Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Цилевич, Квантовый метод обратной задачи для q -бозонной модели и симметрические функции, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 53–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:53:36

Квантовый метод обратной задачи для q -бозонной модели и симметрические функции*

© 2006. Н. В. Цилевич

§1. Введение

q -Бозонная модель (см., например, [4], [6]) описывает систему сильно коррелированных бозонов на конечной одномерной решетке, которая играет важную роль в некоторых областях современной физики, таких, как физика твердого тела и квантовая нелинейная оптика. Соответствующая q -бозонная (или q -осцилляторная) алгебра [8] тесно связана с квантовой алгеброй $sl_q(2)$ [2]. Лучшее всего эта модель изучена в частном случае $q = 0$, в котором она называется фазовой моделью ([5], [6], [3]).

Цель данной работы — показать, что квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [7] для q -бозонной модели имеет красивую и полезную интерпретацию в терминах алгебры симметрических функций [9]. Отправной точкой для нас явилась работа Боголюбова [3], в которой показано, что фазовая модель тесно связана с перечислением плоских разбиений.

Начав с более простого случая фазовой модели, мы строим ее реализацию в алгебре симметрических функций Λ , сопоставляя базисному фоксовскому вектору $\psi_{n_0, \dots, n_M}$ с числами заполнения $n_0, \dots, n_M$ функцию Шура $s_\lambda(x)$, соответствующую диаграмме Юнга λ , которая имеет n_j строк длины j (подробности см. в разд. 2.2). Оказывается, что при этом оператор рождения $B(u)$ в КМОЗ совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на (усеченную) производящую функцию $H_M(u^2) = \sum_{k=0}^M u^{2k} h_k$ полных симметрических функций h_k (в дальнейшем для упрощения обозначений мы будем обозначать оператор умножения на функцию тем же символом, что и саму функцию), а оператор уничтожения $C(u)$ — с сопряженным к нему относительно стандартного скалярного произведения в Λ оператором $H_M^\perp(u^{-2})$. Это, в частности, позволяет, применяя аппарат симметрических функций, немедленно получить разложение волновой функции по базисным фоксовским векторам; коэффициенты этого разложения задаются функциями Шура. Кроме того, можно легко найти предел регуляризованных операторов рождения и уничтожения при $M \rightarrow \infty$.

С другой стороны, установленную взаимосвязь между фазовой моделью и симметрическими функциями можно использовать и в другом направлении: например, применяя коммутационные соотношения для $B(u)$ и $C(u)$, получаемые в КМОЗ (т. е. соответствующую R -матрицу), можно вывести коммутационные соотношения для оператора умножения на $H_M(u)$ и сопряженного к нему опера-

*Работа поддержана грантами CRDF RUM1-2622-ST-04 и РФФИ 05-01-00899, а также грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-4329.2006.1.

тора $H_M^\perp(u)$ в подпространстве Λ_M алгебры Λ , натянутом на функции Шура, индексированные диаграммами, имеющими не более M столбцов (они имеют более сложный вид, чем коммутационные соотношения для оператора умножения на полную производящую функцию $H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k h_k$ и сопряженного к нему оператора $H^\perp(u)$ во всей алгебре Λ).

Мы также устанавливаем связь операторов, возникающих в КМОЗ для фазовой модели, с формализмом вертексных операторов, применявшимся Окуньковым и Решетихиным [10] для вычисления корреляционных функций трехмерных диаграмм Юнга (плоских разбиений). Оказывается, что вертексные операторы из работы [10] — это те же операторы $H(u)$ и $H^\perp(u)$, т.е. пределы регуляризованных операторов рождения и уничтожения фазовой модели при $M \rightarrow \infty$. Однако для изучения трехмерных диаграмм Юнга, содержащихся в некотором *ящике*, подход из работы [10] неприменим, в то время как метод из статьи [3], основанный на КМОЗ для фазовой модели, позволяет вычислить статистическую сумму и корреляционные функции для трехмерных диаграмм, содержащихся в ящике, поскольку, как отмечено выше, он позволяет получить коммутационные соотношения для «усеченных» операторов.

Аналогичная схема может быть реализована для общей q -бозонной модели. В этом случае вместо функций Шура следует использовать их обобщение — *функции Холла–Литтлвуда* $P_\lambda(x; q^2)$ (которые совпадают с $s_\lambda(x)$ при $q = 0$). В частности, волновые функции q -бозонной модели выражаются через функции Холла–Литтлвуда, а оператор рождения совпадает (с точностью до скалярного множителя) с оператором умножения на производящую функцию $Q_M(u^2) = \sum_{k=0}^M u^{2k} q_k$ (см. разд. 3.1).

