Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено, Дизъюнктность, делимость и квазипростота сохраняющих меру действий, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 85–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:05:33

отображения, и, значит, оно является гомеоморфным вложением. Полупростота алгебры $\mathcal{A}$ следует из теоремы единственности преобразования Фурье в $L_1(G)$.

Если G дискретна, то индикаторная функция нуля ε содержится в $\mathcal{A}$, так как $\|\varepsilon\|_{p,w} = w_0 \lambda(0)^{1/p} < \infty$; ε является единицей относительно сверточного умножения. Если, наоборот, в $\mathcal{A}$ есть единица ε , то ее преобразование Гельфанда $\hat{\varepsilon} \in C_0(\text{Sp } \mathcal{A})$ равно всюду 1; соответственно $1 = \hat{\varepsilon}|_{\hat{G}} \in C_0(\hat{G})$. Но это возможно только тогда, когда группа $\hat{G}$ компактна, т. е. G дискретна. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Saeki, *Illinois J. Math.*, **34**:3 (1990), 614–627. [2] Н. К. Никольский, *Труды МИАН*, **120** (1974). [3] S. Grabiner, *Amer. J. Math.*, **97**:1 (1975), 16–42. [4] R. Kerman, E. Sawyer, *Stud. Math.*, **108**:2 (1994), 103–126. [5] A. Benazzouz, A. El Kinani, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **10**:1 (2003), 49–57. [6] S. A. Shkarin, Yu. N. Kuznetsova, *J. Math. Sci. (New York)*, **131**:6 (2005), 6112–6119. [7] H. G. Dales, in: *Radical Banach algebras and automatic continuity* (Proc. Conf., Long Beach 1981), Lecture Notes in Math., vol. 975, 1983. [8] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, II, Наука, М., 1975.

Московский институт электроники и математики
e-mail: jkuzn@mccme.ru

Поступило в редакцию
3 июня 2005 г.

УДК 517.9

Дизъюнктность, делимость и квазипростота сохраняющих меру действий*

© 2006. В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено

Знание структуры самоприсоединений динамической системы с инвариантной мерой дает информацию о факторах и централизаторе тензорных произведений системы, оказывается полезным в построении контрпримеров в эргодической теории и в исследовании проблемы В. А. Рохлина о кратном перемешивании. Из отсутствия у перемешивающей системы нетривиальных самоприсоединений, которые обладают свойством попарной независимости, вытекает ее свойство кратного перемешивания. Это приводит к следующей задаче: если известна структура самоприсоединений малых порядков, то что можно сказать о самоприсоединениях высоких порядков? Определенный прогресс имеется в случае, когда рассматриваемая система коммутирует только с полиморфизмами достаточно простой структуры (см. [2]), например, с выпуклыми комбинациями автоморфизмов и оператора ортопроекции. В заметке рассматривается новый класс действий, коммутирующих с полиморфизмами более сложной структуры. Для этих действий, названных квазипростыми, установлен упомянутый эффект отсутствия нетривиальных самоприсоединений высоких порядков, что обобщает ряд результатов из [2], [3], [7]. В заметке также установлено, что квазипростое действие и гауссовская система дизъюнктны в смысле Фюрстенберга (заметим,

*Исследования первого автора поддержаны грантом НШ-457.2003.1

что при этом их спектры могут быть недизъюнктными). Это обобщает результаты из [4] и [9].

1. Пусть T и T' — автоморфизмы вероятностных пространств (X, μ) и (X', μ) соответственно. Мера ν на $X \times X'$, проекции которой на сомножители произведения $X \times X'$ совпадают с μ (полиморфизм в терминологии [1]) называется *джойнингом* систем (T, X, μ) и (T', X, μ) , если ν инвариантна относительно преобразования $T \times T'$. Джойнинг потоков T_t, T'_t определяется аналогично, но здесь требуется инвариантность относительно $T_t \times T'_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Говорят, что автоморфизмы T и T' *дизъюнкты*, если они допускают единственный (тривиальный) джойнинг $\mu \times \mu$. Это означает, что существует единственное марковское сплетение унитарных операторов, отвечающих автоморфизмам T и T' . Этим сплетением является Θ — ортопроекция на пространство постоянных функций в $L_2(X, \mu)$.

