Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Деформации бесконечномерной алгебры Ли L_3 , *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 75–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:44:45

Настоящая работа возникла из обдумывания гипотезы В. И. Арнольда о «наиболее вероятных» представлениях (см. [1]). Попытка доказательства этой гипотезы содержится в работе [5]. К сожалению, в этом доказательстве имеются пробелы.

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и внимание к работе, М. С. Аграновичу, С. М. Гусейн-Заде и А. В. Чернавскому за полезные обсуждения.

Автор благодарен рецензенту за указание работ [3], [4], [11], в которых подобный результат получен другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Задачи семинара 2003–2004*, МЦНМО, М., 2005. [2] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Функци. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 25–36. [3] Н. Donnelly, *Math. Ann.*, **224** (1976), 161–170. [4] Н. Donnelly, *Math. Ann.*, **237** (1978), 23–40. [5] В. Н. Карпушкин, *Вестник МГУ, матем., мех.*, 1974, № 2, 9–13. [6] Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, Наука, М., 1989. [7] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, Гостехиздат, М., 1951. [8] Г. Е. Любарский, *Теория групп и ее применение в физике*, М., 1958. [9] К. Морен, *Методы гильбертова пространства*, Мир, М., 1965. [10] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979. [11] В. Helffer, D. Robert, *Amer. J. Math.*, **106** (1984), 1199–1236. [12] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: vladkarp@rol.ru

Поступило в редакцию
16 февраля 2005 г.

УДК 512.662.1+512.818.4

Деформации бесконечномерной алгебры Ли L_3^*

© 2006. Ю. Ю. Кочетков

1. Введение. Обозначим через W алгебру Ли полиномиальных векторных полей на прямой с базисом $e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$, $i = -1, 0, \dots$, $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$. Алгебра W градуирована: $\deg(e_i) = i$. Через $L_k \subset W$, $k > 0$, обозначим нильпотентную подалгебру, порожденную элементами e_i , $i \geq k$.

Деформации алгебр L_1 и L_2 активно изучались. В работах [1] и [2] были найдены инфинитезимальные деформации и вычислены квадраты Масси для алгебр L_1 и L_2 , а также был решен вопрос о продолжаемости однородных инфинитезимальных деформаций до глобальных. В работе [3] был предъявлен полный список попарно не эквивалентных деформаций алгебры L_1 , в том числе была найдена деформация, которой не отвечает никакая инфинитезимальная деформация (соответствующий 2-коцикл нулевой). В работе [4] была определена миниверсальная деформация произвольной алгебры Ли и предложена схема построения версальной деформации. Используя этот аппарат, авторы провели

*Эта работа была поддержана РФФИ, проект №04-01-00647.

вычисления для алгебры L_1 и тем самым подтвердили результаты своей работы [3]. Вот результаты этих вычислений.

Нетрудно найти, что $\dim H^2(L_1, L_1) = 3$ и

$$\dim H_{(m)}^2(L_1, L_1) = \begin{cases} 1, & m = 2, 3, 4, \\ 0, & m \neq 2, 3, 4. \end{cases}$$

Здесь через $H_{(m)}^*$ мы обозначаем пространства когомологий степени m . Обозначим через α , β и γ нетривиальные коциклы из $H_{(2)}^2(L_1, L_1)$, $H_{(3)}^2(L_1, L_1)$ и $H_{(4)}^2(L_1, L_1)$ соответственно. Тогда база миниверсальной деформации задается следующей системой формальных уравнений:

$$\begin{aligned} \beta\gamma &= 0, \\ \gamma^2 + A\alpha^2\gamma + B\alpha(\beta^2 + D\alpha^3) &= 0, \\ \beta(\beta^2 + D\alpha^3) &= 0, \end{aligned}$$

где $A^2 \neq 4BD$ и $D \neq 0$.

