Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Костов, Очень гиперболические многочлены, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:43:57

7. *Dosiev A. A.* J. Math. Sciences. **124**, вып. 2, 4886–4908 (2004). 8. *Хеллемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. Наука, М., 1989. 9. *Досиев А. А.* Функц. анализ и его прил., **37**, вып. 1, 73–77 (2003). 10. *Fainshtein A. S.* J. Operator Theory, **29**, 3–27 (1993). 11. *Туровский Ю. В.* Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 2, 77–78 (1984). 12. *Dosiev A. A.* J. Operator Theory, **48**, вып. 3, 585–614 (2002).

Department of Mathematics, Atılım University, Ankara
e-mail: adosiev@atilim.edu.tr, dosiev@yahoo.com

Поступило в редакцию
10 декабря 2003 г.

УДК 512.622

Очень гиперболические многочлены

© 2005. В. П. Костов

Посвящается памяти академика А. А. Болибруха

1. Введение. В этой работе мы рассматриваем вещественные многочлены одной вещественной переменной. Многочлен называется *гиперболическим* (соответственно *строго гиперболическим*), если все его корни вещественные (соответственно вещественные и отличны друг от друга). Производная гиперболического многочлена степени ≥ 2 гиперболична. Многочлен f называется *первообразной порядка k* многочлена g , если $f^{(k)} = g$. Гиперболический многочлен (ГМ) называется *очень гиперболическим*, если он имеет гиперболические первообразные всех порядков. *Вектор кратности* (ВК) заданного ГМ — это вектор с компонентами, равными кратностям различных корней рассматриваемого многочлена и расположенными в порядке возрастания. Пример: ВК многочлена $x^2(x-1)$ равняется $(2, 1)$.

ПРИМЕР 1. Все ГМ степени ≤ 3 очень гиперболические: ГМ степени 1 (соответственно 2) интегрируется до ГМ степени 2 (соответственно 3); если у ГМ третьей степени ВК равен $(1, 1, 1)$ (соответственно $(2, 1)$, $(1, 2)$, (3)), то, интегрируя всегда от среднего корня (соответственно от корня кратности > 1), можно получить первообразные с ВК $(1, k, 1)$ (соответственно $(k, 1)$, $(1, k)$, (k)). ГМ $x^k(x-1)^2$ для $k \geq 2$ не имеет гиперболической первообразной.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}^*$ существуют строго и очень гиперболический многочлен степени n и постоянные интегрирования (ПИ) c_i , такие, что

- (а) первообразные всех порядков с ПИ c_i строго и очень гиперболичны;
- (б) для $i \in \mathbb{N}^*$ существуют окрестности Δ_i чисел c_i , такие, что первообразные всех порядков с любыми ПИ $d_j \in \Delta_i$ строго и очень гиперболичны.

Для семейства многочленов $P(x, \tilde{a}) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $x, a_i \in \mathbb{R}$, положим $H_n = H_n(\tilde{a}) = \{\tilde{a} \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ гиперболичен}\}$ (область гиперболичности) и $D_n = D_n(\tilde{a}) = \{\tilde{a} \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ очень гиперболичен}\}$. Мы полагаем $a_1 = 0$, чего можно добиться сдвигом переменной x , и $a_2 = -1$ (поскольку растяжения $x \mapsto e^t x$, $a_j \mapsto e^{jt} a_j$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняют области H_n и D_n , а $H_n \cap \{a_2 > 0\} = \emptyset$, $H_n \cap \{a_2 = 0\} = D_n \cap \{a_2 = 0\} = \emptyset$).