§2. Фазовая модель и функции Шура

2.1. Фазовая модель. Рассмотрим алгебру, порожденную тремя операторами ϕ , $\phi^\dagger$, N , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[N, \phi] = -\phi, \quad [N, \phi^\dagger] = \phi^\dagger, \quad [\phi, \phi^\dagger] = \pi, \quad (1)$$

где π — вакуумный проектор. Эта алгебра может быть реализована в одномерном (т.е. имеющем одномерные n -частичные подпространства) пространстве Фока, в котором операторы ϕ , $\phi^\dagger$ и N действуют как операторы фазы и оператора числа частиц соответственно:

$$\phi^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle, \quad \phi |n\rangle = |n-1\rangle, \quad \phi |0\rangle = 0, \quad N |n\rangle = n |n\rangle,$$

где $|n\rangle$ — (нормированный) n -частичный фоковский вектор (в частности, $|0\rangle$ — вакуумный вектор). Таким образом, ϕ — изометрия (односторонний сдвиг) и

$$\phi \phi^\dagger = 1, \quad \phi^\dagger \phi = 1 - \pi,$$

где $\pi |0\rangle = |0\rangle$, $\pi |n\rangle = 0$ при $n \geq 1$.

Теперь зафиксируем натуральное число M (число узлов решетки) и рассмотрим тензорное произведение $M+1$ экземпляров $\mathcal{F}_i$, $i = 0, \dots, M$, одномерного пространства Фока: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_M$. Обозначим через ϕ_i , $\phi_i^\dagger$, N_i операторы, которые действуют как ϕ , $\phi^\dagger$, N соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах $\mathcal{F}_j$; например,

$$\phi_i = I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes \phi \otimes I_{i+1} \otimes \dots \otimes I_M,$$

где I_j — тождественный оператор в $\mathcal{F}_j$. Таким образом, операторы коммутируют, если они относятся к различным узлам, и удовлетворяют коммутационным соотношениям (1) в одном и том же узле.

Гамильтониан фазовой модели имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M (\phi_n^\dagger \phi_{n+1} + \phi_n \phi_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M+1 \equiv 1$.

Следуя квантовому методу обратной задачи [7], рассмотрим L -матрицу

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & uI \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

где u — скалярный параметр, а I — тождественный оператор в $\mathcal{F}$. При каждом $n = 0, 1, \dots, M$ матрица L_n удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(u, v)(L_n(u) \otimes L_n(v)) = (L_n(v) \otimes L_n(u))R(u, v) \quad (2)$$

с R -матрицей $R(u, v)$ размера 4×4 , которая задается формулой

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \quad (4)$$

Матрица монодромии определяется как

$$T(u) = L_M(u)L_{M-1}(u) \cdots L_0(u) \quad (\text{матричное произведение}).$$

Она удовлетворяет билинейному соотношению с той же R -матрицей (3), (4):

$$R(u, v)(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))R(u, v). \quad (5)$$

Пусть

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$ матрицы монодромии $T(u)$ действуют в пространстве $\mathcal{F}$. Если обозначить через $\hat{N} = N_0 + \cdots + N_m$ оператор полного числа частиц, то

$$\hat{N}B(u) = B(u)(\hat{N} + 1), \quad \hat{N}C(u) = C(u)(\hat{N} - 1),$$

так что $B(u)$ есть оператор рождения, а $C(u)$ — оператор уничтожения. Операторы $A(u)$ и $D(u)$ не меняют числа частиц.

Обозначим через $|0\rangle_j$ вакуумный вектор в $\mathcal{F}_j$ и через $|0\rangle = \bigotimes_{j=0}^M |0\rangle_j$ глобальный вакуумный вектор в $\mathcal{F}$. Рассмотрим N -частичные векторы состояний вида

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle$$

(согласно алгебраическому анзацу Бете (см. [7]), именно такой вид имеют собственные функции гамильтониана). Мы хотим разложить эти векторы по базисным N -частичным векторам

$$\psi_{n_0, \dots, n_M} = \bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j, \quad n_0 + \dots + n_M = N, \quad (6)$$

где $|n_j\rangle_j = (\phi^\dagger)^{n_j}|0\rangle_j$ есть n_j -частичный вектор в j -м пространстве Фока $\mathcal{F}_j$; числа n_k называются *числами заполнения* вектора (6).

2.2. Реализация фазовой модели в алгебре симметрических функций. Необходимые сведения из теории симметрических функций можно найти в [9].

Базисному вектору (6) с числами заполнения $n_0, \dots, n_M$ мы сопоставляем диаграмму Юнга $\lambda = 1^{n_1} 2^{n_2} \dots$, имеющую n_j строк длины j , $j = 1, \dots, M$, и соответствующую функцию Шура¹⁾ s_λ :

$$\bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j \longleftrightarrow s_\lambda, \quad \lambda = 1^{n_1} 2^{n_2} \dots \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Имея в виду, с одной стороны, соответствие (7), а с другой — стандартную реализацию пространства Фока в алгебре симметрических функций (см., например, [1, гл. 14]), естественно называть j -е пространство Фока $\mathcal{F}_j$ *пространством частиц энергии j* .

