty)) = \mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ в $\text{End}(V_{(\lambda)} \otimes 1)$. $\square$

§7. Случай sl_r

В этом разделе $\mathfrak{g} = sl_r$.

ЛЕММА 4. В случае $\mathfrak{g} = sl_r$ и $\mu(t) = E_{11} + tE_{22} + \dots + t^{n-1}E_{nn}$ предел $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\mu(t)}$ есть подалгебра Гельфанда–Цетлина в $U(sl_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов В. В. Шувалова (факт 3) следует, что ассоциированная градуированная алгебра $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)} \subset S(\mathfrak{g})$ есть подалгебра Гельфанда–Цетлина в $S(\mathfrak{g})$. В самом деле, $\mathfrak{z}_k$ в этом случае есть алгебра Ли $sl_{r-k-1} \oplus \mathbb{C}^{k+1}$, состоящая из матриц $A \in sl_r$, таких, что

$$A_{ij} = A_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, k+1, \quad j = 1, \dots, r, \quad i \neq j.$$

Подалгебра в $S(sl_r)$, порожденная элементами $S(\mathfrak{z}_k)^{\mathfrak{z}_k}$ при всех k , есть подалгебра Гельфанда–Цетлина.

Так как для любого μ образующие подалгебры $\mathcal{A}_\mu$ получаются из образующих подалгебры A_μ симметризацией (факт 5), то и образующие подалгебры $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\mu(t)} \subset U(\mathfrak{g})$ получаются из образующих подалгебры $\lim_{t \rightarrow 0} A_{\mu(t)} \subset S(\mathfrak{g})$ симметризацией.

Из единственности поднятия (факт 5) следует, что $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\mu(t)}$ есть подалгебра в $U(sl_r)$, порожденная элементами $ZU(\mathfrak{z}_k)$ при всех k , т.е. подалгебра Гельфанда–Цетлина в $U(sl_r)$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. При общих значениях параметров μ и $z_1, \dots, z_n$ алгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ имеет простой спектр в V_λ для любого набора (λ) доминантных целочисленных весов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Подалгебра Гельфанда–Цетлина в $U(sl_r)$ имеет простой спектр в V_λ для любого веса λ . Это известный классический результат.

(2) Так как подалгебра Гельфанда–Цетлина получается предельным переходом из подалгебр $\mathcal{A}_\mu$, то при общих μ алгебра $\mathcal{A}_\mu$ также имеет простой спектр в V_λ для любого веса λ .

(3) Отсюда следует, что при общих значениях μ подалгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1)^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu(z_n)^{(n)}$ имеет простой спектр в V_λ . Так как подалгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1)^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_\mu(z_n)^{(n)}$ лежит в замыкании семейства подалгебр $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$, то при общих μ и z_i алгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1, \dots, z_n)$ также имеет простой спектр в V_λ . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. Существует такое плотное по Зарисскому в $\mathfrak{h}^*$ подмножество $W \subset \Lambda_+ \times \dots \times \Lambda_+$ (где Λ_+ — множество целочисленных доминантных весов), что для любого $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in W$ алгебра Годена $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ имеет простой спектр в $V_{(\lambda)}^{\text{sing}}$ при общих значениях параметров $z_1, \dots, z_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ условие непростоты спектра алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ в конечномерном пространстве $[V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_{n-1}} \otimes M_{\lambda_n}^*]^{\text{sing}}$ при любых значениях параметров $z_1, \dots, z_n$ есть алгебраическое условие на $\lambda_n \in \mathfrak{h}^*$. Из теорем 4 и 5 следует, что это условие не всегда выполнено. Следовательно, для любого набора $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ множество таких $\lambda_n \in \Lambda_+$, что спектр алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ в $[V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_{n-1}} \otimes M_{\lambda_n}^*]^{\text{sing}}$ прост при общих значениях параметров $z_1, \dots, z_n$, плотно по Зарисскому в $\mathfrak{h}^*$. Так как $V_{\lambda_n} \subset M_{\lambda_n}^*$, то для всех таких наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ спектр алгебры $\mathcal{A}(z_1, \dots, z_n)$ в пространстве $V_{(\lambda)}^{\text{sing}}$ также прост. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, “Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли”, *Матем. заметки*, **72:1** (2002), 11–34.
- [2] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigen-sheaves*, Preprint, <http://www.ma.utexas.edu/~benzvi/BD>.

- [3] B. Enriquez, V. Rubtsov, “Hitchin systems, higher Gaudin Hamiltonians and r -matrices”, *Math. Res. Lett.*, **3**:3 (1996), 343–357; <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9503010>.
- [4] B. Feigin, E. Frenkel, “Affine Kac–Moody algebras at the critical level and Gelfand–Dikii algebras”, *Int. Jour. Mod. Phys.*, **A7**, Supplement 1A (1992), 197–215.
- [5] E. Frenkel, “Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz”, in: *XIth International Congress of Mathematical Physics* (Paris, 1994), Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 606–642; <http://arxiv.org/q-alg/9506003>.
- [6] E. Frenkel, “Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level”, <http://arxiv.org/math.QA/0210029>.
- [7] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, “Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level”, *Comm. Math. Phys.*, **166** (1994), 27–62; <http://arxiv.org/hep-th/9402022>.
- [8] M. Gaudin, “Diagonalisation d’une classe d’hamiltoniens de spin”, *J. Physique*, **37**:10 (1976), 1087–1098.
- [9] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.
- [10] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, *Труды семин. вект. тенз. анал.*, **19** (1979), 3–94.
- [11] A. I. Molev, “Yangians and their applications”, in: *Handbook of algebra*, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 2003, 907–959; <http://arxiv.org/math.QA/0211288>.
- [12] E. Mukhin, A. Varchenko, *Norm of a Bethe vector and the Hessian of the master function*, Preprint, <http://arxiv.org/math.QA/0402349>.
- [13] M. Mustata, “Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities (with an appendix by D. Eisenbud and E. Frenkel)”, *Invent. Math.*, **145** (2001), 397–424; <http://arxiv.org/math.AG/0008002>.
- [14] M. Nazarov, G. Olshanski, “Bethe Subalgebras in Twisted Yangians”, *Comm. Math. Phys.*, **178**:2 (1996), 483–506; <http://arxiv.org/q-alg/9507003>.
- [15] В. Шувалов, “О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:4 (2002), 55–64.
- [16] А. А. Тарасов, “О некоторых максимальных коммутативных подалгебрах в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли gl_n ”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 115–122.
- [17] А. А. Тарасов, “Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли”, *УМН*, **57**:5 (2002), 165–166.
- [18] А. А. Тарасов, “О единственности поднятия максимальных коммутативных подалгебр из алгебры Пуассона–Ли в обертывающую алгебру”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 155–160.
- [19] Э. Б. Винберг, “О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **54**:1 (1990), 3–25.

Лаборатория Понселе Независимого
московского университета и CNRS
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет
e-mail: leo.rybnikov@gmail.com

Поступило в редакцию
9 апреля 2005 г.