Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Об асимптотическом распределении спектра оператора по неприводимым представлениям его группы симметрий, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 72–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:48:53

упрощения состоит в переходе от интегрирования по $\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$ к интегрированию по двойственной группе $\mathbb{C}^*$. При этом ядра выражаются через общие гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{7,3}$. Ю. А. Неретин полагает, тем не менее, что указанный интеграл выражается через общеупотребительные функции. (*Примечание при корректуре.* Это предположение подтвердилось.)

Автор благодарит Ю. А. Неретина за ряд полезных замечаний и указание на работу [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. И. Голод, *Математические основы теории симметрий*, Научн.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001. [2] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985. [3] В. А. Кныш, П. П. Пипирайте, Ю. Ф. Смирнов, *Ядерная физика*, **22**:5 (1975), 1063–1072. [4] М. А. Наймарк, *Труды ММО*, **5** (1959), 121–154. [5] W. Groenewelt, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.CA/0501511>.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступило в редакцию
24 сентября 2005 г.

УДК 517.914

Об асимптотическом распределении спектра оператора по неприводимым представлениям его группы симметрий*

© 2006. В. Н. КАРПУШКИН

В работе доказано, что асимптотически представление конечной группы в пространстве собственных функций эллиптического оператора на римановом многообразии, коммутирующего с эффективным действием рассматриваемой группы, кратно регулярно представлению этой группы.

1. Формулировка результата. Пусть B — связное компактное l -мерное гладкое ориентируемое многообразие (быть может, с краем), на котором эффективно действует конечная группа G из m элементов (эффективность означает, что имеется орбита, состоящая из m точек). Действие элемента $g \in G$ обозначим через $M(g)$. Зафиксируем G -инвариантную риманову метрику и соответствующую инвариантную меру μ на B .

Пусть $L_2(B)$ — пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу функций на B . Действие группы G на B индуцирует представление $Q(g)$ этой группы в $L_2(B)$. В силу инвариантности меры это представление ортогонально.

Пусть группа G имеет n неприводимых вещественных неэквивалентных представлений. Обозначим через Γ^i максимальное векторное подпространство функций из $L_2(B)$, преобразующихся по i -му неприводимому представлению.

Пусть P есть G -инвариантный формально самосопряженный полуограниченный (снизу) эллиптический дифференциальный оператор четного порядка с гладкими коэффициентами на пространстве гладких функций на многообразии B , обращающихся в 0 в окрестности края ∂B . Пусть $\tilde{P}$ — расширение

*Работа выполнена при поддержке гранта «Школа Арнольда».

этого оператора по Фридрихсу (см. [10]). Для оператора S обозначим через $N(S, \lambda)$ (соответственно через $N^i(S, \lambda)$) число собственных значений оператора S , меньших λ , с учетом кратности (соответственно тех из них, для которых собственные функции принадлежат Γ^i).

Долей i -го неприводимого представления группы G в ее регулярном представлении (см. [8]) называется число $s_i d_i / m$, где s_i — кратность i -го неприводимого представления в регулярном представлении, а d_i — его размерность.

В комплексной ситуации $s_i = d_i$, а доля совпадает с мерой Планшереля (см. [2]).

Число $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} N^i(\tilde{P}, \lambda) / N(\tilde{P}, \lambda)$ (если такой предел существует) называется асимптотической долей i -го неприводимого представления группы G в пространстве собственных функций оператора $\tilde{P}$.

Пусть существует фундаментальная область A группы G на B (см. [6]), состоящая из конечного числа компонент связности и измеримая по Жордану. Точнее, предположим, что существует $T < +\infty$ карт (K_t, φ_t) на B , таких, что $\varphi_t: K_t \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\bigcup_{t=1}^T K_t \supset A$ и $\nu(\varphi_t(\partial A \cap K_t)) = 0$, где ν — мера Жордана в $\mathbb{R}^l$.

ТЕОРЕМА 1. *Асимптотическая доля любого неприводимого представления группы G в пространстве вещественнозначных собственных функций оператора $\tilde{P}$ существует и равна его доле в регулярном вещественном представлении группы G .*

ТЕОРЕМА 2. *Асимптотическая доля любого неприводимого представления группы G в пространстве комплекснозначных собственных функций оператора $\tilde{P}$ существует и равна его мере Планшереля.*

Теоремы 1 и 2 эквивалентны. Поскольку доказательство основано на вещественных аргументах (вариационном принципе), мы будем доказывать теорему 1.

