Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Иσμαгилов, Об операторах Рака, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:31:21

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [2] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [3] Н. Triebel, *Math. Nachr.*, **69** (1975), 57–60. [4] L. Maligranda, *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo*, **10** (1985), 113–118. [5] R. Wallsten, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 1902, 1988, 410–419. [6] G. Pisier, *Pacific J. Math.*, **155** (1992), 341–368. [7] S. Janson, *Arkiv Math.*, **31** (1993), 307–338. [8] С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *Алгебра и анализ*, **8:4** (1996), 75–109. [9] J. Löfström, *Interpolation of subspaces*, Technical report no. 10, Univ. of Göteborg, 1997. [10] S. Ivanov, N. Kalton, *Алгебра и анализ*, **13:2** (2001), 93–115. [11] S. V. Astashkin, *J. Math. Math. Sci.*, **25:7** (2001), 451–465. [12] S. Kaijser, P. Sunehag, in: *Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics* (Lund 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, 345–353. [13] С. В. Асташкин, *Функц. анализ и его прил.*, **39:2** (2005), 61–64. [14] С. В. Асташкин, *Алгебра и анализ*, **17:2** (2005), 33–69. [15] P. Sunehag, *J. Approx. Theory*, **130** (2004), 78–98. [16] N. Krugljak, L. Maligranda, L.-E. Persson, *Arkiv Mat.*, **37** (1999), 323–344.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Department of Mathematics, Uppsala University
e-mail: peter@math.uu.se

Поступило в редакцию
20 апреля 2005 г.

УДК 517.986.4

Об операторах Рака*

© 2006. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Обычно коэффициенты Рака определяются для тензорных произведений конечномерных представлений полупростых групп Ли ([1], [2]). В дальнейшем это определение переносилось на представления со старшим весом группы $SL(2, \mathbb{R})$; см. [3]. В этом случае спектр произведения дискретен, что позволяет определить указанные коэффициенты «аналитическим продолжением по целочисленным параметрам» из формул для конечномерного случая. В работе [5] указаны коэффициенты Рака для трех представлений этой же группы в предположении, что хотя бы два из них содержатся в дискретной серии.

В этой заметке в качестве обобщения коэффициентов Рака вводятся *операторы Рака* для произвольной локально компактной группы с «хорошим» двойственным пространством. Приводятся явные формулы для операторов Рака, связанных с представлениями основной серии группы $G = PSL(2, \mathbb{C})$ (тензорные произведения этих представлений были изучены Наймарком [4]).

1. Операторы Рака.

Введем основное определение.

Пусть G — локально компактная группа типа I и $\hat{G}$ — двойственное пространство. Пусть дано непрерывное поле гильбертовых пространств H_c и действующих в них представлений T_c (T_c принадлежит классу эквивалентности $c \in \hat{G}$). Через δc обозначим меру Планшереля на $\hat{G}$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-0001.

Перейдем к тензорным произведениям. Предположим, что в $\widehat{G}$ выделено открытое подмножество $\mathcal{M}$, «замкнутое относительно разложений тензорных произведений»; это означает, что для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$ зафиксирован унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $H_{a_1} \otimes H_{a_2} \simeq \int_{\mathcal{M}}^{\oplus} H_{cp(a_1, a_2; c)} \delta c$, разлагающий произведение $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ на неприводимые представления; здесь $c \mapsto p(a_1, a_2; c)$ — борелевская функция. Таким образом, кратность разложения не превосходит 1. (Эти жесткие ограничения наложены для упрощения изложения; общий случай будет рассмотрен в дальнейшем.) Вектор $h_1 \otimes h_2$ перейдет при этом в вектор-функцию $c \mapsto Q(a_1, a_2; c)(h_1 \otimes h_2)$.

Рассмотрим теперь произведение $T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ и разложим его на неприводимые представления, следуя известной стратегии: сначала разлагаем $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$, затем разлагаем произведение каждого «слагаемого» (здесь мы употребили кавычки, ибо имеем дело не с прямыми суммами, а с прямыми интегралами) на T_{a_3} . Применим это к вектору $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$, $h_k \in H_{a_k}$, $k = 1, 2, 3$. Сначала вектор $h_1 \otimes h_2$ перейдет в вектор-функцию $c \mapsto Q(a_1, a_2; c)(h_1 \otimes h_2)$. Затем для почти каждого $c \in \mathcal{M}$ вектор $Q(a_1, a_2; c)(h_1 \otimes h_2) \otimes h_3$ перейдет в вектор-функцию $l \mapsto Q(c, a_3; l)(Q(a_1, a_2; c)(h_1 \otimes h_2) \otimes h_3)$. В итоге вектор $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$ перешел в вектор-функцию $(c, l) \mapsto Q_1(c, l)(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3)$, $(c, l) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$.