Система (T, X, μ) называется *2-квазипростой*, если для любого эргодического самоприсоединения $\nu \neq \mu \times \mu$ система $(T \times T, X \times X, \nu)$ является изометрическим расширением каждого из своих координатных факторов. Если же для любого эргодического джойнинга $\nu \neq \mu \times \mu$ координатные факторы совпадают, система называется *2-простой*.

«Изометрическое расширение» — синоним расширения с относительно дискретным спектром [10]. Например, система, любое эргодическое самоприсоединение $\nu \neq \mu \times \mu$ которой расположено на графике конечнозначного отображения (в этом случае условные меры ν_x суть конечные суммы точечных мер) будет 2-квазипростой. (Указанным свойством обладают потоки, для которых выполнено свойство Ратнер [6].)

В дальнейшем нам понадобится только следующее свойство изометрических расширений: *если система порождена слабо перемешивающим фактором $\mathcal{F}_1$ и эргодическими факторами $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, где $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ независимы, причем $\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3$ является изометрическим расширением фактора $\mathcal{F}_2$, то сумма $\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3$ и фактор $\mathcal{F}_1$ независимы* (доказательство имеется в [5, Theorem A.3]).

Мы говорим, что автоморфизм T обладает свойством квазипростоты (простоты) порядка $n > 2$, если он является 2-квазипростым (2-простым) и любое попарно независимое самоприсоединение n экземпляров автоморфизма T тривиально, т. е. является произведением мер. (Джойнинг λ набора автоморфизмов $T_1, \dots, T_n$, $n > 2$, называется попарно независимым, если его проекции на любые двумерные грани в декартовом кубе $X_{(1)} \times \dots \times X_{(n)}$ совпадают с $\mu \times \mu$.)

Заметим, что 3-квазипростой автоморфизм T обладает свойством наследственной независимости (НИ): для трех T -факторов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, таких, что факторы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, а также $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ независимы, независимы и $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3$.

Свойство НИ автоморфизма T влечет за собой тривиальность всех попарно независимых самоприсоединений автоморфизма T [7, Theorem 7]. Таким образом, 3-квазипростота эквивалентна квазипростоте всех порядков, что является обобщением аналогичного результата из [3] о 3-простоте.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T_t является 2-квазипростым слабо перемешивающим потоком. Если λ — попарно независимое самоприсоединение трех экземпляров потока T_t , то $\lambda = \mu \times \mu \times \mu$.

СЛЕДСТВИЕ. Для потоков 2-квазипростота влечет за собой квазипростоту всех порядков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda \neq \mu \times \mu \times \mu$. Декартов куб $X \times X \times X$, на котором определена мера λ , нам будет удобно записывать в виде $Y_1 \times Y_2 \times X_0$. Положим $\lambda' = (\text{Id} \times T_\varepsilon \times \text{Id})\lambda$. Рассмотрим новое самоприсоединение $\tilde{\nu} = \lambda \otimes_Y \lambda'$, которое является относительно независимым произведением мер λ и λ' над фактором $Y = Y_1 \times Y_2$. Напомним, что $\tilde{\nu}$ теперь определена на кубе $Y_1 \times Y_2 \times X_0 \times X_1$, а условные меры $\tilde{\nu}_y$, $y \in Y$, по определению суть $\lambda_y \times \lambda'_y$. Полученная мера $\tilde{\nu}$ инвариантна относительно $T_t \times T_t \times T_t \times T_t$.