В работе [5], кроме анализа результатов работы [2], была предпринята попытка построить миниверсальную деформацию алгебры L_2 . К сожалению, полученное описание базы деформации столь громоздко, что трудно понять, как именно устроены деформации. Один из основных результатов этой работы — окончательный список однородных деформаций. Существует ровно семь однопараметрических однородных деформаций алгебры Ли L_2 :

- деформации вида

$$[e_i, e_j]_t = (j - i)e_{i+j} + (j - i)te_{i+j-m}$$

при $m = 2, 3$;

- деформации вида

$$[e_i, e_j]_t = (j - i)e_{i+j} + j\delta_{i,m}te_j - i\delta_{j,m}te_j$$

при $m = 2, 3, 4$;

- деформация вида $[e_i, e_j]_t = (j - i)e_{i+j} + tc(e_i, e_j)$, где

$$\begin{aligned} c(e_{2k}, e_{2l}) &= -2(2l - 2k)e_{2l+2k-2}, \\ c(e_{2k}, e_{2l+1}) &= -2(2l - 2k + 1)e_{2l+2k-1}, \\ c(e_{2k+1}, e_{2l+1}) &= 0; \end{aligned}$$

- деформация вида $[e_i, e_j]_t = (j - i)e_{i+j} + tc(e_i, e_j)$, где

$$\begin{aligned} c(e_2, e_j) &= -je_j \quad (j \geq 4), & c(e_3, e_j) &= -2(j - 1)e_{j+1} \quad (j \geq 4), \\ c(e_2, e_3) &= -e_3, & c(e_i, e_j) &= 0 \quad (i, j \geq 4). \end{aligned}$$

В настоящей работе впервые изучаются деформации алгебры L_3 . Мы решаем здесь ограниченную задачу: находим все инфинитезимальные деформации (т. е. вычисляем группу $H^2(L_3, L_3)$), находим явный вид нетривиальных коциклов, вычисляем квадраты и кубы Масси и изучаем вопрос о продолжаемости *однородных* инфинитезимальных деформаций до глобальных. Основные результаты работы составляют содержание теорем 1, 2 и 3.

ТЕОРЕМА 1. Размерность пространства $H^2(L_3, L_3)$ равна 15. При этом

$$\begin{aligned} \dim H_{(2)}^2(L_3, L_3) &= 1, & \dim H_{(3)}^2(L_3, L_3) &= 2, & \dim H_{(4)}^2(L_3, L_3) &= 3, \\ \dim H_{(5)}^2(L_3, L_3) &= 3, & \dim H_{(6)}^2(L_3, L_3) &= 3, & \dim H_{(7)}^2(L_3, L_3) &= 2, \\ \dim H_{(8)}^2(L_3, L_3) &= 1, & \dim H_{(m)}^2(L_3, L_3) &= 0 & \text{при } m \neq 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Следующие формулы дают явные выражения для нетривиальных коциклов из $H_{(m)}^2(L_3, L_3)$ при $m = 2, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} m = 2: & \quad \delta(f_3 \otimes e_1), \\ m = 3: & \quad \delta(xf_3 \otimes e_0 + yf_4 \otimes e_1), \\ m = 4: & \quad \delta(xf_3 \otimes e_{-1} + yf_4 \otimes e_0 + zf_5 \otimes e_1), \\ m = 5: & \quad \delta(2xf_3 \otimes e_{-2} + 3xf_4 \otimes e_{-1} + yf_5 \otimes e_0 + zf_6 \otimes e_1), \\ m = 6: & \quad \delta(xf_4 \otimes e_{-2} + yf_5 \otimes e_{-1} + zf_6 \otimes e_0 - 5xf_7 \otimes e_1 - 2yf_8 \otimes e_2), \\ m = 7: & \quad \delta(2xf_4 \otimes e_{-3} + 2yf_5 \otimes e_{-2} \\ & \quad + (9y - 12x)f_6 \otimes e_{-1} - 12xf_7 \otimes e_0 - 5xf_8 \otimes e_1 - 12yf_9 \otimes e_2), \\ m = 8: & \quad \delta(21f_3 \otimes e_{-5} - f_5 \otimes e_{-3} + 42f_6 \otimes e_{-2} \\ & \quad + 189f_7 \otimes e_{-1} + 108f_8 \otimes e_0 + 7f_9 \otimes e_1 - 126f_{10} \otimes e_2). \end{aligned}$$

Здесь δ — дифференциал в пространстве коцепей, а x , y и z — независимые параметры.