Заметим, что соответствие (7) не учитывает число n_0 частиц нулевой энергии. Таким образом, формула (7) задает реализацию подпространства положительной энергии $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_M$ в алгебре симметрических функций Λ , точнее, в ее подпространстве Λ_M , порожденном функциями Шура s_λ , диаграммы которых имеют не более M столбцов (т.е. строки длины не более M). В силу тождества Якоби–Труди [9, I.3.4] подпространство Λ_M можно задать, выбирая²⁾ аргументы симметрических функций так, чтобы

$$h_{M+1} = h_{M+2} = \dots = 0 \quad (8)$$

(подробности см. в доказательстве предложения 2).

С другой стороны, если известно полное число частиц N , то мы можем восстановить число частиц нулевой энергии в базисном векторе, соответствующем функции s_λ , по формуле $n_0 = N - l(\lambda)$, где $l(\lambda)$ — число строк диаграммы λ . Рассмотрим разложение $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}^N \oplus \dots$ пространства $\mathcal{F}$ на N -частичные подпространства $\mathcal{F}^N$, и пусть Λ_M^N — пространство симметрических функций, соответствующее $\mathcal{F}^N$. Заметим, что пространство Λ_M^N натянуто на функции Шура s_λ с диаграммами λ , содержащимися в ящике размера $M \times N$, т.е. имеющими не более N строк и не более M столбцов. Таким образом, все пространство $\mathcal{F}$ может быть реализовано как прямая сумма $\Lambda_M^0 \oplus \Lambda_M^1 \oplus \dots \oplus \Lambda_M^N \oplus \dots$.

¹⁾Напомним, что функции Шура образуют базис в алгебре симметрических функций Λ .

²⁾Это можно сделать, поскольку, как хорошо известно, полные симметрические функции h_k алгебраически независимы в Λ .

Поскольку $B(u)$ — оператор рождения, т.е. увеличивает число частиц на единицу, он переводит Λ_M^N в Λ_M^{N+1} . Поэтому достаточно изучить его действие на пространстве $\widehat{\mathcal{F}} \equiv \Lambda_M$, т.е. оператор $\mathcal{B}(u) := PB(u)P$, где P — проектор из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}$ («забывающий частицы нулевой энергии»).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{B}(u) = u^{-M} \tilde{\mathcal{B}}(u)$. Оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ действует в Λ_M как оператор умножения на $H_M(u^2)$, где $H_M(t) = \sum_{k=0}^M t^k h_k$ — (усеченная) производящая функция полных симметрических функций h_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что оператор $\tilde{\mathcal{B}}$ имеет вид $\sum_{k=0}^M u^{2k} \mathcal{B}_k$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{B}_k$ — оператор умножения на k -ю полную симметрическую функцию h_k . Положим $\phi_j^{-1} = \phi_j$, $\phi_j^0 = 1$, $\phi_j^1 = \phi_j^\dagger$. Так как

$$B(u) = \sum_{j_M, \dots, j_1=1}^2 (L_M(u))_{1j_M} (L_{M-1}(u))_{j_M j_{M-1}} \cdots (L_0(u))_{j_1 2},$$

то

$$\mathcal{B}_k = \sum_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0} \phi_M^{\varepsilon_M} \cdots \phi_1^{\varepsilon_1} = \sum_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0} \mathcal{B}_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0},$$

где суммирование производится по всем наборам $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 0, \dots, M$, удовлетворяющим следующим условиям: (а) пусть ε_l — старший ненулевой элемент, т.е. $\varepsilon_M = \cdots = \varepsilon_{l+1} = 0$ и $\varepsilon_l \neq 0$; тогда $\varepsilon_l = 1$; (б) $\varepsilon_0 \neq -1$; (с) соседние члены имеют разные знаки, т.е. $\varepsilon_{j+1}\varepsilon_j \neq 1$ для любого j ; (д) $\sum_{j=1}^M j\varepsilon_j = k$. Очевидно, что оператор $\mathcal{B}_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0}$ переводит базисный вектор (6) в базисный вектор.

В терминах функций Шура имеем $\phi_j^\dagger s_\mu = s_\lambda$, где диаграмма λ получается из μ вставкой строки длины j , а $\phi_j s_\mu = s_\lambda$, где λ получается из μ удалением строки длины j (при этом $\phi_j s_\mu = 0$, если μ не содержит строк длины j). Обозначим через ν'_i длину i -го столбца диаграммы ν и через $n_i(\nu)$ число строк длины i в ν . Имеем $\nu'_i - \nu'_{i+1} = n_i(\nu)$. Пусть теперь $\mathcal{B}_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0} s_\mu = s_\lambda$, и положим $\theta'_i = \lambda'_i - \mu'_i$. Тогда $n_i(\lambda) = n_i(\mu) + \varepsilon_i$, так что $\theta'_i = \theta'_{i+1} + n_i(\lambda) - n_i(\mu) = \theta'_{i+1} + \varepsilon_i$, откуда

$$\theta'_M = \varepsilon_M, \quad \theta'_{M-1} = \varepsilon_M + \varepsilon_{M-1}, \quad \dots, \quad \theta'_1 = \varepsilon_M + \cdots + \varepsilon_1.$$