Пусть E — носитель (борелевский) меры $p(a_1, a_2; c)p(c, a_3; l) \delta c \delta l$, а $\mathcal{H}(a_1, a_2, a_3)$ — гильбертово пространство вектор-функций $(c, l) \mapsto f(c, l)$, $(c, l) \in E$, принимающих значения в H_l ; скалярное произведение в нем имеет вид $(f_1, f_2) = \int_E (f_1(c, l), f_2(c, l))_l \delta c \delta l$. (Здесь $(\ , \)_l$ означает скалярное произведение в H_l .) Тогда соответствие, переводящее любой вектор $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$ в вектор-функцию $(c, l) \mapsto \sqrt{p(a_1, a_2; c)p(c, a_3; l)} Q_1(c, l)(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3)$, $(c, l) \in E$, продолжается до унитарного изоморфизма гильбертовых пространств $H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \mathcal{H}(a_1, a_2, a_3)$. Ясно, что $\mathcal{H}(a_1, a_2, a_3)$ — это прямой интеграл

$$\int_{E^\circ}^{\oplus} (H_l \otimes L_2(E_l)) \delta l,$$

где E° — образ множества E при проектировании произведения $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ на второй сомножитель, а E_l — прообраз точки l . Итак, мы пришли к унитарному изоморфизму

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \int_{E^\circ}^{\oplus} (H_l \otimes L_2(E_l)) \delta l. \quad (1)$$

Повторим теперь этот путь, разложив сначала тензорное произведение $T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ и затем тензорно умножив T_{a_1} на каждое «слагаемое» этого разложения. В итоге получим второй унитарный изоморфизм

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \int_{E^\circ}^{\oplus} (H_l \otimes L_2(E'_l)) \delta l. \quad (2)$$

(Гильбертовы пространства $L_2(E_l), L_2(E'_l)$ построены по мере δ .) Из изоморфизмов (1) и (2) получаем унитарный изоморфизм

$$\int_{E^\circ}^{\oplus} (H_l \otimes L_2(E_l)) \delta l \simeq \int_{E^\circ}^{\oplus} (H_l \otimes L_2(E'_l)) \delta l.$$

Этот изоморфизм перестановочен с представлениями группы G . Следовательно, он задается зависящим от $l \in \widehat{G}$ набором унитарных операторов

$$R_l: L_2(E_l) \rightarrow L_2(E'_l), \quad l \in E^\circ.$$

Это и есть (по определению) набор операторов Рака.

2. Операторы Рака для $G = PSL(2, \mathbb{C})$. Каждое комплексное число $a = m + i\rho \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}$ задает неприводимое унитарное представление основной серии

$$(T_a(g)f)(z) = (\beta z + \delta)^{2m} |\beta z + \delta|^{-2m+2i\rho} f(zg), \quad f \in L_2(\mathbb{C}),$$

где

$$g = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}), \quad zg = (\alpha z + \gamma)(\beta z + \delta)^{-1}.$$

Так как $T_a \simeq T_{-a}$, то нам достаточно точек $a \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+$. Мера Планшереля — это $\delta c = |c|^2 dc$, где dc — обычная мера Лебега на каждой полупрямой $m + i\mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$. Сейчас мы построим операторы Рака, связанные с представлениями T_{a_k} , $a_k = m_k + i\rho_k$, $k = 1, 2, 3$, в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+, \delta c)$.