ТЕОРЕМА 3. Область D_4 изображена на рис. 1, на котором $a = a_3$, $b = a_4$. Она симметрична относительно оси Ob и ограничена замыканием кривой $\kappa = ABCD \dots WXYZA$, состоящей из счетного количества алгебраических дуг. Кроме этой кривой замыкание содержит точку $S = (0, 1/12) \in Ob$. Касательные к дугам имеют пределы в их конечных точках; эти касательные и их пределы нигде не вертикальны; их наклоны ограничены на всей кривой, они положительны для дуг $AB, BC, CD, \dots$ и отрицательны для дуг $\dots, WX, XY, YZ$. В общих точках $B, C, D, \dots, W, X, Y$ двух соседних дуг пределы касательных слева и справа разные, как показано на рис. 1. Точки A и Z являются точками возврата. Существует предельное значение (равное нулю) наклона касательной, если точка кривой κ стремится к точке S . Кривизна каждой дуги кривой κ направлена во внутренность области D_4 .

Рис. 1

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Множества D_n не полуалгебраические при $n \geq 4$. Для D_4 это следует из счетности количества дуг в кривой κ , для $n \geq 5$ — из того, что множество D_{n-1} является проекцией на $Oa_1 \dots a_{n-1}$ множества $D_n(\tilde{a}^*)$, где $a_j^* = na_j / \max(n-j, 1)$.

Автор признателен Б. З. Шапиро, А. Галлиго и Ю. Борча за полезные обсуждения.

2. Доказательство теоремы 2. 1°. Окрестности Δ_k будем искать в виде $(7g_k/8, g_k)$ при нечетном и в виде $(g_k, 7g_k/8)$ при четном k , где $(-1)^{k-1}g_k > 0$. Положим $P = x + d_0$, $\delta_0 = 3/4$, $\varepsilon_0 = 5/4$, $g_0 = -1$. Мы построим последовательности чисел δ_k , ε_k , g_k , $k = 0, 1, \dots$, такие, что $0 < \delta_k < \varepsilon_k < \delta_{k-1}$ и для $n = 0, 1, \dots$ первообразная $P^{(-n)}$ порядка n многочлена P с ПИ $d_k \in \bar{\Delta}_k$ имеет простой корень в каждом интервале $I_{n,\nu} = ((n+1-\nu)\delta_\nu, (n+1-\nu)\varepsilon_\nu)$, $\nu = 0, \dots, n$ (простой, поскольку при фиксированном n интервалы $I_{n,\nu}$ не пересекаются и $\deg P^{(-n)} = n+1$). Для $n = 1$ утверждению теоремы удовлетворяет

многочлен P , а для $n > 1$ — его первообразные (можно положить $c_k = 15g_k/16$). Если имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} |d_j| \left(\frac{4}{3}\right)^j < \frac{1}{8}, \quad (A_0)$$

то многочлен $P^{(-n)} = (x^n/(n+1)!)(x + (n+1)d_0 + \sum_{j=1}^n (n+1)! d_j/((n-j)! x^j))$ имеет корень в интервале $I_{n,0} = (3(n+1)/4, 5(n+1)/4)$. В самом деле, $d_0 \in (-1, -7/8)$ и для $x \in I_{n,0}$ имеют место неравенства $|(n+1)! d_j/((n-j)! x^j)| \leq |d_j|(n+1)!/((n-j)! (3(n+1)/4)^j) \leq (n+1)|d_j|(4/3)^j$; следовательно,

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{(n+1)! d_j}{(n-j)! x^j} \right| < \frac{n+1}{8}.$$

2°. Предположим, что для $0 \leq i < k$

- 1) числа $\delta_i, \varepsilon_i, g_i$ построены;
- 2) имеют место неравенства

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \alpha_{i,j} |d_j| < h_i, \quad (A_i)$$

($\alpha_{i,j} > 0, h_i > 0$) при $d_j \in \overline{\Delta}_j, j < k, d_j = 0, j \geq k$;

3) для $n = 0, 1, \dots$ многочлен $P^{(-n)}$ с ПИ $d_j, j = 0, 1, \dots$, имеет по корню в каждом интервале $I_{n,\nu}, \nu = 0, \dots, \min(n, i)$.

