Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Стояновский, Описание гладких векторов представления Вейля в геометрической реализации, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 90–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:06:58

УДК 512.815

Описание гладких векторов представления Вейля в геометрической реализации*

© 2006. А. В. Стояновский

1. Основным результатом заметки является описание образа представления Вейля ([1]–[3]) двулистного накрытия симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ в пространстве Шварца $S = S(\mathbb{R}^n)$ комплекснозначных функций $\psi(x_1, \dots, x_n)$ и в пространстве обобщенных функций $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ при интегральном преобразовании, переводящем функцию ψ в функцию

$$u(Z_{jk}) = u_\psi(Z_{jk}) = \int \overline{\psi(x_1, \dots, x_n)} e^{\frac{i}{2} \sum_{j,k} Z_{jk} x_j x_k} dx_1 \cdots dx_n \quad (1)$$

на верхней полуплоскости Зигеля $\mathcal{S}\mathcal{G}$, т. е. на пространстве симметричных комплексных матриц $Z = (Z_{jk})$ с положительно определенной мнимой частью.

Автор признателен В. В. Долотину и Ю. А. Неретину за многочисленные полезные обсуждения.

2. Определения и обозначения. Пусть $S_+, S'_+ (S_-, S'_-)$ — подпредставления четных (соответственно нечетных) функций в пространствах S, S' .

Операторы $\partial/\partial Z_{jk}$ для любых j, k определяются из равенств

$$du = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial Z_{jk}} u dZ_{jk} = \sum_{j < k} 2 \frac{\partial}{\partial Z_{jk}} u dZ_{jk} + \sum_j \frac{\partial}{\partial Z_{jj}} u dZ_{jj}.$$

Пусть $\overline{\mathcal{S}\mathcal{G}}$ — замыкание верхней полуплоскости $\mathcal{S}\mathcal{G}$ при ее естественном вложении в комплексный лагранжев грассманиан. Пусть $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ — метаплектическая группа (двулистное накрытие группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$), состоящая из пар

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \sqrt{\det(CZ + D)} \right), \quad (2)$$

где $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ (A, B, C, D суть $n \times n$ -матрицы; группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ сохраняет симплектическую форму с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$), а $\sqrt{\det(CZ + D)}$ есть одна из двух непрерывных ветвей квадратного корня из $\det(CZ + D) \neq 0$, $Z \in \mathcal{S}\mathcal{G}$. Группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ действует на верхней полуплоскости Зигеля по формуле

$$Z \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Пусть μ — естественное $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ -эquivариантное комплексное линейное расслоение над $\overline{\mathcal{S}\mathcal{G}}$, индуцированное вложением замыкания $\overline{\mathcal{S}\mathcal{G}}$ в проективизацию пространства S' , определяемым следующим образом. Лагранжево подпространство $L \in \overline{\mathcal{S}\mathcal{G}}$ переходит в функцию $\psi_L \in S'$, определяемую однозначно с точностью до пропорциональности как решение системы уравнений

$$\sum_j \left(v_{jk} x_j + w_{jk} i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_L = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №04-01-00640.

где векторы $(v_{jk}, w_{jk})_{j=1}^n$ составляют произвольный базис в L . Расслоение μ можно охарактеризовать тривиализациями и функциями перехода. А именно, над полуплоскостью $\mathcal{SG}$ расслоение тривиально (можно выбрать представитель $\psi_L = \exp(\frac{i}{2} \sum Z_{jk} x_j x_k)$ для L , соответствующего Z), а действию элемента (2) группы $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$ соответствует функция перехода $1/\sqrt{\det(CZ + D)}$. Ограничение расслоения μ на вещественный лагранжев грассманиан есть тензорное произведение расслоения полуплотностей и расслоения Маслова (см. [3, §21.6]).

Пусть W — тавтологическое комплексное векторное расслоение ранга n над $\mathcal{SG}$, слой которого над точкой L есть само пространство L .