Введем функцию

$$u(z) = \Gamma(z/2) (\overline{\Gamma(z/2)})^{-1}, \quad z \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R},$$

а также обобщенную функцию $w(c) = (c-0)^{-1}$ как функционал на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$ вида

$$\langle w, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{Z} + i\mathbb{R}} (c - \varepsilon)^{-1} \phi(c) dc, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}).$$

Нам понадобятся унитарные операторы M_1, M_2, M_3 вида

$$(M_1 f)(c) = \bar{u}(-a_3 - l - c + 1) \bar{u}(-a_1 + a_2 + c + 1) f(c), \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+, \delta c),$$

$$(M_2 f)(h) = \bar{u}(-a_1 + a_2 + a_3 + l + h + 1) \bar{u}(h + 1) \bar{u}(-2a_1 + h + 1) \cdot \bar{u}(-a_1 + a_2 - a_3 + h + 1) f(h), \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}, dh),$$

$$(M_3 f)(c) = u(-a_1 - c - l + 1) u(a_2 - a_3 + c + 1) f(c), \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+, \delta c).$$

Зададим, далее, интегральные операторы $K_1, K_2: L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}, dh) \rightarrow L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+, \delta c)$ формулами

$$(K_1 f)(c) = 4\pi \int u(-a_1 + a_2 - c + h) u(-a_1 + a_2 + c + h) w(-\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{c} + \bar{h}) \cdot w(-\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{c} + \bar{h}) f(h) dh, \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}, dh),$$

$$(K_2 f)(c) = \int u(-a_1 + c + h) u(-a_1 + l - c + h) w(-\bar{a}_1 + \bar{c} + \bar{h}) \cdot w(-\bar{a}_1 + \bar{l} - \bar{c} + \bar{h}) f(h) dh, \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}, dh).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Операторы K_1 и K_2 унитарны.

ТЕОРЕМА. Операторы Рака, построенные для представлений основной серии T_{a_k} , $a_k \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, 3$, группы $G = PSL(2, \mathbb{C})$, представимы в виде $R_l = (-1)^{m_1+m_3} M_3 K_2 M_2 K_1^* M_1$, $l \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}_+$.

Эта теорема позволяет выразить R_l в виде интегрального оператора, ядро которого получается однократным интегрированием по $\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$. Интеграл можно выразить через суммы, содержащие G -функции Мейера. Еще одна попытка

упрощения состоит в переходе от интегрирования по $\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$ к интегрированию по двойственной группе $\mathbb{C}^*$. При этом ядра выражаются через общие гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{7,3}$. Ю. А. Неретин полагает, тем не менее, что указанный интеграл выражается через общеупотребительные функции. (*Примечание при корректуре.* Это предположение подтвердилось.)

Автор благодарит Ю. А. Неретина за ряд полезных замечаний и указание на работу [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. И. Голод, *Математические основы теории симметрий*, Научн.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001. [2] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985. [3] В. А. Кныш, П. П. Пипирайте, Ю. Ф. Смирнов, *Ядерная физика*, **22**:5 (1975), 1063–1072. [4] М. А. Наймарк, *Труды ММО*, **5** (1959), 121–154. [5] W. Groenewelt, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.CA/0501511>.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступило в редакцию
24 сентября 2005 г.

УДК 517.914

Об асимптотическом распределении спектра оператора по неприводимым представлениям его группы симметрий*

© 2006. В. Н. КАРПУШКИН

В работе доказано, что асимптотически представление конечной группы в пространстве собственных функций эллиптического оператора на римановом многообразии, коммутирующего с эффективным действием рассматриваемой группы, кратно регулярному представлению этой группы.

1. Формулировка результата. Пусть B — связное компактное l -мерное гладкое ориентируемое многообразие (быть может, с краем), на котором эффективно действует конечная группа G из m элементов (эффективность означает, что имеется орбита, состоящая из m точек). Действие элемента $g \in G$ обозначим через $M(g)$. Зафиксируем G -инвариантную риманову метрику и соответствующую инвариантную меру μ на B .

Пусть $L_2(B)$ — пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу функций на B . Действие группы G на B индуцирует представление $Q(g)$ этой группы в $L_2(B)$. В силу инвариантности меры это представление ортогонально.

Пусть группа G имеет n неприводимых вещественных неэквивалентных представлений. Обозначим через Γ^i максимальное векторное подпространство функций из $L_2(B)$, преобразующихся по i -му неприводимому представлению.

Пусть P есть G -инвариантный формально самосопряженный полуограниченный (снизу) эллиптический дифференциальный оператор четного порядка с гладкими коэффициентами на пространстве гладких функций на многообразии B , обращающихся в 0 в окрестности края ∂B . Пусть $\tilde{P}$ — расширение

*Работа выполнена при поддержке гранта «Школа Арнольда».