Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Табалдыев, Аддитивность гомологических размерностей для некоторого класса банаховых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 3, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:56:05

<http://arxiv.org/math.RT/0012220>. [5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилор, *Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.

Московский центр непрерывного
математического образования
e-mail: stoyan@mccme.ru

Поступило в редакцию
8 февраля 2005 г.

УДК 517.98

Аддитивность гомологических размерностей для некоторого класса банаховых алгебр*

© 2006. С. Б. ТАБАЛДЫЕВ

В 1997 г. Ю. В. Селиванов в [1] доказал следующие «формулы аддитивности» для гомологических размерностей (определения см. ниже): *если A — унитаризация бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром, а B — произвольная унитарная банахова алгебра, то $\operatorname{dg} A \hat{\otimes} B = \operatorname{dg} A + \operatorname{dg} B$ и $\operatorname{db} A \hat{\otimes} B = \operatorname{db} A + \operatorname{db} B$.*

Пусть Ω — бесконечное метризуемое компактное топологическое пространство, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто. (Напомним [2], что *производное множество* топологического пространства есть множество всех его предельных точек.) Пусть $A = C(\Omega)$ — банахова алгебра всех непрерывных функций на Ω с равномерной нормой. Мы утверждаем (в теореме 2), что формулы аддитивности верны и в этом (новом) случае; легко убедиться в том, что если $C(\Omega)$ — унитаризация бипроективной алгебры, то уже его производное множество первого порядка Ω' состоит из одного элемента, а производное множество второго порядка $\Omega'' = (\Omega')'$ пусто.

Пусть X — левый банахов A -модуль, а E — банахово пространство. Тогда тензорное произведение $X \hat{\otimes} E$ является левым банаховым A -модулем относительно внешнего умножения, определяемого формулой $a \cdot (x \otimes u) = (a \cdot x) \otimes u$ для $a \in A$, $x \in X$ и $u \in E$. (Определение проективного тензорного произведения $\hat{\otimes}$ банаховых пространств и проективного тензорного произведения $\hat{\otimes}_A$ левого и правого банаховых модулей над банаховой алгеброй A можно найти, например, в книге [3].)

Предположим, что A — унитарная банахова алгебра, а X — унитарный левый банахов A -модуль. Напомним, что модуль X называется *проективным* (см. [3]), если он является прямым слагаемым A -модуля $A \hat{\otimes} E$ для некоторого банахова пространства E . Аналогично определяется проективный унитарный банахов A -бимодуль. Напомним также, что длина самой короткой проективной дотустимой (т. е. расщепимой как комплекс банаховых пространств) резольвенты A -модуля X называется его *гомологической размерностью* и обозначается через ${}_A \operatorname{dh} X$. Гомологическая размерность банахова A -бимодуля определяется аналогично. Верхняя грань гомологических размерностей унитарных левых

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00982).

банаховых A -модулей называется *глобальной размерностью* алгебры A . Гомологическая размерность банахова A -бимодуля A называется *биградностью* алгебры A . Глобальная размерность алгебры A обозначается через $\operatorname{dg} A$, а биградность — через $\operatorname{db} A$.

Нетрудно доказать, что в пространстве Ω всюду плотно множество всех его изолированных точек. Выберем произвольные точку $\omega \in \Omega'$ и последовательность попарно различных точек $s_n \in \Omega \setminus \Omega'$, сходящуюся к ω . Пусть $A_\omega = \{f \in C(\Omega) \mid f(\omega) = 0\}$. Банахово пространство ℓ^∞ ограниченных последовательностей является левым банаховым $C(\Omega)$ -модулем относительно внешнего умножения $a \cdot x = \{a(s_n)x_n\}$, где $a \in C(\Omega)$, $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Если B — произвольная унитарная банахова алгебра, а X — произвольный унитарный левый банахов B -модуль, то*

$${}_{C(\Omega)}\widehat{\otimes}_B \operatorname{dh} \ell^\infty \widehat{\otimes} X = 2 + {}_B \operatorname{dh} X \quad (= {}_{C(\Omega)} \operatorname{dh} \ell^\infty + {}_B \operatorname{dh} X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим левый $C(\Omega)$ -модуль $c_e = A_\omega \widehat{\otimes}_{C(\Omega)} \ell^\infty$ и морфизм левых банаховых $C(\Omega)$ -модулей $\kappa: c_e \rightarrow \ell^\infty$, определяемый формулой $\kappa(a \otimes_{C(\Omega)} x) = a \cdot x$ для $a \in A_\omega$ и $x \in \ell^\infty$.