ЗАМЕЧАНИЕ. Указанные выше коциклы, разумеется, тривиальны в $H^*(W, W)$, но нетривиальны в $H^*(L_3, L_3)$.

ТЕОРЕМА 3 (степени Масси коциклов, перечисленных в теореме 2).

- $m=2$. Квадрат Масси единственного нетривиального коцикла степени 2 тождественно равен нулю.
- $m=3$. Квадрат, куб и четвертая степень Масси коцикла $\delta(xf_3 \otimes e_0 + yf_4 \otimes e_1)$ тривиальны при любых x и y .
- $m=4$. Квадрат и куб Масси коцикла $\delta(xf_3 \otimes e_{-1} + yf_4 \otimes e_0 + zf_5 \otimes e_1)$ тривиальны при любых x , y и z . Но четвертая степень тривиальна, только когда выполнены следующие два условия:

$$\begin{aligned} & 113199142406043z^2yx + 8364725090414zy^2x - 100769834572357zyx^2 \\ & + 23627394461844z^4 - 8630938551330x^4 + 19356675441066zx^3 \\ & - 61414455761802z^3x + 6482443092000zy^3 - 36825460093935z^3y \\ & + 30537799444590z^2x^2 - 14212281745251z^2y^2 \\ & - 4473567473199y^2x^2 + 24744925218897yx^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 15125700548000y^3x - 29119113398653y^2x^2 - 348344874742zy^2x \\ & - 4137379909497z^2y^2 + 33118385668059yx^3 - 62914497312679zyx^2 \\ & + 82557772718121z^2yx - 31872547787445z^3y - 9632342748510x^4 \\ & + 13161672832302zx^3 + 16647440738730z^2x^2 \\ & - 41620702262094z^3x + 18357248448468z^4 = 0. \end{aligned}$$

$m=5$. Квадрат и куб Масси тривиальны, только когда $x = z = 0$. В этом случае квадрат Масси коцикла $\delta(f_5 \otimes e_0)$ тождественно равен нулю, т. е. бинарная операция

$$h(e_i, e_j) = [e_i, e_j] + tj\delta_{5,i}e_j$$

задает структуру алгебры Ли на L_3 при любом t .

$m=6$. Квадрат Масси тривиален, только когда $x = y = 0$. Но в этом случае квадрат Масси коцикла $\delta(f_6 \otimes e_0)$ тождественно равен нулю, т. е. бинарная операция

$$h(e_i, e_j) = [e_i, e_j] + tj\delta_{6,i}e_j$$

задает структуру алгебры Ли на L_3 при любом t .

$m=7$. Квадрат Масси нетривиален при всех x и y , не равных нулю одновременно.

$m=8$. Квадрат Масси нетривиален.

2. Инфинитезимальные деформации. В этом разделе будет доказана теорема 1, т. е. вычислена группа $H^2(L_3, L_3)$. Пространство коцепей $C^*(L_3, L_3)$ градуировано: $\deg(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_n} \otimes e_j) = i_1 + \dots + i_n - j$, где $f_j \in C^1(L_3, L_3)$ и $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. В дальнейшем все коцепи и коциклы мы будем считать однородными. Через $C_{(m)}^n(L_3, L_3)$ ($Z_{(m)}^n(L_3, L_3)$, $H_{(m)}^n(L_3, L_3)$) мы будем обозначать пространство n -коцепей (n -коциклов, n -когомологий) степени m .

Следуя работе [6] (см. также [7]), зададим фильтрацию на пространстве коцепей: $C^*(L_3, L_3) = \Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \dots$, где Φ_q — линейная оболочка коцепей $f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_n} \otimes e_j$, таких, что $i_1 + \dots + i_n \geq q$. Легко видеть, что $\delta(\Phi_q) \subset \Phi_q$. Здесь δ — обычный дифференциал в стандартном комплексе коцепей. Спектральная последовательность, отвечающая этой фильтрации, называется спектральной последовательностью Фейгина–Фукса. Здесь $E_{p,q}^1 \simeq H_{(q)}^{p+q}(L_3)$ [7].