Из условия (а) следует, что $\theta'_M = \cdots = \theta'_{l+1} = 0$, $\theta'_l = 1$. Из условия (с) получаем, что $\theta'_i \in \{0, 1\}$, а это означает, что $\lambda \supset \mu$ и косая диаграмма $\lambda \setminus \mu$ содержит не более одной клетки в каждом столбце, т.е. является горизонтальной полосой. Более того, $\sum \theta'_i = k$, так что $\lambda \setminus \mu$ содержит k клеток. Обозначая через $\mathcal{H}_k$ множество горизонтальных полос, состоящих из k клеток, мы получаем

$$\mathcal{B}_k s_\mu = \sum_{\lambda: \lambda \setminus \mu \in \mathcal{H}_k} s_\lambda,$$

откуда в силу формулы Пиери [9, I.5.16] следует, что $\mathcal{B}_k s_\mu = h_k s_\mu$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Усеченную производящую функцию $H_M(t) = \sum_{k=0}^M t^k h_k$ можно также рассматривать как образ полной производящей функции $H(t) = \sum_{k=0}^\infty t^k h_k$ под действием специализации (8): $H_M(t) = H(t)|_{h_{M+1}=h_{M+2}=\cdots=0}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предел регуляризованных операторов рождения $\tilde{\mathcal{B}}(u) = u^M \mathcal{B}(u)$ на подпространстве положительной энергии $\widehat{\mathcal{F}}$ при $M \rightarrow \infty$ есть в точности оператор умножения на $H(u^2)$ в алгебре симметрических функций Λ .

Используя интерпретацию оператора $\mathcal{B}(u)$, полученную в предложении 1, можно легко найти требуемое разложение N -частичного вектора по базисным векторам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Разложение N -частичного вектора по базисным векторам имеет вид

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(u_1^2, \dots, u_N^2) \bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j,$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ , имеющим не более N строк и не более M столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле для производящей функции полных симметрических функций [9, I.2.5] имеем

$$H(u^2) = \prod_i \frac{1}{1 - u^2 x_i}.$$

Заметим, что $\Psi_N(u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{F}^N$, и отождествим $\mathcal{F}^N$ с Λ_M^N , как описано выше. Замечая, что вакуумный вектор соответствует единичной функции $s_{\emptyset} \equiv 1$, и используя предложение 1, получаем

$$\begin{aligned} |\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle &= \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle = (u_1 \cdots u_M)^{-M} \prod_{j=1}^N \tilde{B}(u_j)|0\rangle \\ &= (u_1 \cdots u_M)^{-M} \prod_j \prod_i \frac{1}{1 - u_j^2 x_i}. \end{aligned}$$

Применяя хорошо известное тождество Коши [9, I.4.3], имеем

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = (u_1 \cdots u_M)^{-M} \sum_{\lambda} s_{\lambda}(u_1^2, \dots, u_N^2) s_{\lambda}(x),$$

откуда ввиду (7) следует искомая формула. Ограничения на диаграмму λ получаются из следующих соображений. Во-первых, функция Шура обращается в нуль, если число ненулевых аргументов меньше, чем число ее строк. Поэтому $s_{\lambda}(u_1^2, \dots, u_N^2) = 0$ при $l(\lambda) > N$. С другой стороны, согласно тождеству Якоби–Труди [9, I.3.4], имеем $s_{\lambda} = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^n$, где $n \geq l(\lambda)$. Таким образом, мы видим, что под действием специализации (8) первая строка этого определителя, а следовательно, и s_{λ} обращаются в нуль при $\lambda_1 > M$. $\square$

ЛЕММА 1. Матричные элементы матрицы монодромии $T(u)$ связаны следующими формулами:

$$B(u) = uA(u)\phi_0^{\dagger}, \quad C(u) = u^{-1}\phi_0 A^{\dagger}(u^{-1}), \quad D(u) = \phi_0 A^{\dagger}(u^{-1})\phi_0^{\dagger}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится простой индукцией по M . $\square$

В частности, полагая $\mathcal{A}(u) = PA(u)P$, $\mathcal{C}(u) = PC(u)P$ и $\mathcal{D}(u) = PD(u)P$, имеем

$$\mathcal{A}(u) = u^{-1}\mathcal{B}(u), \quad \mathcal{C}(u) = \mathcal{B}^{\dagger}(u^{-1}), \quad \mathcal{D}(u) = u\mathcal{B}^{\dagger}(u^{-1}).$$

Отсюда следует, например, что при реализации фазовой модели в алгебре симметрических функций оператор уничтожения $\mathcal{C}(u)$ имеет представление

$$\mathcal{C}(u) = u^M \tilde{\mathcal{C}}(u), \quad \tilde{\mathcal{C}}(u) = \tilde{\mathcal{B}}^\dagger(u^{-1}) = H_M^\perp(u^{-2}) = \sum_{n=0}^M u^{-2n} h_n^{\perp, M},$$

где $h_n^{\perp, M}$ — оператор, сопряженный к оператору умножения на h_n в пространстве Λ_M со стандартным скалярным произведением (относительно которого функции Шура образуют ортонормированный базис). Заметим, что оператор $h_n^{\perp, M}$ существенно зависит от M . В пределе при $M \rightarrow \infty$ мы имеем

$$\tilde{\mathcal{C}}(u) = H^\perp(u^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n} h_n^\perp, \quad (9)$$

где $h_n^\perp$ — оператор, сопряженный к оператору умножения на h_n во всей алгебре Λ (ср. [9, Ex. I.5.3, Ex. I.5.29]).

