Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Кузнецова, Весовые L_p -алгебры на группах, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:52:33

УДК 517.982

Весовые L_p -алгебры на группах*

© 2006. Ю. Н. КУЗНЕЦОВА

Как известно [1], пространство $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, на локально компактной группе G замкнуто относительно сверточного умножения только тогда, когда группа G компактна. Однако при некоторых условиях на вес весовые пространства $L_p(G, w)$ являются банаховыми алгебрами относительно свертки и естественной нормы. Достаточные условия на вес для того, чтобы он задавал сверточную алгебру, хорошо известны для частных случаев групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и для полугрупп $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$ ([2]–[6]). Мы формулируем аналогичное достаточное условие на вес для произвольной локально компактной группы, а также показываем, что это условие не является необходимым. Описан спектр (пространство максимальных идеалов) алгебры $L_p(G, w)$ на абелевой группе G . Аналогичный результат для случая $G = \mathbb{R}^n$ содержится в статье [5]. Как следствие мы показываем, что все рассматриваемые алгебры полупросты. Это принципиальное отличие от сверточных алгебр на полугруппах, которые часто оказываются радикальными (см., например, [7]).

Итак, пусть G — локально компактная группа с мерой Хаара λ , $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, и пусть w — положительная измеримая функция на G . Пространства L_p с весом w определяются так:

$$L_p(G, w) = \{f/w : f \in L_p(G)\}, \quad \|f\|_{p,w} = \left(\int_G |fw|^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Со своей естественной нормой все $L_p(G, w)$ как банаховы пространства изоморфны $L_p(G)$. Выделим два несложных свойства этих пространств.

СВОЙСТВО 1. *Сопряженным к $L_p(G, w)$ является пространство $L_q(G, w^{-1})$ с двойственностью*

$$\langle f, g \rangle = \int_G fg d\lambda.$$

СВОЙСТВО 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) $w^{-q} \in L_1(G)$;
- (ii) $L_p(G, w) \subset L_1(G)$;
- (iii) $L_\infty(G) \subset L_q(G, w^{-1})$.

Рассмотрим следующее условие на вес:

$$w^{-q} * w^{-q} \leq K w^{-q}, \quad (1)$$

где K — некоторая константа, а неравенство выполняется поточечно почти всюду на G . Оказывается, что это условие является достаточным для того, чтобы пространство $L_p(G, w)$ было алгеброй относительно обычного сверточного умножения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для функции w выполняется условие (1). Тогда пространство $L_p(G, w)$ является банаховой алгеброй относительно сверточного умножения, причем если группа G абелева, то эта алгебра коммутативна.*

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00982).

Для доказательства этой теоремы достаточно провести непосредственные вычисления, используя неравенство Гёльдера. Выкладки дословно повторяют рассуждения для случая полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}$ в [2].

На группе $\mathbb{Z}$ простейшим примером веса, удовлетворяющего условию (1), будет функция $w_n = \max(1, n^2)$, на группе $\mathbb{R}$ можно при любом $a > 0$ взять функцию $w_t = a^t(1 + t^2)$.

Необходимым условие (1), вообще говоря, не является. Если группа G компактна и $p \geq 2$, то в качестве контрпримера годится любая функция w , обладающая следующими свойствами: $w \geq 1$, $w \in L_p(G)$, $\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = \infty$. Можно построить контрпример и на некомпактной группе, продолжая такую же функцию с некоторого компакта на всю группу весом, для которого условие (1) выполняется. Например¹⁾, пусть $G = \mathbb{R}$, $p = 2$ и $w(t)$ равно $|t|^{-1/4}$ при $|t| \leq 1$ и $|t|$ при прочих t .

С этого момента группу G считаем абелевой, $\hat{G}$ обозначает ее двойственную группу, а $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f в $L_1(G)$ или $L_2(G)$. В следующей теореме и далее используются такие обозначения: $f^\vee(x) = f(-x)$, $^x f(y) = f(x + y)$, а аргумент функции часто пишется в виде индекса: $f_x = f(x)$. Следующим шагом будет описание спектра коммутативной алгебры $L_p(G, w)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если пространство $L_p(G, w)$ является сверточной алгеброй, то спектр этой алгебры можно отождествить с множеством непрерывных гомоморфизмов $\chi: G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принадлежащих пространству $L_q(G, w^{-1})$. Характер X этой алгебры выражается через функцию χ формулой*

$$X(f) = \int_G f \chi d\lambda, \quad f \in L_p(G, w). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим алгебру $L_p(G, w)$ через $\mathcal{A}$. Легко видеть, что если $\chi \in L_q(G, w^{-1})$ — непрерывный гомоморфизм $G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то (линейный и непрерывный) функционал X , определенный формулой (2), будет характером алгебры $\mathcal{A}$. При этом разным χ соответствуют разные $X \in \text{Sp } \mathcal{A}$ по свойству 1.