Неравенства (A_i) строгие и выполняются и при достаточно малых $d_j \neq 0, j \geq k$. Построим $\delta_k, \varepsilon_k, g_k$ и неравенство (A_k) и покажем, что для $n \geq k$ многочлен $P^{(-n)}$ имеет корень в интервале $I_{n,k} = (s\delta_k, s\varepsilon_k)$, где $s = n+1-k$. Положим $\delta_k = 3\theta/4, \varepsilon_k = 5\theta/4$, где $0 < \theta < 4\delta_{k-1}/5$; таким образом $\varepsilon_k < \delta_{k-1}$. Положим $P^{(-k+1)}(x) = d_{k-1}(1+b_1x+\dots+b_kx^k)$ (где $b_k = 1/(k!d_{k-1}), b_j = d_{k-j-1}/(j!d_{k-1}), j < k$), $S_{k,s}(x) = \sum_{j=k+1}^n d_j s!/(x^{j-k}(n-j)!)$, $Q_{k,s}(x) = 1 + b_1x/(s+1) + \dots + b_k s! k! x^k/(k+s)!, \beta = \max_{d_j \in \Delta_j, j < k} (1!|b_1| + \dots + k!|b_k|)$. Тогда

$$P^{(-n)} = \frac{d_{k-1} x^{s-1} Q_{k,s}(x)}{s!} \left(x + \frac{s d_k}{d_{k-1} Q_{k,s}(x)} + \frac{S_{k,s}(x)}{d_{k-1} Q_{k,s}(x)} \right) \quad (1)$$

3°. Если $\theta \in (0, 1/2]$ и $x \in I_{n,k}$, то

$$\begin{aligned} |Q_{k,s}(x) - 1| &\leq \frac{|b_1||x|}{s+1} + \dots + \frac{k!|b_k||x^k|s!}{(k+s)!} \leq \beta \left(\frac{|x|}{s+1} + \dots + \frac{|x^k|s!}{(k+s)!} \right) \\ &\leq \beta \left(\frac{5\theta}{4} \frac{s}{s+1} + \dots + \left(\frac{5\theta}{4} \right)^k \frac{s^k s!}{(k+s)!} \right) \leq \beta \left(\frac{5\theta}{4} + \left(\frac{5\theta}{4} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{5\beta\theta/4}{1-5\theta/4} \leq \frac{10\beta\theta}{3}. \end{aligned}$$

Эта оценка не зависит от s .

4°. Положим $g_k = -\theta g_{k-1}$, где $\theta \in (0, \min(1/2, 4\delta_{k-1}/5, 3/(10^5\beta)))$, и предположим, что выполняются неравенства $(A_0)-(A_{k-1})$ при $d_j \in \overline{\Delta}_j, j \leq k, d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = 0$ (они строгие и имеют место при $d_k = d_{k+1} = \dots = 0$; значит, такое θ существует). Тогда $-d_k/(\theta d_{k-1}) \in [7/8, 8/7]$, и если $x \in I_{n,k}$, то $Q_{k,s}(x) \in$

$[1 - 10^{-4}, 1 + 10^{-4}]$; стало быть, имеет место включение $(-sd_k/(d_{k-1}Q_{k,s}(x))) \in [7s\theta/9, 17s\theta/14]$ (см. (1)). Положим

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |d_j| \left(\frac{4}{3\theta}\right)^{j-k} < 10^{-8} |g_{k-1}| \theta. \quad (A_k)$$

Следовательно,

$$|S_{k,s}(x)| \leq \sum_{j=k+1}^n |d_j| \frac{s!}{(3s\theta/4)^{j-k}(n-j)!} \leq s \sum_{j=k+1}^n |d_j| \left(\frac{4}{3\theta}\right)^{j-k} < s 10^{-8} |g_{k-1}| \theta.$$