Интегральное преобразование (1) переводит нечетные функции в 0. Для нечетных функций ψ определяется следующий аналог этого преобразования:

$$u_l(Z) = u_{l,\psi}(Z) = \int \overline{\psi(x_1, \dots, x_n)} x_l e^{\frac{i}{2} \sum Z_{jk} x_j x_k} dx_1 \cdots dx_n, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (3)$$

3. Теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Преобразование (1) отождествляет пространство S_+ с пространством голоморфных функций $u(Z)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial}{\partial Z_{jl}} \frac{\partial}{\partial Z_{km}} u = \frac{\partial}{\partial Z_{jm}} \frac{\partial}{\partial Z_{kl}} u \quad (4)$$

и продолжающихся до сечений расслоения μ^* на замыкании верхней полуплоскости Зигеля, непрерывных вместе со всеми производными по действию алгебры Ли группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Преобразование (3) отождествляет пространство S_- с пространством голоморфных вектор-функций $(u_l(Z))$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial Z_{jk}} u_l(Z) = \frac{\partial}{\partial Z_{jl}} u_k(Z) \quad (5)$$

и продолжающихся до сечений расслоения $W \otimes \mu^*$ на замыкании верхней полуплоскости Зигеля, непрерывных вместе со всеми производными по действию алгебры Ли группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Следующая теорема была сформулирована в качестве гипотезы Ю. А. Неретиным.

ТЕОРЕМА 3. Преобразование (1) отождествляет пространство S'_+ с пространством голоморфных функций $u(Z)$, которые удовлетворяют уравнениям (4) и имеют полиномиальный рост вблизи границы верхней полуплоскости, точнее, удовлетворяют оценке

$$|u(Z)| \leq C(1 + |Z|)^M (1 + |\det(\text{Im } Z)|^{-1})^N \quad (6)$$

для некоторых C , M , N . Здесь $|Z|$ есть любая норма на пространстве матриц.

ТЕОРЕМА 4. Преобразование (3) отождествляет пространство S'_- с пространством голоморфных вектор-функций $(u_l(Z))$, компоненты которых удовлетворяют уравнениям (5) и оценке (6).

ТЕОРЕМА 5. При отождествлении из теорем 1, 3 элемент, обратный элементу (2) группы $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$, переводит функцию $u(Z)$ в функцию

$$v(Z) = \frac{1}{\sqrt{\det(CZ + D)}} u((AZ + B)(CZ + D)^{-1}).$$

При отождествлении из теорем 2, 4 этот же элемент переводит вектор-функцию $(u_l(Z))$ в функцию $(v_l(Z))$, где

$$\sum_l (CZ + D)_l^k v_l(Z) = \frac{1}{\sqrt{\det(CZ + D)}} u_k((AZ + B)(CZ + D)^{-1}).$$

4. Идеи доказательств. Доказательство теоремы 3 основано на том, что преобразование (1) для обобщенной функции ψ есть композиция прямого образа при отображении

$$x \mapsto b, \quad b = (b_{jk}), \quad b_{jk} = x_j x_k,$$

и преобразования Фурье–Лапласа. Нужно описать образ этих преобразований, что делается стандартными средствами теории обобщенных функций.

Теоремы 4 и 2 легко следуют из теорем 3 и 1. Теорема 5 очевидна.

Существенно доказать теорему 1. Для этого L_2 -норма функции $\psi \in S_+$ выражается через функцию $u_\psi(Z)$ как некоторый интеграл от ее граничных значений на вещественном лагранжевом грассманиане. Затем показывается, что для произвольной функции $u(Z)$, удовлетворяющей условиям теоремы, этот интеграл конечен. Согласно теореме 3, $u = u_\psi$ для некоторого $\psi \in S'_+$. Отсюда выводится, что $\psi \in L_2$. Аналогично с использованием $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$ -эквивариантности доказывается, что $x^\alpha \partial^\beta \psi / \partial x^\beta \in L_2$ для произвольных мультииндексов α, β . Отсюда следует, что $\psi \in S_+$.