Если для $\varepsilon = 0$ проекция относительного произведения равна $\mu \times \mu$, то $\lambda = \mu \times \mu \times \mu$. (На языке марковских операторов это объясняется так: равенство $P^*P = \Theta$, где оператор P задается формулой $Pf(y) = \int_X f(x) d\lambda_y(x)$, влечет за собой $P = \Theta$.) Таким образом, для малого $\varepsilon > 0$ проекция $\tilde{\nu}$ на $X_0 \times X_1$ не равна мере $\mu \times \mu$. Фиксируем такое число $\varepsilon > 0$ и соответствующую меру $\tilde{\nu}$. Из разложения меры $\tilde{\nu}$ на эргодические компоненты получим эргодический джойнинг ν_1 на $Y_1 \times Y_2 \times X_0 \times X_1$, такой, что $\nu_1|_{Y_1 \times Y_2 \times X_0} = \lambda$, $\nu_1|_{Y_1 \times Y_2 \times X_1} = \lambda'$, а $\nu_1|_{X_0 \times X_1}$ является изометрическим расширением меры $\nu_1|_{X_0}$.

По индукции определим на произведении $Y_1 \times Y_2 \times X_0 \times X_1 \times \dots \times X_k$ последовательность мер ν_k , $k \geq 2$, для которых выполнены условия

$$(1.k) \quad \nu_k|_{Y_1 \times Y_2 \times X_0 \times \dots \times X_{k-1}} = \nu_{k-1};$$

(2.k) $\nu_k|_{Y_1 \times Y_2 \times X_1 \times \dots \times X_k} = (\text{Id} \times T_\varepsilon \times S)\nu_{k-1}$, где S обозначает правый сдвиг на $X_0 \times X_1 \times X_2 \times \dots$;

$$(3.k) \quad \nu_k \text{ есть изометрическое расширение меры } \nu_{k-1}.$$

Положим ν_{k+1} равной произведению $\nu_k \otimes_{Z_k} (\text{Id} \times T_\varepsilon \times S)\nu_k$ относительно фактора $Z_k = Y_1 \times Y_2 \times X_1 \times \dots \times X_k$. Корректность определения меры ν_{k+1} , т.е. совпадение проекций мер ν_k и $(\text{Id} \times T_\varepsilon \times S)\nu_k$ на Z_k , проверяется непосредственно с использованием условий (1.k), (2.k).

Проекция меры ν_{k+1} на $X_k \times X_{k+1}$ совпадает с проекцией на $X_0 \times X_1$ (при естественном отождествлении пространств $X_k \times X_{k+1}$ и $X_0 \times X_1$). Так как $X_k \times X_{k+1}$ является изометрическим расширением фактора X_k , то $(\dots \times X_k) \times X_{k+1}$ является изометрическим расширением фактора $(\dots \times X_k)$. Свойства (1.k+1), (2.k+1) джойнинга ν_{k+1} вытекают из его определения.

Таким образом, на произведении $Y_1 \times Y_2 \times (X_0 \times X_1 \times \dots)$ определена мера ν как предел мер ν_k . По построению мера ν инвариантна относительно $\text{Id} \times T_\varepsilon \times S$, где S — правый сдвиг на произведении $\bar{X} = \dots \times X_{-1} \times X_0 \times X_1 \times \dots$. Продолжим меру ν на все пространство $Y_1 \times Y_2 \times \bar{X}$ так, чтобы она была инвариантна относительно отображения $\text{Id} \times T_\varepsilon \times S$. При этом проекция меры ν на $Y_1 \times \bar{X}$ совпадает с произведением проекций на Y_1 и $\bar{X}$ (здесь мы воспользовались тем, что изометрические расширения сохраняют свойство независимости факторов). Аналогичным свойством обладает проекция меры ν на $Y_2 \times \bar{X}$. Поскольку автоморфизм T_ε слабо перемешивающий, из равенства $\nu = (\text{Id} \times T_\varepsilon \times S)\nu$ вытекает, что ν является произведением мер (см. [2, лемма 2.2]). Так как $\nu|_{Y_1 \times Y_2 \times X_0} = \lambda$, получим $\lambda = \mu \times \mu \times \mu$. $\square$

Фактически мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ — попарно независимый джойнинг слабо перемешивающих автоморфизмов G , G' и 2-квазипростого автоморфизма T , причем G' вкладывается в поток. Тогда $\lambda = \mu \times \mu \times \mu$.