Гомологии алгебр L_k с тривиальными коэффициентами нам известны — они найдены Гончаровой в работе [8] (см. также [9]). Нам будут нужны первые, вторые и третьи когомологии алгебры L_3 с тривиальными коэффициентами:

- $H_{(m)}^1(L_3) = 0$ при $m \neq 3, 4, 5, 6$; $\dim H_{(m)}^1(L_3) = 1$ при $m = 3, 4, 5, 6$;
 - $H_{(m)}^2(L_3) = 0$ при $m \neq 9, \dots, 15$; $\dim H_{(m)}^2(L_3) = 1$ при $m = 9, 10, 12, 14, 15$;
 - $H_{(m)}^3(L_3) = 0$ при $m \neq 18, \dots, 27$; $\dim H_{(m)}^3(L_3) = 1$ при $m = 18, 19, 26, 27$;
- $\dim H_{(m)}^2(L_3) = 2$ при $m = 11, 13$;
- $\dim H_{(m)}^3(L_3) = 2$ при $m = 20, \dots, 25$.

Для вычислений нам понадобится явный вид нетривиальных 1- и 2-коциклов:

$$H_{(m)}^1(L_3) = \mathbb{C}f_m, \quad m = 3, 4, 5, 6,$$

$$H_{(9)}^2(L_3) = \mathbb{C}f_3 \wedge f_6, \quad H_{(10)}^2(L_3) = \mathbb{C}f_3 \wedge f_7, \quad H_{(11)}^2(L_3) = \mathbb{C}f_3 \wedge f_8 \oplus \mathbb{C}f_4 \wedge f_7,$$

$$H_{(12)}^2(L_3) = \mathbb{C}(f_3 \wedge f_9 - f_5 \wedge f_7), \quad H_{(13)}^2(L_3) = \mathbb{C}(f_3 \wedge f_{10} + f_4 \wedge f_9) \oplus \mathbb{C}f_5 \wedge f_8,$$

$$H_{(14)}^2(L_3) = \mathbb{C}(2 \cdot f_5 \wedge f_9 + 3 \cdot f_6 \wedge f_8),$$

$$H_{(15)}^2(L_3) = \mathbb{C}(f_3 \wedge f_{12} - f_4 \wedge f_{11} + f_6 \wedge f_9 + f_7 \wedge f_8).$$

Схематически член $E_{p,q}^1$ спектральной последовательности выглядит так:

$$E_{0,0}^1 \xrightarrow{d_3} E_{-2,3}^1 \quad E_{-3,4}^1 \quad E_{-4,5}^1 \quad E_{-5,6}^1 \xrightarrow{d_3} E_{-7,9}^1 \quad \dots \quad E_{-13,15}^1 \xrightarrow{d_3} E_{-15,18}^1 \quad \dots$$

В этой спектральной последовательности d_3 является кратчайшим дифференциалом. Это означает, в частности, что $E^1 \simeq E^2 \simeq E^3$. Все дифференциалы мы будем вычислять для члена E^1 и смотреть, какие члены $E_{p,q}^1$ «убиваются» нетривиальными дифференциалами, а какие «выживают» и вносят вклад в группу $H^2(L_3, L_3)$.