Покажем теперь, что таким образом получаются все характеры алгебры $\mathcal{A}$. Если $X \in \text{Sp } \mathcal{A}$, то существует такая функция $\chi \in L_q(G, w^{-1})$, что значение $X(f)$ задается формулой (2). Остается показать, что χ непрерывна и мультипликативна (возможно, после изменения на множестве меры нуль). Это можно сделать вполне стандартными методами (см. [8, §23]), учитывая лишь то, что пространства $L_p(G, w)$ не обязательно инвариантны относительно сдвигов. Основные вспомогательные факты таковы. Если $f \in \mathcal{A}$ и $|g| \leq |f|$, то $g \in \mathcal{A}$. Значит, по любой функции $f \in \mathcal{A}$ и точкам $x, y \in G$ можно построить такую функцию $g \in \mathcal{A}$, что $^x g, ^y g, ^{x+y} g \in \mathcal{A}$. Например, $g = \varphi f$, где

$$\varphi = w / \max\{w, ^{-x}w, ^{-y}w, ^{-(x+y)}w\}$$

(заметим, что $0 \leq \varphi \leq 1$). По построению ясно, что если при этом $X(f) \neq 0$, то можно добиться и чтобы $X(g) \neq 0$. Как и в классическом случае, это позволяет определить (не зависящую от g) функцию $\xi(x) = X(^x g)/X(g)$ и доказать ее мультипликативность. Осталось заметить, что для выполнения равенства $\psi = 0$ в сопряженном пространстве $L_q(G, w^{-1})$ достаточно выполнения

¹⁾В статье [5] авторы утверждают, что при $G = \mathbb{R}^n$ условие (1) представляет собой критерий. Этот факт, как показывает наш контрпример, неверен.

равенства $\int_G f \psi d\lambda = 0$ для всех таких $f \in \mathcal{A}$, что ${}^x f \in \mathcal{A}$ при некотором фиксированном $x \in G$. $\square$

Ниже мы покажем, что все алгебры $L_p(G, w)$ полупросты, но сначала потребуется исключить тривиальный случай радикальной алгебры, в которой каждый элемент квазинильпотентен.

ЛЕММА. *Ни при каком весе w алгебра $L_p(G, w)$ не радикальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим функцию $\varphi \in L_p(G, w)$, которая не является квазинильпотентной, т.е. $\|\varphi^{*n}\|_{p,w}^{1/n} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varphi^{*n} = \varphi * \dots * \varphi$ (n раз). Выберем множество $U \subset G$ конечной (ненулевой) меры и положим $f_x = \min\{1, w_x, w_{-x}, w_x^{-1}, w_{-x}^{-1}\}$ при $x \in U$ и $f_x = 0$ в противном случае. Тогда $f \in L_p(G, w) \cap L_q(G, w^{-1})$ и $f = f^\vee$. Так как $L_p(G, w)$ — алгебра, то $\varphi = f * f \in L_p(G, w)$. По этой же причине пространство $L_q(G, w^{-1})$ является модулем над $L_p(G, w)$: если $h \in L_q(G, w^{-1})$, $g \in L_p(G, w)$, то произведение $g \circ h \in L_q(G, w^{-1})$ задается формулой $\langle f, g \circ h \rangle = \langle f * g, h \rangle$ для $f \in L_p(G, w)$ и выражается в явном виде через свертки:

$$(g \circ h)_x = \int_G g_{y-x} h_y d\lambda_y = (g^\vee * h)_x.$$

Таким образом, $\varphi = f^\vee * f \in L_q(G, w^{-1})$. Кроме того, $\varphi, \varphi^{*n} \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Теперь можно оценить норму $\|\varphi^{*n}\|_{p,w}$, учитывая неотрицательность φ и $\hat{\varphi}$:

$$\|\varphi^{*n}\|_{p,w} \cdot \|\varphi\|_{q,w^{-1}} \geq \langle \varphi^{*n}, \varphi \rangle = \langle \widehat{\varphi^{*n}}, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\varphi}^n, \hat{\varphi} \rangle = \|\hat{\varphi}^{n+1}\|_1,$$

а последняя величина, очевидно, не может убывать быстрее любой экспоненты. $\square$