2.3. Вертексные операторы и перечисление плоских разбиений.

ЛЕММА 2. В пределе при $M \rightarrow \infty$ оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ представляется в виде вертексного оператора:

$$\tilde{\mathcal{B}}(u) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k} \alpha_{-k} \right), \quad (10)$$

где α_{-k} , $k = 1, 2, \dots$, — операторы рождения свободных бозонов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известной формуле [9, I.2.10],

$$\frac{d}{dt} \ln H(t) = P(t),$$

где $P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} p_k$ — производящая функция степенных сумм Ньютона p_k . Таким образом,

$$H(t) = \exp \left(\int P(t) \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} p_k \right).$$

С другой стороны, известно, что при реализации пространства Фока как алгебры симметрических функций оператор рождения свободного бозона α_{-k} соответствует умножению на p_k , откуда в силу предложения 1 следует формула (10). $\square$

Заметим, что вертексный оператор, стоящий в правой части формулы (10), есть в точности оператор, использовавшийся Окуньковым и Решетихиным в работе [10] в связи с вычислением корреляционных функций для плоских разбиений. А именно, в обозначениях упомянутой работы

$$\tilde{B}_0(q^{\frac{j}{2}}) = \Gamma_+(\phi_j), \quad \text{где } \phi_j(z) = \phi_{3D}[j](z) = \frac{1}{1 - q^j z}.$$

В частности, при реализации пространства Фока как алгебры симметрических функций вертексный оператор, связанный с процессом Шура, описывающим плоские разбиения, есть в точности оператор умножения на производящую функцию полных симметрических функций:

$$\Gamma_+(\phi_{3D}[j]) = H(q^j).$$

Ввиду (9) предел при $M \rightarrow \infty$ регуляризованных операторов уничтожения $\tilde{\mathcal{C}}(v) = v^{-M} \mathcal{C}(v)$ представляется в виде вертексного оператора

$$\exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{-2k}}{k} \alpha_k \right).$$

2.4. Коммутационные соотношения для «усеченных» операторов.

Используя коммутационные соотношения для вертексных операторов (см., например, [1, (14.10.12)] или [10, (11)]), нетрудно получить известное коммутационное соотношение [9, Ex. I.5.29, (2)] для операторов H и $H^\perp$ во всей алгебре симметрических функций Λ :

$$H^\perp(u)H(v) = \frac{1}{1-uv} H(v)H^\perp(u). \quad (11)$$

Однако в подпространстве Λ_M , натянутом на функции Шура с диаграммами, имеющими не более M столбцов, вертексное представление (10) и коммутационное соотношение (11) уже не выполняются. Тем не менее коммутационное соотношение для оператора $H_M(v) = \sum_{k=0}^M v^k h_k$ и сопряженного к нему в Λ_M оператора $H_M^\perp(v)$ можно получить, используя аппарат КМОЗ [7] и описанную выше интерпретацию фазовой модели в терминах симметрических функций. А именно, из билинейного соотношения (5) следует, в частности, что

$$D(u)B(v) = \frac{u^2}{u^2 - v^2} B(v)D(u) - \frac{uv}{u^2 - v^2} B(u)D(v).$$

Применяя предложение 1 и лемму 1, получаем

$$H_M^\perp(u)H_M(v) = \frac{1}{1-uv} [H_M(v)H_M^\perp(u) - (uv)^{M+1}H_M(u^{-1})H_M^\perp(v^{-1})]. \quad (12)$$

Мы видим, что в формальном пределе при $M \rightarrow \infty$ соотношение (12) при $|uv| < 1$ сводится к (11).

Разлагая обе части равенства (12) в степенной ряд по u, v и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, мы получаем следующие коммутационные соотношения в Λ_M :

$$h_m^{\perp, M} h_n = \sum_{i=0}^{\min\{m, n\}} h_{n-i} h_{m-i}^{\perp, M} - \sum_{i=0}^{\min\{m, n\}-1} h_{M+1-m+i} h_{M+1-n+i}^{\perp, M}.$$

ПРИМЕРЫ. При $M = 1$ получаем в Λ_1 соотношение $h_1^{\perp, 1} h_1 = 1$. Действительно, Λ_1 порождается функциями Шура с одностолбцовыми диаграммами, так что операторы h_1 и $h_1^{\perp, 1}$ соответствуют добавлению и удалению одной клетки, т. е. являются односторонними сдвигами.