(Отличие в доказательстве состоит в замене T_ε на G'_ε .)

2. Второй из авторов в работе [8] показал, что гауссовский автоморфизм и простой автоморфизм, коммутирующий только со своими степенями, дизъ-

юнктны. В [4] доказано, что простой (всех порядков) автоморфизм и гауссовский автоморфизм дизъюнкты. В [9] этот результат обобщен: простой автоморфизм дизъюнктен с бесконечно делимым автоморфизмом, вложенным в поток (гауссовские автоморфизмы обладают этим свойством).

Будем для технического удобства записывать (G, X) как прямое произведение $\prod_{i=1}^n (G_i, X_i)$ «маленьких» факторов (G_i, X_i) . (На самом деле вместо произведения рассматривается сумма независимых факторов.)

Система (G, X, μ) называется *бесконечно делимой*, если для любой окрестности U оператора Θ (ортопроекции на пространство констант в $L_2(X, \mu)$) найдется набор независимых факторов, порождающих систему (G, X, μ) , такой, что все проекторы на пространства, отвечающие этим факторам, лежат в U (здесь рассматривается слабая операторная топология).

Гауссовские автоморфизмы обладают следующим более сильным свойством. Систему (G, X, μ) назовем *равномерно делимой*, если для любой окрестности V тождественного оператора в $L_2(X, \mu)$ можно найти такую факторизацию $\prod_{i=1}^n (G_i, X_i)$, что для всех $k = 1, \dots, n$ ортопроекции на пространства $L_2(\prod_{i, i \neq k} X_i)$ лежат в V . (Выбрасывая из произведения один сомножитель, мы «мало» теряем.)

ТЕОРЕМА 3. Пусть автоморфизм T является 2-квазипростым, а автоморфизм G — слабо перемешивающим. Если G бесконечно делим и вкладывается в поток, то G и T дизъюнкты.

ЛЕММА 4. Пусть ν — эргодический джойнинг 2-квазипростой системы (T, X) и слабо перемешивающей системы $(G_1 \times G_2, Y_1 \times Y_2)$. Если X и Y_1 не являются независимыми относительно меры ν , то Y_2 и $X \times Y_1$ независимы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иными словами лемма утверждает, что для марковского оператора $J: L_2(X) \rightarrow L_2(Y_1 \times Y_2)$, отвечающего джойннгу ν , условие $\text{Im } J \cap L_2(Y_1) \neq \{\text{Const}\}$ влечет за собой $\text{Im } J \subset L_2(Y_1)$. Последнее переписывается следующим образом: для ортопроекции P на пространство $L_2(Y_1)$ условие $PJ \neq \Theta$ влечет за собой $PJ = J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Рассмотрим на $X \times Y_1 \times Y_2 \times X'$ ($X = X'$) эргодическую компоненту относительного произведения $\nu \otimes_{Y_1 \times Y_2} \nu'$, где $\nu' = \nu|_{X' \times Y_1} \times \nu|_{Y_2}$ (этой мере отвечает оператор PJ).

Если X и X' зависимы, то $X \times X' \times Y_1$ и Y_2 независимы, поскольку $X' \times Y_1 \perp Y_2$, а $X \times X' \times Y_1$ является изометрическим расширением пространства $X' \times Y_1$. Таким образом, $X \times Y_1 \perp Y_2$.

Пусть проекция $\nu \otimes_{Y_1 \times Y_2} \nu'$ на $X \times X'$ равна $\mu \otimes \mu$, т.е. $J^*PJ = \Theta$. Так как $J^*PJ = J^*P^*PJ$, получим $J^*P^*PJ = \Theta$, что равносильно равенству $PJ = \Theta$. Последнее означает, что $X \perp Y_1 \times Y_2$ относительно ν' , а следовательно, $X \perp Y_1$ относительно ν . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть марковский оператор J сплетает T и G , а G факторизован в произведение независимых факторов $\prod_{i=1}^n (G_i, X_i)$. Тогда в силу леммы 4

(а) или в ортогональном дополнении к постоянным функциям образ оператора J ортогонален всем пространствам $L_2(X_i)$ (здесь $L_2(X_i)$ обозначает подпространство, отвечающее i -му фактору),

(б) или образ оператора J лежит в одном из пространств $L_2(X_i)$.