5. Замечания. 1. Доказательства теорем не дают описания образа пространства L_2 при преобразованиях (1), (3). Для нахождения этого образа желательно найти инвариантную формулу, выражающую L_2 -норму функции ψ через функцию $u_\psi(Z)$. Формально такую формулу написать нетрудно:

$$\text{const} \cdot \int_{\mathcal{S}\mathcal{G}} u(Z) \overline{u(Z)} \frac{dZ \, d\overline{Z}}{(\det \text{Im } Z)^{n+1/2}}.$$

Сложнее придать ей смысл. По-видимому, это нужно делать аналитическим продолжением по показателю $n + 1/2$. По этому поводу ср. [4].

2. Группа $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$ действует еще в пространстве Гельфанда–Шилова $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ [5] и в сопряженном пространстве. Интересно было бы найти образ этих пространств при преобразованиях (1), (3).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ж. Лион, М. Вернь, *Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды*, Мир, М., 1983. [2] Yu. A. Neretin, in: *Contemporary Mathematical Physics*, Transl. Amer. Math. Soc. Ser. 2, vol. 175, 1996, 37–135. [3] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 3, Мир, М., 1987. [4] Yu. A. Neretin,

<http://arxiv.org/math.RT/0012220>. [5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилор, *Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.

Московский центр непрерывного
математического образования
e-mail: stoyan@mccme.ru

Поступило в редакцию
8 февраля 2005 г.

УДК 517.98

Аддитивность гомологических размерностей для некоторого класса банаховых алгебр*

© 2006. С. Б. ТАБАЛДЫЕВ

В 1997 г. Ю. В. Селиванов в [1] доказал следующие «формулы аддитивности» для гомологических размерностей (определения см. ниже): *если A — унитаризация бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром, а B — произвольная унитарная банахова алгебра, то $\operatorname{dg} A \hat{\otimes} B = \operatorname{dg} A + \operatorname{dg} B$ и $\operatorname{db} A \hat{\otimes} B = \operatorname{db} A + \operatorname{db} B$.*

Пусть Ω — бесконечное метризуемое компактное топологическое пространство, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто. (Напомним [2], что *производное множество* топологического пространства есть множество всех его предельных точек.) Пусть $A = C(\Omega)$ — банахова алгебра всех непрерывных функций на Ω с равномерной нормой. Мы утверждаем (в теореме 2), что формулы аддитивности верны и в этом (новом) случае; легко убедиться в том, что если $C(\Omega)$ — унитаризация бипроективной алгебры, то уже его производное множество первого порядка Ω' состоит из одного элемента, а производное множество второго порядка $\Omega'' = (\Omega')'$ пусто.

Пусть X — левый банахов A -модуль, а E — банахово пространство. Тогда тензорное произведение $X \hat{\otimes} E$ является левым банаховым A -модулем относительно внешнего умножения, определяемого формулой $a \cdot (x \otimes u) = (a \cdot x) \otimes u$ для $a \in A$, $x \in X$ и $u \in E$. (Определение проективного тензорного произведения $\hat{\otimes}$ банаховых пространств и проективного тензорного произведения $\hat{\otimes}_A$ левого и правого банаховых модулей над банаховой алгеброй A можно найти, например, в книге [3].)

Предположим, что A — унитарная банахова алгебра, а X — унитарный левый банахов A -модуль. Напомним, что модуль X называется *проективным* (см. [3]), если он является прямым слагаемым A -модуля $A \hat{\otimes} E$ для некоторого банахова пространства E . Аналогично определяется проективный унитарный банахов A -бимодуль. Напомним также, что длина самой короткой проективной дотустимой (т. е. расщепимой как комплекс банаховых пространств) резольвенты A -модуля X называется его *гомологической размерностью* и обозначается через ${}_A \operatorname{dh} X$. Гомологическая размерность банахова A -бимодуля определяется аналогично. Верхняя грань гомологических размерностей унитарных левых

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00982).