При $M = 2$ получаем

$$h_1^{\perp, 2} h_1 = h_1 h_1^{\perp, 2} + 1 - h_2 h_2^{\perp, 2}, \quad h_1^{\perp, 2} h_2 = h_1, \quad h_2^{\perp, 2} h_1 = h_1^{\perp, 2}, \quad h_2^{\perp, 2} h_2 = 1.$$

§3. q -Бозонная модель и функции Холла–Литтлвуда

3.1. q -Бозонная модель. Фазовая модель, рассмотренная в предыдущем параграфе, является частным случаем так называемой q -бозонной модели ([4], [6]).

Пусть q — неотрицательный параметр. Рассмотрим q -бозонную алгебру, порожденную тремя операторами B , $B^\dagger$, N , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[N, B] = -B, \quad [N, B^\dagger] = B^\dagger, \quad [B, B^\dagger] = q^{2N}.$$

Положим

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}, \quad [n]! = \prod_{j=1}^n [j].$$

Стандартная реализация q -бозонной модели в пространстве Фока $\mathcal{F}$ имеет вид

$$B^\dagger |n\rangle = [n+1]^{1/2} |n+1\rangle, \quad B |n\rangle = [n]^{1/2} |n-1\rangle, \quad B|0\rangle = 0, \quad N |n\rangle = n |n\rangle.$$

Однако нам будет удобнее использовать другую реализацию, а именно

$$B^\dagger |n\rangle = [n+1] |n+1\rangle, \quad B |n\rangle = |n-1\rangle, \quad B|0\rangle = 0, \quad N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (13)$$

Для того чтобы операторы B и $B^\dagger$ были сопряжены, необходимо нормировать фоковские векторы таким образом, чтобы

$$\langle n | n \rangle^2 = \frac{1}{[n]!}. \quad (14)$$

Еще одна реализация q -бозонной модели в пространстве Фока задается формулой

$$B^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle, \quad B |n\rangle = [n] |n-1\rangle, \quad B|0\rangle = 0, \quad N |n\rangle = n |n\rangle \quad (15)$$

с нормировкой

$$\langle n | n \rangle^2 = [n]!. \quad (16)$$

Легко видеть, что фазовая модель является частным случаем q -бозонной модели при $q = 0$. При $q \rightarrow 1$ операторы B и $B^\dagger$ переходят в канонические бозонные операторы b и $b^\dagger$, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[b, b^\dagger] = 1$.

Теперь применим ту же схему, что и при рассмотрении фазовой модели в §2: зафиксируем число узлов M , рассмотрим тензорное произведение $M+1$ экземпляров $\mathcal{F}_i$, $i = 0, \dots, M$, одномерного пространства Фока, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_M$, и обозначим через B_i , $B_i^\dagger$, N_i операторы, действующие как B , $B^\dagger$, N соответственно в $\mathcal{F}_i$ и тождественно на остальных пространствах $\mathcal{F}_j$. Нам будет удобно использовать реализацию (13) q -бозонной алгебры при $i = 1, \dots, M$ и реализацию (15) при $i = 0$.

Заметим, что ввиду равенств (14) и (16) квадраты норм базисных N -частичных векторов (6) равны

$$\|\psi_{n_0, \dots, n_M}\|^2 = \frac{[n_0]}{\prod_{j=1}^M [n_j]!}. \quad (17)$$

Гамильтониан q -бозонной модели имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M (B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n)$$

с периодическими граничными условиями $M+1 \equiv 1$.

L -матрица для q -бозонной модели задается формулами

$$L_0(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & B_0^\dagger \\ (1-q^2)B_0 & uI \end{pmatrix}, \quad L_n(u) = \begin{pmatrix} u^{-1}I & (1-q^2)B_n^\dagger \\ B_n & uI \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Эта L -матрица удовлетворяет билинейному соотношению (2) с R -матрицей

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$f(v, u) = \frac{q^{-1}u^2 - qv^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}(q^{-1} - q). \quad (20)$$

Заметим, что R -матрица (3), (4) фазовой модели получается из R -матрицы q -бозонной модели в ренормализованном пределе при $q \rightarrow 0$:

$$R_{\text{phase}} = \lim_{q \rightarrow 0} qR_{q\text{-boson}}.$$

Обозначим через

$$T(u) = L_M(u) \cdots L_0(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

матрицу монодромии q -бозонной модели. Она удовлетворяет билинейному соотношению (5) с R -матрицей (19), (20).

3.2. Функции Холла–Литтлвуда. В этом разделе мы кратко напомним основные факты, связанные с симметрическими функциями Холла–Литтлвуда; подробности см. в [9, Ch. III].