Случай (а) означает, что джойнинг, отвечающий оператору J , является попарно независимым, а следовательно, в силу теоремы 2 тривиальным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если автоморфизм T является 3-квазипростым, то попарно независимый джойнинг автоморфизма T с любыми автоморфизмами G_1, G_2 является тривиальным.

Если же случай (а) не возникает, то получаем, что $J = PJ$, где P обозначает ортопроекцию на пространство $L_2(X_i)$ из п. (b). Производя все более мелкое деление автоморфизма G , получим последовательность ортопроекций $P_N \rightarrow \Theta$, таких, что $J = P_N J$. Следовательно, $J = \Theta$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Пусть автоморфизм T является 2-квазипростым, а автоморфизм G — слабо перемешивающим и равномерно делимым. Тогда G и T дизъюнкты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть марковский оператор $J \neq \Theta$ сплетает унитарные операторы, индуцированные автоморфизмами T и G . В силу равномерной делимости найдем такую факторизацию $(G, X) = \prod_{i=1}^n (G_i, X_i)$ в произведение n факторов, для которой $\check{P}_k$, ортопроекции на пространства $L_2(\prod_{i \neq k} X_i)$, настолько близки к тождественному оператору I , что удовлетворяют условиям $\check{P}_k J \neq \Theta$, $k = 1, \dots, n$. Положим $Y_1 = \prod_{i \neq k} X_i$, $Y_2 = X_k$ и применим лемму 4. Имеем $J = \check{P}_k J$ для всех $k = 1, \dots, n$. Получим $J = \check{P}_1 \check{P}_2 \dots \check{P}_n J = \Theta J = \Theta$. $\square$

Результаты заметки в основном получены авторами во время пребывания первого из них в Лаборатории вероятностей VI Парижского университета в 2002 г., ее написание завершено во время пребывания второго из авторов в Московском университете в январе 2005 г.

Авторы признательны М. Леманчику и А. дель Юнко, любезно приславшим препринт, содержащий элементы общей теории квазипростых систем.

ЗАМЕЧАНИЕ. А. И. Даниленко построил квазипростые автоморфизмы качественно нового типа по сравнению с ранее известными. Его действия и любое простое действие дизъюнкты.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **72** (1977), 26–62. [2] В. В. Рыжиков, *Матем. сб.*, **188**:2 (1997), 67–94. [3] E. Glasner, B. Host, D. Rudolph, *Israel J. Math.*, **78** (1992), 131–142. [4] A. del Junco, M. Lemanczyk, *Studia Math.*, **133** (1999), 249–256. [5] J. L. King, J.-P. Thouvenot, *J. Analyse. Math.*, **56** (1991), 211–230. [6] M. Ratner, *Ann. of Math.* (2), **115**:3 (1982), 597–614. [7] V. V. Ryzhikov, *J. Dynam. Control Systems*, **3**:1 (1997), 111–127. [8] J.-P. Thouvenot, in: *Ergodic Theory and Its Connections with Harmonic Analysis* (Proceedings of the Alexandria 1993 Conference), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 205, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 207–235. [9] J.-P. Thouvenot, *Colloq. Math.*, **84/85**, part 2 (2000), 481–483. [10] R. Zimmer, *Ill. J. Math.*, **20** (1976), 555–588.

Московский государственный университет
им М. В. Ломоносова
e-mail: vryz@mech.math.msu.su
6-й Парижский университет П. и М. Кюри
e-mail: kalikow@ccr.jussieu.fr

Поступило в редакцию
17 февраля 2005 г.