Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Курбатов, О причинной обратимости относительно конуса разностно-интегральных операторов в пространствах вектор-функций, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 84–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:06:09

$(1/\sqrt{s})(0, 1, -1, -1/\sqrt{s}, 4/3)$, а в правых $\Xi = (1/\sqrt{s+1})(1, 1, -1, -1/\sqrt{s+1}, 8/3)$. На всей дуге выполняются условия $0 \leq \theta$, $\psi \leq 1/\sqrt{s}$ и $0 \leq \chi < 8/3\sqrt{s}$; поэтому $\chi \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, т. е. предел наклона касательных, когда точка кривой κ стремится к S , равен 0. Координату b точки S можно найти из предела многочленов $(24/(2k)!)((x^2 - (2k-1)/6)^k)^{(2k-4)}$ при $k \rightarrow \infty$. Он равен $x^4 - x^2 + 1/12$, т. е. координата равна $1/12$.

4°. Для каждого n кривизна дуг границы области H_n^0 (а значит, и области H_n^*) направлена в ее внутренность и область симметрична относительно оси Ob , причем A и Z — точки возврата, см. работу [1]; эти свойства сохраняются в пределе при $n \rightarrow \infty$. Детали доказательства нетрудно восстановить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kostov V. P. Serdica Math. J., **25**, 47–70 (1999).

Université de Nice-Sophia Antipolis,
Laboratoire de Mathématiques
e-mail: kostov@math.unice.fr

Поступило в редакцию
22 октября 2003 г.

УДК 517.983

О причинной обратимости относительно конуса разностно-интегральных операторов в пространствах вектор-функций

© 2005. В. Г. КУРБАТОВ

Пусть $\mathbb{E}$ — комплексное банахово пространство, а n — натуральное число. Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \leq p \leq \infty$, банахово пространство всех классов совпадающих почти всюду измеримых по Бохнеру функций $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}$, наделенное обычной нормой [1]. Через $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{E})$ обозначим алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbb{E}$, а через $\sigma(a)$ — спектр оператора $a \in \mathbf{B}$.

Пусть фиксирован конус $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что конус $\mathbb{S}$ замкнут в обычной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ и является *воспроизводящим*, т. е. $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^n$. Линейный ограниченный оператор $T: L_p \rightarrow L_p$ называют *причинным* (относительно конуса $\mathbb{S}$), если для любой функции $x \in L_p$ и любого открытого множества $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x(s) = 0, s \in W - \mathbb{S} \implies (Tx)(s) = 0, s \in W - \mathbb{S}.$$

Причинность соответствует тому, что «настоящее» может зависеть только от «прошлого». В частности, если в пространстве $\mathbb{R}^4$ рассмотреть *световой конус*

$$\mathbb{S} = \{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \leq t_0\},$$

то понятие причинности превратится в основное положение специальной теории относительности о том, что физические взаимодействия не могут распространяться быстрее скорости света.

При $n = 1$ в класс причинных операторов попадают операторы, соответствующие обыкновенным функционально-дифференциальным уравнениям (см., например, [2–4]). В предельном случае, когда конус $\mathbb{S}$ является полупространством, в класс причинных операторов попадают смешанные функционально-дифференциальные операторы [5]. Многомерные причинные операторы естественно возникают (см., например, [6]) при решении гиперболических уравнений с частными производными. Некоторые математические задачи, связанные с многомерными причинными операторами, рассматривались в [7–11]. Отметим также работы [12, 13], посвященные многомерным функционально-дифференциальным уравнениям.

Множество $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(L_p)$ всех причинных операторов образует подалгебру в алгебре всех линейных ограниченных операторов, действующих в L_p . Причинный оператор T называют *причинно обратимым*, если обратный оператор T^{-1} существует и также является причинным. Иными словами, причинная обратимость — это обратимость в алгебре $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(L_p)$. Спектр оператора T в алгебре причинных операторов будем называть *причинным спектром* и обозначать символом $\sigma^{\mathbb{S}}(T)$. Очевидно, причинная обратимость T равносильна условию $0 \notin \sigma^{\mathbb{S}}(T)$. Причинная обратимость не совпадает с обычной, а причинный спектр — с обычным спектром. Действительно, пусть $h \in \mathbb{S}$, но $-h \notin \mathbb{S}$; тогда оператор сдвига $(Sx)(t) = x(t - h)$ обратим, но обратный к нему $(S^{-1}x)(t) = x(t + h)$ причинным уже не является.