2. Доказательство результата. Для открытого подмножества $U \subset B$ обозначим через $C_0^\infty(U)$ пространство гладких функций с носителем, содержащимся в U . Пусть $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r \leq \dots$ — собственные значения оператора $\tilde{P}$ с учетом кратности.

Из предположений о фундаментальной области A следует, что если $B_e = A \setminus \partial A$ и $B_g = M(g)B_e$, где e — единица группы G , то подмножества B_g многообразия B открыты, измеримы по Жордану, состоят из конечного числа компонент связности, попарно не пересекаются и $\mu(B) = \mu(\bigcup_{g \in G} B_g)$.

ЛЕММА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытые подмножества B_g^ε множества B с гладкими границами, такие, что замыкание подмножества B_g^ε содержится в B_g , $\mu(B_g) > \mu(B_g^\varepsilon) > (1 - \varepsilon)\mu(B_g)$ и $M(g)B_e^\varepsilon = B_g^\varepsilon$ для всех $g \in G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предположений о фундаментальной области A .

Пусть $B^\varepsilon = \bigcup_{g \in G} B_g^\varepsilon$, P_ε — сужение оператора P на $C_0^\infty(B^\varepsilon)$ и $\tilde{P}_\varepsilon$ — расширение по Фридрихсу оператора P_ε .

ЛЕММА 2. *В подпространстве собственных функций оператора $\tilde{P}_\varepsilon$, отвечающих произвольному собственному значению λ , существует (конечный) базис*

$\{W_{l,g}\}$, $1 \leq l \leq K_\varepsilon(\lambda)$, $g \in G$, такой, что $W_{l,g}$ обращается в нуль вне замыкания множества B_g^ε и $Q(g)(W_{l,e}) = W_{l,g}$ для всех $g \in G$ и всех l , $1 \leq l \leq K_\varepsilon(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из вида асимптотики спектра (см. [9], [12]) (подпространство собственных функций, отвечающих собственному значению λ , конечномерно).

ЛЕММА 3. $N^i(\tilde{P}, \lambda) \geq N^i(\tilde{P}_\varepsilon, \lambda)$ для всех $\varepsilon > 0$, $1 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача на собственные значения для эллиптического оператора $\tilde{P}$ (соответственно $\tilde{P}_\varepsilon$) эквивалентна вариационной задаче в случае гладких границ ∂B (соответственно ∂B^ε); см. [7], [9]. Сузим обе эти задачи на подпространство Γ^i . Тогда из условия $B^\varepsilon \subset B$ и из определения вариационной задачи следует, что $N^i(\tilde{P}, \lambda) \geq N^i(\tilde{P}_\varepsilon, \lambda)$ для всех $1 \leq i \leq n$.

ЛЕММА 4. Предположим, что для последовательности натуральных чисел q_k , такой, что $q_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N^i(\tilde{P}, \lambda_{q_k}) / N(\tilde{P}, \lambda_{q_k}).$$

Тогда этот предел не меньше, чем $s_i d_i / m$, при всех $1 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_{q_k} = r_k$. Заметим, что

$$\frac{N^i(\tilde{P}, r_k)}{N(\tilde{P}, r_k)} = \frac{N^i(\tilde{P}, r_k)}{N^i(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)} \frac{N^i(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)}{N(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)} \frac{N(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)}{N(\tilde{P}, r_k)}. \quad (1)$$

Из леммы 3 вытекает, что $N^i(\tilde{P}, r_k) \geq N^i(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)$. Из леммы 2 следует, что $N^i(\tilde{P}_\varepsilon, r_k) / N(\tilde{P}_\varepsilon, r_k) = s_i d_i / m$. Из работ [9], [12] и леммы 1 вытекает, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ главный член асимптотики величины $N(\tilde{P}_\varepsilon, \lambda)$ (соответственно $N(\tilde{P}, \lambda)$) есть $b_\varepsilon \lambda^\sigma$ (соответственно $b \lambda^\sigma$), причем $\sigma > 0$ и $b_\varepsilon \rightarrow b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует, что предел $\lim_{k \rightarrow \infty} N(\tilde{P}_\varepsilon, r_k) / N(\tilde{P}, r_k)$ существует и равен $1 - \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предел $\lim_{k \rightarrow \infty} N^i(\tilde{P}, r_k) / N^i(\tilde{P}_\varepsilon, r_k)$ существует и конечен при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, поскольку существуют, конечны и не равны нулю пределы остальных дробей в равенстве (1).

