Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, К. Томсен, Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 87–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:23:41

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. Наука, М., 1977. 2. Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge–New York, Cambridge Univ. Press, 1990. 3. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1992. 4. Kurbatov V. G. Functional Differential Operators and Equations. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1999. 5. Kamenskii G. A., Myshkis A. D. Nonlinear Anal., **34**, No. 2, 283–287 (1998). 6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Наука, М., 1979. 7. Kurbatov V. G., Studenikin A. A. Funct. Differ. Equ., **4**, No. 3–4, 295–327 (1997). 8. Студеникин А. А. Операторы свертки с мерой, сконцентрированной в подполугруппе. Липецк, 1998, Деп. в ВИНТИ 19.06.98, №1871-B98. 9. Skopin V. A. Funct. Differ. Equ., **7**, No. 3–4, 335–371 (2000). 10. Скопин В. А. Дифференциальные уравнения, **37**, №9, 1265–1272 (2001). 11. Криштал И. А. Вестник ВГУ, сер. физ. матем., №1, 143–150 (2002). 12. Антоневич А. Б., Лебедев А. В. Труды С.-Петербург. матем. о-ва, **6**, 34–140 (1998). 13. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Operator Theory, Vol. 91, Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997. 14. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шиллов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960. 15. Бурбаки Н. Спектральная теория. Мир, М., 1972.

Липецкий государственный технический университет
e-mail: kv51@inbox.ru, kurbatov@stu.lipetsk.ru

Поступило в редакцию
19 ноября 2003 г.

УДК 517.98

Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр*

© 2005. В. М. Мануйлов, К. Томсен

Фундаментальная конструкция, введенная в [4] Конном и Хигсоном, сопоставляет расширению сепарабельной C^* -алгебры A с помощью σ -унитальной C^* -алгебры B асимптотический гомоморфизм $SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A \rightarrow B$. Выяснение вопроса о том, сколько информации теряется при таком переходе от расширения к построенному по нему асимптотическому гомоморфизму, является трудной задачей. Она особенно интересна в связи с тем, что подход к изучению расширений, развитый Брауном, Дугласом и Филлмором в [3] и обобщенный Каспаровым [7], обнаруживает дефект: в результате не всегда получается групповая структура [2], даже когда гомотопические классы расширений образуют группу [8]. В наших предыдущих работах [9, 11] нам удалось в некоторых случаях определить, какая информация содержится в асимптотическом гомоморфизме, полученном конструкцией Конна–Хигсона. Однако в общем случае нам это не удавалось, и результаты настоящей заметки объясняют, почему. Как будет показано, такой асимптотический гомоморфизм обладает свойством, которое до сих пор не было замечено — он трансляционно инвариантен, т. е. сдвигу параметра асимптотического гомоморфизма соответствует такой же сдвиг в SA . Мы

*Исследования первого автора частично поддержаны грантом №05-01-00923 РФФИ и грантом НШ-519.2003.1.

покажем, что эта дополнительная структура асимптотических гомоморфизмов является как раз тем, что нужно для восстановления расширения. Отметим также, что асимптотические гомоморфизмы, построенные в работах [5] и [6] для доказательства теоремы Атьи–Зингера об индексе, являются трансляционно инвариантными.

Пусть A, B суть C^* -алгебры. Будем говорить, что однопараметрическое семейство $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}: A \rightarrow B$ отображений есть *асимптотический гомоморфизм* (ср. [4]), если

- (а) отображение $t \mapsto \psi_t(a)$ непрерывно для любого $a \in A$;
- (б) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_t(a) = 0$ для любого $a \in A$;
- (с) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t(ab) - \psi_t(a)\psi_t(b)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t(\lambda a + b^*) - \lambda \psi_t(a) - \psi_t(b)^*\| = 0$ для любых $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$.