Рассмотрим элемент $c \in H_{(q)}^n(L_3) \simeq E_{n-q,q}^1$ и соответствующую коцепь $c \otimes e_{q-m}$ степени m . Дифференциал $d_k: E_{n-q,q}^1 \rightarrow E_{n-q-k+1,q+k}^1$ нетривиален, если найдутся коцепи $c_i \in C_{(i)}^n(L_3)$, $i = q+1, \dots, q+k-1$, такие, что

$$\delta(c \otimes e_{q-m} + c_{q+1} \otimes e_{q+1-m} + \dots + c_{q+k-1} \otimes e_{q+k-1-m}) \equiv 0 \pmod{\Phi_{q+k-1}},$$

но не существует цепей $c'_i \in C_{(i)}^n(L_3)$, $i = q+1, \dots, q+k$, таких, что

$$\delta(c \otimes e_{q-m} + c'_{q+1} \otimes e_{q+1-m} + \dots + c'_{q+k} \otimes e_{q+k-m}) \equiv 0 \pmod{\Phi_{q+k}}.$$

На двух примерах покажем, как ведутся вычисления.

Дифференциал $d_6: E_{-3,4}^1 \rightarrow E_{-8,10}^1$. Здесь $E_{-3,4}^1 \simeq f_4 \otimes e_{4-m}$. Рассмотрим коцепь

$$c = f_4 \otimes e_{4-m} - \frac{3(m+1)}{m-3} f_6 \otimes e_{6-m} - (m-1) f_7 \otimes e_{7-m} + (m+1) f_9 \otimes e_{9-m} \in \Phi_4.$$

Коэффициенты при f_5 , f_6 , f_7 , f_8 и f_9 в коцепи c однозначно определены требованием $\delta(c) \in \Phi_{10}$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(c) \equiv & \left[-(m+2) f_4 \wedge f_6 - \frac{3(m+1)(m-2)}{m-3} f_4 \wedge f_6 \right. \\ & \left. - (m-1)(m-4) f_3 \wedge f_7 \right] \otimes e_{10-m} \pmod{\Phi_{10}}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что выражение в квадратных скобках — это коцикл, нетривиальный при любом целом m . Но сам член $E_{-3,4}^1$ существует только при $m \leq 1$. Итак, мы получаем, что при $m \leq 1$ член $E_{-8,10}^1$ «убивается» дифференциалом d_6 и не вносит вклада в группу $H^2(L_3, L_3)$.

Дифференциал $d_5: E_{-12,14}^1 \rightarrow E_{-16,19}^1$. Здесь $E_{-12,14}^1 \simeq (2 f_5 \wedge f_9 + 3 f_6 \wedge f_8) \otimes e_{14-m} = c_{14} \otimes e_{14-m}$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta(c_{14} \otimes e_{14-m}) \equiv & (m-11) f_3 \wedge c_{14} \otimes e_{17-m} + (m-10) f_4 \wedge c_{14} \otimes e_{18-m} \\ & + (m-9) f_5 \wedge c_{14} \otimes e_{19-m} \pmod{\Phi_{19}}. \end{aligned}$$

Коцепь $f_3 \wedge c_{14}$ является коциклом из $Z_{17}^3(L_3)$, а так как все такие коциклы тривиальны, то существует коцепь $c_{17} \in C_{17}^2(L_3)$, такая, что $\delta(c_{17}) = -f_3 \wedge c_{14}$. При этом

$$\delta(c_{17} \otimes e_{17-m}) \equiv -f_3 \wedge c_{14} \otimes e_{17-m} \pmod{\Phi_{19}}.$$

Далее, коцепь $f_4 \wedge c_{14}$ является нетривиальным коциклом из $Z_{18}^3(L_3)$. Легко видеть, что существует такое число α и такая коцепь $c_{18} \in C_{18}^2(L_3)$, что

$$f_4 \wedge c_{14} = -(\alpha f_3 \wedge c_{15} + \delta(c_{18})),$$

где $c_{15} = f_3 \wedge f_{12} - f_4 \wedge f_{11} + f_6 \wedge f_9 + f_7 \wedge f_8$ — нетривиальный коцикл. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(c_{14} \otimes e_{14-m} + (m-10) \alpha c_{15} \otimes e_{15-m} + (m-11) c_{17} \otimes e_{17-m} + (m-10) c_{18} \otimes e_{18-m}) \\ \equiv [(m-9) f_5 \wedge c_{14} + \alpha(m-11) f_4 \wedge c_{15}] \otimes e_{19-m} \pmod{\Phi_{19}}, \end{aligned}$$

причем выражение в квадратных скобках всегда является нетривиальным коциклом из $H_{(19)}^3(L_3)$.