Симметрические функции Холла–Литтлвуда с параметром $t \geq 0$, индексируемые диаграммами Юнга λ , можно определить, например, следующим образом. Сначала для конечного числа $n \geq l(\lambda)$ переменных $x_1, \dots, x_n$ положим

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i < j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right),$$

где $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n , действующая подстановками переменных, и

$$v_\lambda(t) = \prod_{i \geq 0} v_{n_i(\lambda)}(t), \quad v_n(t) = \prod_{i=1}^n \frac{1-t^i}{1-t}.$$

Далее, заметим, что для любой диаграммы λ , такой, что $l(\lambda) \leq n$, выполнено равенство $P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = P_\lambda(x_1, \dots, x_n, 0; t)$, так что можно определить симметрическую функцию $P_\lambda(x; t)$ от бесконечного числа переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}[t]$ как индуктивный предел функций $P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t)$ относительно проекций, заменяющих последнюю переменную на нуль. Функции $P_\lambda(x; t)$ образуют $\mathbb{Z}[t]$ -базис алгебры $\Lambda[t]$ симметрических функций с коэффициентами

из $\mathbb{Z}[t]$. Они осуществляют интерполяцию между функциями Шура s_λ и мономиальными симметрическими функциями m_λ :

$$P_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x), \quad P_\lambda(x; 1) = m_\lambda(x). \quad (21)$$

Удобно ввести еще одно семейство симметрических функций $Q_\lambda(x; t)$, которые отличаются от $P_\lambda(x; t)$ скалярным множителем. А именно, положим

$$Q_\lambda(x; t) = b_\lambda(t)P_\lambda(x; t),$$

где

$$b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} \phi_{n_i(\lambda)}(t), \quad \phi_n(t) = (1-t)(1-t^2) \cdots (1-t^n).$$

В случае $q = 0$ имеем $Q_\lambda(x; 0) = P_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x)$.

Теперь положим

$$q_r(x; t) = Q_{(r)}(x; t) = (1-t)P_{(r)}(x; t), \quad r \geq 1, \quad q_0(x; t) = 1.$$

Производящая функция для q_r равна

$$Q(u) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(x; t)u^r = \prod_i \frac{1 - x_i t u}{1 - x_i u} = \frac{H(u)}{H(tu)}, \quad (22)$$

где $H(u)$ — производящая функция полных симметрических функций. В частности,

$$q_r(x, 0) = h_r(x), \quad (23)$$

$$q_r(x; 1) = 0 \quad \text{при } r \geq 1. \quad (24)$$

Положим

$$q_\lambda(x; t) = \prod_{i \geq 0} q_{\lambda_i}(x; t). \quad (25)$$

Симметрические функции $q_\lambda(x; t)$ образуют $\mathbb{Q}[t]$ -базис в $\Lambda[t]$.

При $t \neq 1$ введем в $\Lambda[t]$ скалярное произведение, потребовав, чтобы базисы $\{q_\lambda\}$ и $\{m_\lambda\}$ были двойственны друг другу:

$$\langle q_\lambda(x; t), m_\mu(x) \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Тогда базисы $\{P_\lambda\}$ и $\{Q_\lambda\}$ также двойственны:

$$\langle P_\lambda(x; t), Q_\mu(x; t) \rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

так что квадрат нормы функции Холла–Литтлвуда $P_\lambda(x; t)$ равен

$$\langle P_\lambda(x; t), P_\lambda(x; t) \rangle = \frac{1}{b_\lambda(t)}. \quad (26)$$

Заметим, что в случае $t = 0$ это скалярное произведение совпадает со стандартным скалярным произведением в Λ (относительно которого функции Шура образуют ортонормированный базис).

Обобщение тождества Коши на случай функций Холла–Литтлвуда имеет вид

$$\prod_{i,j} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} P_\lambda(x; t) Q_\lambda(y; t) = \sum_{\lambda} b_\lambda(t) P_\lambda(x; t) P_\lambda(y; t). \quad (27)$$

Имеется также обобщение формулы Пиери; а именно,

$$P_\mu q_r = \sum_{\lambda: \lambda \setminus \mu \in \mathcal{H}_k} \phi_{\lambda \setminus \mu}(t) P_\lambda, \quad (28)$$

где

$$\phi_{\lambda \setminus \mu}(t) = \prod_{i \in I} (1 - t^{n_i(\lambda)}); \quad (29)$$

здесь $\theta = \lambda \setminus \mu$ и $I = \{i : \theta'_i = 1, \theta'_{i+1} = 0\}$ (напомним, что θ'_i есть длина i -го столбца косой диаграммы θ , которая в случае горизонтальной полосы может быть равна 0 или 1).

3.3. Реализация q -бозонной модели в алгебре симметрических функций. Будем следовать той же схеме, что в разд. 2.2 для фазовой модели.

Базисному вектору (6) сопоставим функцию Холла–Литтлвуда $P_\lambda(x; q^2)$, диаграмма которой определяется числами заполнения:

$$\bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j \leftrightarrow P_\lambda(x; q^2), \quad \lambda = 1^{n_1} 2^{n_2} \dots$$

Заметим, что в силу равенств (17) и (26) это соответствие не является изометрией.