Если $w^{-q} \in L_1(G)$, то работа с алгебрами $L_p(G, w)$ упрощается, так как $L_p(G, w) \subset L_1(G)$ по свойству 2. Следующая теорема показывает, что можно, не теряя общности, считать это включение выполненным.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая алгебра $L_p(G, w)$ изометрически изоморфна алгебре $L_p(G, \tilde{w})$, вес которой удовлетворяет условию $\tilde{w}^{-q} \in L_1(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебра $L_p(G, w)$ коммутативна и не радикальна, у нее существует ненулевой характер X , который выражается по формуле (2) через некоторую функцию χ . Если теперь положить $\tilde{w} = w/|\chi|$, то $\tilde{w}^{-q} = w^{-q}|\chi|^q \in L_1(G)$. Отображение $L_p(G, w) \rightarrow L_p(G, \tilde{w})$, $f \mapsto f|\chi|$, будет, очевидно, изометрическим оператором. Из мультипликативности функции χ следует, что это отображение является гомоморфизмом алгебр. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Если пространство $L_p(G, w)$ является алгеброй, то*

- (i) *эта алгебра полупроста;*
- (ii) *ее спектр содержит гомеоморфный образ группы $\hat{G}$;*
- (iii) *она имеет единицу тогда и только тогда, когда группа G дискретна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим снова алгебру $L_p(G, w)$ через $\mathcal{A}$. Можно считать, что $w^{-q} \in L_1(G)$, так как все перечисленные свойства сохраняются при изоморфизмах алгебр. Это условие означает, что $\mathcal{A}$ содержится в $L_1(G)$ как подалгебра (и тождественное вложение непрерывно). Поэтому ограничение $\chi \mapsto \chi|_{\mathcal{A}}$ задает непрерывное отображение $\hat{G} \simeq \text{Sp } L_1(G) \rightarrow \text{Sp } \mathcal{A}$. Из общего вида линейных функционалов на обоих пространствах следует инъективность такого

отображения, и, значит, оно является гомеоморфным вложением. Полупростота алгебры $\mathcal{A}$ следует из теоремы единственности преобразования Фурье в $L_1(G)$.

Если G дискретна, то индикаторная функция нуля ε содержится в $\mathcal{A}$, так как $\|\varepsilon\|_{p,w} = w_0 \lambda(0)^{1/p} < \infty$; ε является единицей относительно сверточного умножения. Если, наоборот, в $\mathcal{A}$ есть единица ε , то ее преобразование Гельфанда $\hat{\varepsilon} \in C_0(\text{Sp } \mathcal{A})$ равно всюду 1; соответственно $1 = \hat{\varepsilon}|_{\hat{G}} \in C_0(\hat{G})$. Но это возможно только тогда, когда группа $\hat{G}$ компактна, т. е. G дискретна. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Saeki, *Illinois J. Math.*, **34**:3 (1990), 614–627. [2] Н. К. Никольский, *Труды МИАН*, **120** (1974). [3] S. Grabiner, *Amer. J. Math.*, **97**:1 (1975), 16–42. [4] R. Kerman, E. Sawyer, *Stud. Math.*, **108**:2 (1994), 103–126. [5] A. Benazzouz, A. El Kinani, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **10**:1 (2003), 49–57. [6] S. A. Shkarin, Yu. N. Kuznetsova, *J. Math. Sci. (New York)*, **131**:6 (2005), 6112–6119. [7] H. G. Dales, in: *Radical Banach algebras and automatic continuity* (Proc. Conf., Long Beach 1981), Lecture Notes in Math., vol. 975, 1983. [8] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, II, Наука, М., 1975.

Московский институт электроники и математики
e-mail: jkuzn@mccme.ru

Поступило в редакцию
3 июня 2005 г.

УДК 517.9

Дизъюнктность, делимость и квазипростота сохраняющих меру действий*

© 2006. В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено

Знание структуры самоприсоединений динамической системы с инвариантной мерой дает информацию о факторах и централизаторе тензорных произведений системы, оказывается полезным в построении контрпримеров в эргодической теории и в исследовании проблемы В. А. Рохлина о кратном перемешивании. Из отсутствия у перемешивающей системы нетривиальных самоприсоединений, которые обладают свойством попарной независимости, вытекает ее свойство кратного перемешивания. Это приводит к следующей задаче: если известна структура самоприсоединений малых порядков, то что можно сказать о самоприсоединениях высоких порядков? Определенный прогресс имеется в случае, когда рассматриваемая система коммутирует только с полиморфизмами достаточно простой структуры (см. [2]), например, с выпуклыми комбинациями автоморфизмов и оператора ортопроекции. В заметке рассматривается новый класс действий, коммутирующих с полиморфизмами более сложной структуры. Для этих действий, названных квазипростыми, установлен упомянутый эффект отсутствия нетривиальных самоприсоединений высоких порядков, что обобщает ряд результатов из [2], [3], [7]. В заметке также установлено, что квазипростое действие и гауссовская система дизъюнктны в смысле Фюрстенберга (заметим,

*Исследования первого автора поддержаны грантом НШ-457.2003.1