Суммируем результаты вычислений (следует отметить, что вычисления дифференциалов $d_7: E_{-11,13}^1 \rightarrow E_{-17,20}^1$, $d_9: E_{-10,12}^1 \rightarrow E_{-18,21}^1$ и $d_{11}: E_{-9,11}^1 \rightarrow E_{-19,22}^1$ проводились с помощью компьютера).

(1) Член $E_{-5,6}^1 \simeq f_6 \otimes e_{6-m}$ существует при $m \leq 3$. Кратчайший дифференциал $d_3: E_{-5,6}^1 \rightarrow E_{-7,9}^1$ нетривиален при $m < 3$. При $m = 3$ нетривиален дифференциал $d_4: E_{-5,6}^1 \rightarrow e_{-8,10}^1$.

(2) Члены $E_{-3,4}^1 \simeq f_4 \otimes e_{4-m}$ и $E_{-4,5}^1 \simeq f_5 \otimes e_{5-m}$ существуют при $m \leq 1$. Отображение

$$d_6: E_{-3,4}^1 \oplus E_{-4,5}^1 \rightarrow E_{-8,10}^1 \oplus E_{-9,11}^1$$

из двумерного пространства в трехмерное при $m \leq 1$ обладает следующими свойствами:

- (a) $\ker d_6 = 0$;
- (b) $\dim \operatorname{im}(d_6) \cap E_{-8,10}^1 = 1$;
- (c) $\dim \operatorname{im}(d_6) \cap E_{-9,11}^1 = 1$.

При $m = 2$ члена $E_{-3,4}^1$ не существует, но нетривиален дифференциал $d_6: E_{-4,5}^1 \rightarrow E_{-9,11}^1$.

(3) Член $E_{-13,15}^1$ существует при $m \leq 12$. Кратчайший дифференциал $d_3: E_{-13,15}^1 \rightarrow E_{-15,18}^1$ нетривиален при $m < 12$. При $m = 12$ нетривиален дифференциал $d_4: E_{-13,15}^1 \rightarrow E_{-16,19}^1$.

(4) Член $E_{-12,14}^1$ существует при $m \leq 11$. Дифференциал $d_5: E_{-12,14}^1 \rightarrow E_{-16,19}^1$ всегда нетривиален.

(5) Член $E_{-11,13}^1$ существует при $m \leq 10$. Дифференциал $d_7: E_{-11,13}^1 \rightarrow E_{-17,20}^1$ из двумерного пространства в двумерное всегда нетривиален.

(6) Член $E_{-10,12}^1$ существует при $m \leq 9$. Дифференциал $d_9: E_{-10,12}^1 \rightarrow E_{-18,21}^1$ всегда нетривиален.

(7) Член $E_{-9,11}^1$ существует при $m \leq 8$. Образ дифференциала $d_{11}: E_{-9,11}^1 \rightarrow E_{-19,22}^1$ одномерен, а ядро совпадает с образом дифференциала d_6 из п. (2).

(8) Член $E_{-8,10}^1$ существует при $m \leq 7$. Дифференциалы $d_k: E_{-8,10}^1 \rightarrow E_{-7-k,10+k}^1$, $k = 8, \dots, 17$, всегда тривиальны.

Таким образом, члены $E_{-7,9}^1$, $E_{-8,10}^1$ и $E_{-9,11}^1$ вносят вклад в группу $H^2(L_3, L_3)$, только если они существуют и не «убиваются» дифференциалами из $E_{-3,4}^1$, $E_{-4,5}^1$ или из $E_{-5,6}^1$, а это, в свою очередь возможно только в том случае, когда какого-нибудь из членов $E_{-3,4}^1$, $E_{-4,5}^1$ или $E_{-5,6}^1$ не существует.

Теорема доказана.