Положим $\mathcal{B}(u) = PB(u)P$, где P — проектор на подпространство положительной энергии. Обозначим через $\Lambda_M[q^2]$ подпространство в $\Lambda[q^2]$, натянутое на функции Холла–Литтлвуда $P_\lambda(x; q^2)$, диаграммы которых имеют не более M столбцов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{B}(u) = u^{-M} \tilde{\mathcal{B}}(u)$. Оператор $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ действует в $\Lambda_M[q^2]$ как оператор умножения на $Q_M(u^2)$, где $Q_M(t) = \sum_{k=0}^M t^k q_k(x; q^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как в доказательстве предложения 1, мы видим, что

$$\mathcal{B}_k(u) P_\mu(x; q^2) = \sum_{\lambda: \lambda \setminus \mu \in \mathcal{H}_k} c(\mu, \lambda) P_\lambda(x; q^2),$$

но теперь коэффициент $c(\mu, \lambda)$ не обязательно равен единице. Нетрудно вычислить этот коэффициент. В самом деле, он возникает при применении операторов рождения $B_j^\dagger$ с $j \geq 1$. А именно, если $\mathcal{B}_{\varepsilon_M, \dots, \varepsilon_0} s_\mu = s_\lambda$, то $c(\mu, \lambda)$ есть произведение множителей $(1 - q^2)[n_i(\mu) + 1] = 1 - q^{2(n_i(\mu)+1)}$ по всем $i \geq 1$, таким, что $\varepsilon_i = 1$. Но последнее условие эквивалентно тому, что $n_i(\lambda) = n_i(\mu) + 1$, или $\theta'_i = 1, \theta'_{i+1} = 0$, т.е. произведение берется по всем i из множества I , участвующего в формуле (29). Таким образом,

$$c(\mu, \lambda) = \prod_{i \in I} (1 - q^{2n_i(\lambda)}) = \phi_{\lambda \setminus \mu}(q^2),$$

и предложение следует из формулы типа Пиери (28) для функций Холла–Литтлвуда. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в случае полных симметрических функций, усеченную производящую функцию $Q_M(t)$ можно рассматривать как образ полной производящей функции $Q(t)$ под действием подходящей специализации:

$$Q_M(t) = Q(t)|_{q_{M+1}=q_{M+2}=\dots=0}. \quad (30)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеется корректно определенный предел операторов $\tilde{\mathcal{B}}(u)$ при $M \rightarrow \infty$. При реализации q -бозонной модели в алгебре симметрических функций он совпадает с оператором умножения на $Q(u^2) = H(u^2)/H(q^2 u^2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle$. Тогда

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}(u_1^2, \dots, u_N^2; q^2) \bigotimes_{j=0}^M |n_j\rangle_j,$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ , имеющим не более N строк и не более M столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 2 и использует предложение 3, формулу (22) для производящей функции функций $q_k(x; t)$ и тождество типа Коши (27) для функций Холла–Литтлвуда. Ограничение на диаграммы λ следует из того, что (а) $P_{\lambda}(x; t) = 0$, если число ненулевых переменных x_i меньше, чем число строк $l(\lambda)$ (это легко вытекает из определения функций Холла–Литтлвуда), и (б) матрица перехода от базиса $\{Q_{\lambda}\}$ к базису $\{q_{\lambda}\}$ является строго нижнетреугольной ([9, III.2.16]), так что из специализации (30) следует в силу (25), что $Q_{\lambda} = 0$ при $\lambda_1 > M$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $q = 0$ результаты этого раздела в точности воспроизводят результаты разд. 2.2 ввиду соотношений (21), (23).

В случае $q = 1$ L -матрица (18) вырождается в нижнетреугольную матрицу при $n = 1, \dots, M$ и в верхнетреугольную матрицу при $n = 0$, так что $B(u) = u^{-M} B_0^+$, откуда $\tilde{\mathcal{B}}(u) = 1$, в соответствии с (24).

Автор выражает благодарность Н. М. Боголюбову за введение в тематику, связанную с квантовым методом обратной задачи и q -бозонной моделью, и А. М. Вершику за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [2] П. П. Кулиш, “Контракция квантовых алгебр и q -осцилляторы”, *Теор. матем. физ.*, **86** (1991), 157–160.
- [3] N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions, bosons, and the quantum inverse scattering method*, PDMI Preprint 1/2004, 2004.
- [4] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, “Critical behavior for correlated strongly coupled boson systems in 1 + 1 dimensions”, *Phys. Rev. Lett.*, **25** (1994), 3933–3936.
- [5] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, “Correlators of the phase model”, *Phys. Lett. A*, **231** (1997), 347–352.
- [6] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, “Correlation functions for a strongly correlated boson system”, *Nucl. Phys. B*, **516** [FS] (1998), 501–528.
- [7] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [8] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, “On the q -oscillator and the quantum algebra $\mathfrak{su}_q(1, 1)$ ”, *J. Phys. A*, **23** (1990), L415–L419.
- [9] I. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [10] A. Okounkov, N. Reshetikhin, “Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram”, *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 581–603.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: natalia@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
10 августа 2005 г.