Значит, $|S_{k,s}(x)/(d_{k-1}Q_{k,s}(x))| \leq |8S_{k,s}(x)/(7g_{k-1}Q_{k,s}(x))| < 10^{-5}s\theta$. Тогда $P^{(-n)}$ (см. (1)) имеет корень в интервале $[(7/9 - 10^{-5})s\theta, (17/14 + 10^{-5})s\theta] \subset I_{n,k}$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 3. 1°. На рис. 1 замкнутые области AVZ , $ATUZ$, $ANQRZ$, $AJKLMZ$, $AEF \dots HIZ$ — это множество H_4 и его подмножества H_5^* , H_6^* , H_7^* , H_n^* , состоящие из многочленов, у которых имеются гиперболические первообразные порядка $1, 2, 3, n$. (Область H_5^* есть проекция на Oab области гиперболичности многочлена $x^5/5 - x^3/3 + ax^2/2 + bx + c$ и т. д.) Напомним, что H_n^* получается из H_n^0 (проекции в Oab множества H_n , см. работу [1]) растяжением координатных осей. Мы отождествляем страты множеств H_n^0 и H_n^* с определяющими их ВК, см. рис. 1; они имеют две (три) компоненты, если страт есть точка (дуга). Пример: ВК точек A , E равны $(n-1, 1)$, $(n-2, 2)$; ВК дуг AE , EF равны $(n-2, 1, 1)$, $(n-3, 1, 2)$. На страте $(k, 1, s)$, $k > 1$, $s > 1$, имеется единственный многочлен, имеющий гиперболическую первообразную, ее ВК равен $(k+1, s+1)$ (после интегрирования значения в критических точках кратности k и s должны совпадать). На этом страте нет точек стратов $(k+1, 1, s)$, $(k, 1, s+1) \subset H_{n+1}^*$ (они дают при дифференцировании ВК вида $(k, 1, 1, s-1)$, $(k-1, 1, 1, s)$). Пример: точка K (ее ВК есть $(4, 3)$) лежит на дуге NQ (ВК $(3, 1, 2)$). Имеются включения $H_{n+1}^* \supset (n-1, 1, 1) \subset (n-2, 1, 1) \subset H_n^*$, $H_{n+1}^* \supset (1, 1, n-1) \subset (1, 1, n-2) \subset H_n^*$.

2°. При фиксированном s и при $k \rightarrow \infty$, $k+s+1 = n$, пределом замыкания страта $(k, 1, s)$ является алгебраическая дуга. (Для стратов $(s, 1, k)$ доказательство аналогично.) В самом деле, этот страт состоит из ГМ P , таких, что $P^{(n-4)} = x^4 - x^2 + ax + b$, т. е. $P = 24x^n/n! - 2x^{n-2}/(n-2)! + ax^{n-3}/(n-3)! + bx^{n-4}/(n-4)! + \dots$. Обозначим через σ_j симметрические функции Виета от корней $\xi \leq \eta \leq \varsigma$ (кратностей $k, 1, s$) многочлена P . Положим $\varphi_j = k\xi^j + \eta^j + s\varsigma^j$. Тогда существуют многочлены M_j , такие, что $\varphi_j = (-1)^{j-1}j\sigma_j + M_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1})$. Так как $\sigma_1 = \varphi_1 = k\xi + \eta + s\varsigma = 0$, то $\varphi_2 = -2\sigma_2 = k\xi^2 + \eta^2 + s\varsigma^2 = n(n-1)/6$, $\varphi_3 = 3\sigma_3 = k\xi^3 + \eta^3 + s\varsigma^3 = -an(n-1)(n-2)/8$, $\varphi_4 = -4\sigma_4 + 2\sigma_2^2 = k\xi^4 + \eta^4 + s\varsigma^4 = -bn(n-1)(n-2)(n-3)/6 + n^2(n-1)^2/72$.