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем лемму 4.

Заметим, что $\sum_{i=1}^n N^i(\tilde{P}, \lambda) = N(\tilde{P}, \lambda)$, так как всякое подпространство, отвечающее какому-либо собственному значению, инвариантно и конечномерно ([9], [12]), а всякое инвариантное конечномерное подпространство разлагается в прямую сумму неприводимых.

Предположим, что существует j , $1 \leq j \leq n$, и последовательность q_k , такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} N^j(\tilde{P}, r_k) / N(\tilde{P}, r_k) > s_j d_j / m$, где $r_k = \lambda_{q_k}$. Выберем из нее подпоследовательность q_{k_l} так, чтобы для всех i , $1 \leq i \leq n$, существовали пределы $\lim_{l \rightarrow \infty} N^i(\tilde{P}, \eta_l) / N(\tilde{P}, \eta_l)$, где $\eta_l = r_{k_l}$. Тогда в силу леммы 4 получим противоречие, так как $\sum_{i=1}^n s_i d_i / m = 1$ и сумма этих пределов равна 1. Таким образом, предельные точки последовательностей $N^i(\tilde{P}, \lambda_q) / N(\tilde{P}, \lambda_q)$ для каждого i , $1 \leq i \leq n$, единственны и равны $s_i d_i / m$. Теорема доказана.

ГИПОТЕЗА. Для любого эффективного действия конечной группы на компактном многообразии существует фундаментальная область, измеримая по Жордану и состоящая из конечного числа компонент связности.

Настоящая работа возникла из обдумывания гипотезы В. И. Арнольда о «наиболее вероятных» представлениях (см. [1]). Попытка доказательства этой гипотезы содержится в работе [5]. К сожалению, в этом доказательстве имеются пробелы.

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и внимание к работе, М. С. Аграновичу, С. М. Гусейн-Заде и А. В. Чернавскому за полезные обсуждения.

Автор благодарен рецензенту за указание работ [3], [4], [11], в которых подобный результат получен другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Задачи семинара 2003–2004*, МЦНМО, М., 2005. [2] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Функци. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 25–36. [3] Н. Donnelly, *Math. Ann.*, **224** (1976), 161–170. [4] Н. Donnelly, *Math. Ann.*, **237** (1978), 23–40. [5] В. Н. Карпушкин, *Вестник МГУ, матем., мех.*, 1974, № 2, 9–13. [6] Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, Наука, М., 1989. [7] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, Гостехиздат, М., 1951. [8] Г. Е. Любарский, *Теория групп и ее применение в физике*, М., 1958. [9] К. Морен, *Методы гильбертова пространства*, Мир, М., 1965. [10] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979. [11] В. Helffer, D. Robert, *Amer. J. Math.*, **106** (1984), 1199–1236. [12] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: vladkarp@rol.ru

Поступило в редакцию
16 февраля 2005 г.

УДК 512.662.1+512.818.4

Деформации бесконечномерной алгебры Ли L_3^*

© 2006. Ю. Ю. Кочетков

1. Введение. Обозначим через W алгебру Ли полиномиальных векторных полей на прямой с базисом $e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$, $i = -1, 0, \dots$, $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$. Алгебра W градуирована: $\deg(e_i) = i$. Через $L_k \subset W$, $k > 0$, обозначим нильпотентную подалгебру, порожденную элементами e_i , $i \geq k$.

Деформации алгебр L_1 и L_2 активно изучались. В работах [1] и [2] были найдены инфинитезимальные деформации и вычислены квадраты Масси для алгебр L_1 и L_2 , а также был решен вопрос о продолжаемости однородных инфинитезимальных деформаций до глобальных. В работе [3] был предъявлен полный список попарно не эквивалентных деформаций алгебры L_1 , в том числе была найдена деформация, которой не отвечает никакая инфинитезимальная деформация (соответствующий 2-коцикл нулевой). В работе [4] была определена миниверсальная деформация произвольной алгебры Ли и предложена схема построения версальной деформации. Используя этот аппарат, авторы провели

*Эта работа была поддержана РФФИ, проект №04-01-00647.