Согласно [4, лемма 9.1], левый банахов $C(\Omega)$ -модуль ℓ^∞ имеет такую допустимую резольвенту $0 \leftarrow \ell^\infty \leftarrow Q \leftarrow P \xleftarrow{\partial} A_\omega \widehat{\otimes} c_e \leftarrow 0$ длины 2, что

$$Q = (C(\Omega) \widehat{\otimes} \ell^\infty) \oplus c_e, \quad P = (C(\Omega) \widehat{\otimes} c_e) \oplus (A_\omega \widehat{\otimes} \ell^\infty),$$

$$\partial(a \otimes y) = (a \otimes y, a \otimes \kappa(y)) \quad (a \in A_\omega, y \in c_e).$$

Очевидно [3, предложение II.3.13], что $C(\Omega)$ -модуль c_e топологически изоморфен подмодулю $c_0 \subset \ell^\infty$, состоящему из всех последовательностей, стремящихся к нулю. Так как последовательность s_n сходится к ω и состоит из изолированных точек, то нетрудно заметить, что модуль c_0 изоморфен идеалу всех функций из $C(\Omega)$, которые равны 0 при любом $s \in \Omega$, $s \neq s_n$ ($n = 0, 1, \dots$). Поскольку Ω метризуемо, банаховы $C(\Omega)$ -модули A_ω и c_e являются проективными [3, теорема IV.2.13]. Следовательно, указанная выше резольвента проективна.

Если ${}_B \operatorname{dh} X$ есть 0 либо ∞ , то результат вытекает из [1, следствие 3.14]. Если ${}_B \operatorname{dh} X = n$, где $0 < n < \infty$, выберем проективную резольвенту

$$0 \leftarrow X \leftarrow P_0 \leftarrow \dots \leftarrow P_{n-1} \xleftarrow{\psi} P_n \leftarrow 0$$

модуля X . Согласно [1, следствие 3.2], мы имеем ${}_{C(\Omega)}\widehat{\otimes}_B \operatorname{dh} \ell^\infty \widehat{\otimes} X \leq 2 + n$. Предположим, что ${}_{C(\Omega)}\widehat{\otimes}_B \operatorname{dh} \ell^\infty \widehat{\otimes} X < 2 + n$. Тогда, используя [1, предложение 3.18], получаем, что морфизм левых $C(\Omega) \widehat{\otimes} B$ -модулей

$$\Delta: A_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n \longrightarrow (C(\Omega) \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \oplus (A_\omega \widehat{\otimes} \ell^\infty \widehat{\otimes} P_n) \oplus (A_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}),$$

определяемый формулой

$$\Delta(a \otimes y \otimes z) = (a \otimes y \otimes z, a \otimes \kappa(y) \otimes z, a \otimes y \otimes \psi(z)) \quad (a \in A_\omega, y \in c_e, z \in P_n),$$

имеет левый обратный. Теперь из [1, Proposition 4.6] мы получаем, что морфизм $\psi: P_n \rightarrow P_{n-1}$ имеет левый обратный морфизм левых B -модулей. Отсюда ${}_B \operatorname{dh} X < n$, а это противоречит предположению. $\square$

В работе [5] было доказано, что если Ω — бесконечный метризуемый компакт, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто,

то $\operatorname{dg} C(\Omega) = \operatorname{db} C(\Omega) = 2$. С помощью этого результата, теоремы 1 и некоторых оценок из работы [1] доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если B — произвольная унитарная банахова алгебра, то*

$$\operatorname{dg} C(\Omega) \widehat{\otimes} B = \operatorname{dg} C(\Omega) + \operatorname{dg} B (= 2 + \operatorname{dg} B),$$

$$\operatorname{db} C(\Omega) \widehat{\otimes} B = \operatorname{db} C(\Omega) + \operatorname{db} B (= 2 + \operatorname{db} B).$$

Теорема 2 и следствие 3.16 из [1] сразу доставляют

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — метризуемые компакты, у каждого из которых производное множество некоторого конечного порядка пусто. Пусть $A = C(\Omega_1) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} C(\Omega_n)$ — проективное тензорное произведение банаховых алгебр $C(\Omega_i)$. Тогда $\operatorname{dg} A = \operatorname{db} A = 2m$, где m — число бесконечных пространств среди Ω_i .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть A — такая же банахова алгебра, как в следствии 1, а B — произвольная унитарная банахова алгебра. Тогда $\operatorname{dg} A \widehat{\otimes} B = \operatorname{dg} A + \operatorname{dg} B$ и $\operatorname{db} A \widehat{\otimes} B = \operatorname{db} A + \operatorname{db} B$.*

Автор благодарен Ю. В. Селиванову и А. Я. Хелемскому за постановку задач и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yu. V. Selivanov, in: *Banach Algebras'97* (eds. E. Albrecht and M. Mathieu), Walter de Gruyter, Berlin, 1998, 441–459. [2] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966. [3] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986. [4] А. Я. Хелемский, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **3** (1978), 223–242. [5] S. B. Tabaldyev, *Bull. London Math. Soc.*, **37** (2005), 927–932.

Московский государственный технический
университет им. Баумана
e-mail: seytek@newmail.ru

Поступило в редакцию
22 июня 2005 г.