В заметке описывается причинный спектр оператора вида

$$((D + G)x)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(t - t_n) + \int_{\mathbb{S}} g(s)x(t - s) ds, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Для случая $\dim \mathbb{E} = 1$ условия причинной обратимости оператора $D + G$ ранее были получены в [8]. Для произвольного $\mathbb{E}$ при $n = 1$ условия обычной и причинной обратимости оператора $D + G$ описаны в [4].

Рассмотрим *разностный* оператор

$$(Dx)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(t - t_n), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $t_n \in \mathbb{S}$, $a_n \in \mathbf{B}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$, и *интегральный* оператор

$$(Gx)(t) = \int_{\mathbb{S}} g(s)x(t - s) ds, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $g \in L_1(\mathbb{S}, \mathbf{B})$, а также *разностно-интегральный* оператор $D + G$. Нетрудно видеть, что операторы D и G действуют в $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \leq p \leq \infty$, ограничены и являются причинными.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Символом $\mathbb{S}^* \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим множество всех $y \in \mathbb{R}^n$, таких, что $\langle y, x \rangle \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{S}$.

ТЕОРЕМА. *Причинный спектр оператора $D + G$ в $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \leq p \leq \infty$, совпадает с множеством*

$$\bigcup \left\{ \sigma(a) : a \in \overline{\bigcup \{ \Psi_{D+G}(\gamma, \omega) : \gamma \in \mathbb{S}^*, \omega \in \mathbb{R}^n \}} \right\},$$

где черта означает замыкание, а

$$\Psi_{D+G}(\gamma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\langle -\gamma + i\omega, t_n \rangle} + \int_{\mathbb{S}} e^{\langle -\gamma + i\omega, t \rangle} g(t) dt.$$

Оператор $D+G$ причинно обратим тогда и только тогда, когда найдется такое $N < +\infty$, что для всех $\gamma \in \mathbb{S}^*$ и $\omega \in \mathbb{R}^n$ обратный к оператору $\Psi_{D+G}(\gamma, \omega)$ существует и $\|(\Psi_{D+G}(\gamma, \omega))^{-1}\| \leq N$.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Обозначим через $\mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{C})$ алгебру всех скалярных, т. е. действующих в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, операторов вида $D+G$. Нетрудно видеть, что она коммутативна, причем множество интегральных операторов G образует в ней идеал. Относительно нормы

$$\|D + G\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \int_{\mathbb{S}} |g(t)| dt$$

эта алгебра является банаховой. Поэтому спектр в ней можно вычислять с помощью преобразования Гельфанда [14,15]. В [8, теорема 81] доказано, что пространство характеров этой алгебры можно отождествить с суммой $\mathbb{K}_d \sqcup \mathbb{K}$ пространства $\mathbb{K}_d$ всех характеров конуса $\mathbb{S}$, рассматриваемого как полугруппа, и пространства $\mathbb{K}$ всех непрерывных характеров. Таким образом, преобразование Гельфанда можно отождествить с отображением

$$\theta: \mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{K}_d \sqcup \mathbb{K}, \mathbb{C}).$$

Можно показать [4, Theorem 4.5.1], что алгебра $\mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{E})$ (уже не обязательно коммутативная) всех операторов вида $D + G$, действующих в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, где $\mathbb{E}$ произвольно, изоморфна (но только алгебраически, т. е. без сохранения сходимости) алгебре $\mathbf{B}(\mathbb{E}) \overline{\otimes} \pi \mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{C})$, где π — наибольшая кросс-норма, а черта означает взятие пополнения, причем операторнозначное преобразование Гельфанда

$$\Theta = \mathbf{1} \otimes \theta: \mathbf{B}(\mathbb{E}) \overline{\otimes} \pi \mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{K}_d \sqcup \mathbb{K}, \mathbf{B}(\mathbb{E}))$$

сохраняет спектр. Формула из утверждения теоремы является результатом вычисления спектра оператора $\Theta(D + G)$ в алгебре $C(\mathbb{K}_d \sqcup \mathbb{K}, \mathbf{B}(\mathbb{E}))$. При этом используется тот факт, что $\mathbb{K}$ является всюду плотным в естественной топологии пространства $\mathbb{K}_d \sqcup \mathbb{K}$.