3. Явный вид нетривиальных коциклов. В этом разделе мы доказываем теорему 2. Мы будем строить нетривиальные коциклы как дифференциалы коцепей из $C^1(L_3, W)$

Пусть $m = 2$. Рассмотрим 2-коцикл $c = \delta(f_3 \otimes e_1)$:

$$c(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i, j > 3, \\ -(j-1)e_{j+1}, & \text{если } i = 3, j > 3. \end{cases}$$

Докажем его нетривиальность. Пусть $c = \delta(c_1)$, $c_1 \in C_{(2)}^1(L_3, L_3)$; тогда $c_1(e_i) = \alpha_i e_{i-2}$, $i \geq 5$. Имеем

$$\begin{aligned}\delta(c_1)(e_3, e_4) &= \alpha_7 e_5 = c(e_3, e_4) = -3e_5, \\ \delta(c_1)(e_3, e_7) &= 3\alpha_{10} e_8 - 2\alpha_7 e_8 = c(e_3, e_7) = -6e_8, \\ \delta(c_1)(e_4, e_6) &= 2\alpha_{10} e_8 = c(e_4, e_6) = 0.\end{aligned}$$

Эта система от неизвестных α_7 , α_8 и α_{10} не имеет решений.

Для $m = 3, \dots, 8$ мы строим нетривиальный коцикл как дифференциал коцепи $c \in C_{(m)}^1(L_3, W)$ вида

$$\alpha_3 f_3 \otimes e_{3-m} + \dots + \alpha_{m+2} f_{m+2} \otimes e_2.$$

Коэффициенты должны удовлетворять естественному условию $\delta(c)(e_i, e_j) = 0$ при $i + j < 3 + m$. Следует, однако, иметь в виду, что дифференциал коцепи $\tilde{c} = (m+3)f_3 \otimes e_{3-m} + \dots + (2m+2)f_{m+2} \otimes e_2$ — тривиальный цикл из $C_{(m)}^2(L_3, L_3)$ (это следует из того, что $\tilde{c} = \delta(e_{-m})$).

Доказательство нетривиальности коциклов при $m > 2$ проводится так же, как и в случае $m = 2$.

4. Препятствия. Доказательство теоремы 3 представляет собой очень трудное компьютерное вычисление. Так как явное описание нетривиальных коциклов нам известно, то мы можем вычислить их степени Масси и сделать выводы о возможности продолжить инфинитезимальные деформации, отвечающие этим коциклам, до глобальных деформаций. Рассмотрим случай степени $m = 2$.

Мы знаем, что группа $H_{(2)}^2(L_3, L_3)$ одномерна и единственный нетривиальный цикл равен $c = \delta(f_3 \otimes e_1)$, т. е. $c(e_3, e_j) = (1-j)e_{j+1}$ при $j > 3$ и $c(e_i, e_j) = 0$ при $i, j > 3$. Но тогда

$$c^2(e_i, e_j, e_k) = c(c(e_i, e_j), e_k) + c(c(e_j, e_k), e_i) + c(c(e_k, e_i), e_j) = 0.$$

Это означает, что бинарная операция

$$h(e_i, e_j) = [e_i, e_j] + tc(e_i, e_j)$$

задает структуру алгебры Ли на L_3 при любом t .

Другие коциклы исследуются аналогичным образом, но трудности вычисления значительно возрастают с ростом m .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Фиаловски, *Матем. сборник*, **55:3** (1986), 467–473. [2] Ю. Ю. Кочетков, Г. Пост, *Функц. анализ и его прил.*, **26:4** (1992), 90–92. [3] А. Fialowski, D. Fuchs, in: *Topics in Singularity Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 77–92. [4] А. Fialowski, D. Fuchs, *J. Funct. Anal.*, **161:1** (1999), 76–110. [5] А. Fialowski, G. Post, *J. Algebra*, **236** (2001), 93–109. [6] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Функц. анализ и его прил.*, **14:3** (1980), 45–60. [7] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984. [8] Л. В. Гончарова, *Функц. анализ и его прил.*, **7:2** (1973), 6–14. [9] F. Weinstein, in: *Adv. Soviet Math.*, vol. 17, 1993, 155–216.