3°. Положим $\eta = k\theta/\sqrt{6}$, $\varsigma = k\psi/\sqrt{6}$, $a' = 6\sqrt{6}a/8$, $b' = 6b - 1/2$. Тогда при $k \rightarrow \infty$ (а значит, при $n \rightarrow \infty$, $n/k \rightarrow 1$) уравнения имеют вид $\sqrt{6}\xi + \theta + s\psi = 0$, $\theta^2 + s\psi^2 = 1$, $\theta^3 + s\psi^3 = -a'$, $\theta^4 + s\psi^4 = -b'$, а неравенства $\xi \leq \eta \leq \varsigma$ переходят в $0 \leq \theta \leq \psi$. Положим $\theta = \cos t$, $\psi = (\sin t)/\sqrt{s}$. Тогда $\chi := db'/da' = (db'/dt)/(da'/dt) = (4/3)(\theta + \psi) = (4/3)(\cos t + (\sin t)/\sqrt{s})$. Из этих формул следует ограниченность и положительность наклона касательных и их пределов в концах дуг. В левых концах имеет место равенство $\Xi := (\theta, \psi, a', b', \chi) =$

$(1/\sqrt{s})(0, 1, -1, -1/\sqrt{s}, 4/3)$, а в правых $\Xi = (1/\sqrt{s+1})(1, 1, -1, -1/\sqrt{s+1}, 8/3)$. На всей дуге выполняются условия $0 \leq \theta$, $\psi \leq 1/\sqrt{s}$ и $0 \leq \chi < 8/3\sqrt{s}$; поэтому $\chi \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, т. е. предел наклона касательных, когда точка кривой κ стремится к S , равен 0. Координату b точки S можно найти из предела многочленов $(24/(2k)!)((x^2 - (2k-1)/6)^k)^{(2k-4)}$ при $k \rightarrow \infty$. Он равен $x^4 - x^2 + 1/12$, т. е. координата равна $1/12$.

4°. Для каждого n кривизна дуг границы области H_n^0 (а значит, и области H_n^*) направлена в ее внутренность и область симметрична относительно оси Ob , причем A и Z — точки возврата, см. работу [1]; эти свойства сохраняются в пределе при $n \rightarrow \infty$. Детали доказательства нетрудно восстановить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kostov V. P. Serdica Math. J., **25**, 47–70 (1999).

Université de Nice-Sophia Antipolis,
Laboratoire de Mathématiques
e-mail: kostov@math.unice.fr

Поступило в редакцию
22 октября 2003 г.

УДК 517.983

О причинной обратимости относительно конуса разностно-интегральных операторов в пространствах вектор-функций

© 2005. В. Г. КУРБАТОВ

Пусть $\mathbb{E}$ — комплексное банахово пространство, а n — натуральное число. Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \leq p \leq \infty$, банахово пространство всех классов совпадающих почти всюду измеримых по Бохнеру функций $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}$, наделенное обычной нормой [1]. Через $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{E})$ обозначим алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbb{E}$, а через $\sigma(a)$ — спектр оператора $a \in \mathbf{B}$.

Пусть фиксирован конус $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что конус $\mathbb{S}$ замкнут в обычной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ и является *воспроизводящим*, т. е. $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^n$. Линейный ограниченный оператор $T: L_p \rightarrow L_p$ называют *причинным* (относительно конуса $\mathbb{S}$), если для любой функции $x \in L_p$ и любого открытого множества $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x(s) = 0, s \in W - \mathbb{S} \implies (Tx)(s) = 0, s \in W - \mathbb{S}.$$

Причинность соответствует тому, что «настоящее» может зависеть только от «прошлого». В частности, если в пространстве $\mathbb{R}^4$ рассмотреть *световой конус*

$$\mathbb{S} = \{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \leq t_0\},$$

то понятие причинности превратится в основное положение специальной теории относительности о том, что физические взаимодействия не могут распространяться быстрее скорости света.