Заключительный этап состоит в доказательстве наполненности [15] подалгебры $\mathbf{A}_{d \oplus ac}(\mathbb{E})$ в алгебре $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(L_p)$. Это делается по аналогии с [4, Theorem 4.5.5]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно (см., например, [14, гл. 5]), что уже в случае $\dim \mathbb{E} = 1$ и $n = 1$ удобной формулы для вычисления спектра оператора

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbb{S}} x(t-s) \mu(ds), \quad t \in \mathbb{R},$$

свертки с произвольной ограниченной мерой μ , имеющей нетривиальную непрерывную сингулярную составляющую, в $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p \neq 2$, не существует. Аналогичным образом обстоит дело в случае $n > 1$ и причинной обратимости (см., например, [4, 4.2.12, 4.3.11]). Поэтому распространить теорему на существенно более широкие классы операторов свертки вряд ли возможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. Наука, М., 1977. 2. Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge–New York, Cambridge Univ. Press, 1990. 3. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1992. 4. Kurbatov V. G. Functional Differential Operators and Equations. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1999. 5. Kamenskii G. A., Myshkis A. D. Nonlinear Anal., **34**, No. 2, 283–287 (1998). 6. Владимирцов В. С. Обобщенные функции в математической физике. Наука, М., 1979. 7. Kurbatov V. G., Studenikin A. A. Funct. Differ. Equ., **4**, No. 3–4, 295–327 (1997). 8. Студеникин А. А. Операторы свертки с мерой, сконцентрированной в подполугруппе. Липецк, 1998, Деп. в ВИНТИ 19.06.98, №1871-B98. 9. Skopin V. A. Funct. Differ. Equ., **7**, No. 3–4, 335–371 (2000). 10. Скопин В. А. Дифференциальные уравнения, **37**, №9, 1265–1272 (2001). 11. Криштал И. А. Вестник ВГУ, сер. физ. матем., №1, 143–150 (2002). 12. Антоневич А. Б., Лебедев А. В. Труды С.-Петербург. матем. о-ва, **6**, 34–140 (1998). 13. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Operator Theory, Vol. 91, Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997. 14. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шиллов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960. 15. Бурбаки Н. Спектральная теория. Мир, М., 1972.

Липецкий государственный технический университет
e-mail: kv51@inbox.ru, kurbatov@stu.lipetsk.ru

Поступило в редакцию
19 ноября 2003 г.

УДК 517.98

Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр*

© 2005. В. М. Мануйлов, К. Томсен

Фундаментальная конструкция, введенная в [4] Конном и Хигсоном, сопоставляет расширению сепарабельной C^* -алгебры A с помощью σ -унитальной C^* -алгебры B асимптотический гомоморфизм $SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A \rightarrow B$. Выяснение вопроса о том, сколько информации теряется при таком переходе от расширения к построенному по нему асимптотическому гомоморфизму, является трудной задачей. Она особенно интересна в связи с тем, что подход к изучению расширений, развитый Брауном, Дугласом и Филлмором в [3] и обобщенный Каспаровым [7], обнаруживает дефект: в результате не всегда получается групповая структура [2], даже когда гомотопические классы расширений образуют группу [8]. В наших предыдущих работах [9, 11] нам удалось в некоторых случаях определить, какая информация содержится в асимптотическом гомоморфизме, полученном конструкцией Конна–Хигсона. Однако в общем случае нам это не удавалось, и результаты настоящей заметки объясняют, почему. Как будет показано, такой асимптотический гомоморфизм обладает свойством, которое до сих пор не было замечено — он трансляционно инвариантен, т. е. сдвигу параметра асимптотического гомоморфизма соответствует такой же сдвиг в SA . Мы

*Исследования первого автора частично поддержаны грантом №05-01-00923 РФФИ и грантом НШ-519.2003.1.