Асимптотический гомоморфизм ψ *равномерно непрерывен*, если таково семейство отображений $\psi_t: A \rightarrow B, t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\tau = (\tau_s)_{s \in \mathbb{R}}$ — действие группы $\mathbb{R}$ на $SA = C_0(\mathbb{R}, A)$ сдвигами, $\tau_s(f)(t) = f(t - s)$, $f \in SA$, и пусть $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}: SA \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Назовем ψ *асимптотически трансляционно инвариантным*, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_{t-s}(f) - \psi_t \circ \tau_s(f)) = 0$ для всех $s \in \mathbb{R}, f \in SA$, и *трансляционно инвариантным*, если он равномерно непрерывен и

$$\psi_t \circ \tau_s = \psi_{t-s}$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}$. Два (асимптотически) трансляционно инвариантных гомоморфизма φ и ψ *гомотопны*, если существует такой (асимптотически) трансляционно инвариантный гомоморфизм $\Phi: SA \rightarrow IB (= C[0, 1] \otimes B)$, что $\text{ev}_1 \circ \Phi_t = \varphi_t$ и $\text{ev}_0 \circ \Phi_t = \psi_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$, где $\text{ev}_s: IB \rightarrow B$ — гомоморфизм вычисления в точке $s \in [0, 1]$. Обозначим через $[[SA, B]]_\tau$ множество гомотопических классов трансляционно инвариантных гомоморфизмов, а через $[[SA, B]]_{a, \tau}$ множество гомотопических классов асимптотически трансляционно инвариантных гомоморфизмов из SA в B .

В дальнейшем будем считать, что алгебра A сепарабельна, а B σ -унитальна. Обозначим через $M(B)$ алгебру мультипликаторов алгебры B , а через $Q(B)$ обобщенную алгебру Калкина $M(B)/B$. Расширение C^* -алгебры A с помощью C^* -алгебры B — это короткая точная последовательность C^* -алгебр $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$. С помощью инварианта Басби такие точные последовательности отождествляются с $*$ -гомоморфизмами из A в $Q(B)$. Пусть $\psi: A \rightarrow Q(B)$ — расширение. Выберем

- 1) строго положительный элемент $b_0 \in B, 0 \leq b_0 \leq 1$,
- 2) непрерывное однородное поднятие $s: A \rightarrow M(B)$ расширения ψ ,
- 3) последовательность $h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ функций в $C_0(0, 1]$, удовлетворяющих равенству $h_{n+1}h_n = h_n$ для всех n ,

такие, что последовательность элементов $u_n = h_n(b_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обладает следующими свойствами:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n s(a) - s(a) u_n) = 0$ для всех $a \in A$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n b = b$ для всех $b \in B$.

Это можно сделать тем же способом, которым доказывается существование квазицентральных аппроксимативных единиц [1]. Последовательность $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ является *единичной последовательностью* в смысле работ [9] и [10].

Положим $\Delta_0 = \sqrt{u_0}$ и $\Delta_n = \sqrt{u_n - u_{n-1}}$, $n \geq 1$. Существенно, что из свойства (i) следует равенство $\Delta_i \Delta_j = 0$ при $|i-j| \geq 2$. Пусть $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ — такая последовательность в $[0, +\infty)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - t_{n+1}) = 0$.

Легко проверить, что для любой ограниченной по норме последовательности $\{m_j\} \subseteq M(B)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ сумма $\sum_{j=0}^\infty \Delta_j m_j \Delta_{j+k}$ сходится в строгой топологии в $M(B)$ и

$$\left\| \sum_{j=0}^\infty \Delta_j m_j \Delta_{j+k} \right\| \leq \sup_j \|m_j\|.$$

Кроме того, $\sum_{j=0}^\infty \Delta_j m_j \Delta_{j+k} \in B$, если $\lim_{j \rightarrow \infty} \|m_j\| = 0$.

Определим асимптотический гомоморфизм $\varphi_t: SA \rightarrow B$, $t \in \mathbb{R}$, формулой

$$\varphi_t(f) = \sum_{j=0}^\infty \Delta_j s(f(t - t_j)) \Delta_j. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Асимптотический гомоморфизм $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ трансляционно инвариантен.

ТЕОРЕМА 2. Гомотопический класс трансляционно инвариантного асимптотического гомоморфизма φ не зависит от выбора последовательности $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, единичной последовательности, строго положительного элемента b_0 и поднятия s , а зависит лишь от гомотопического класса расширения ψ .

Другими словами, если мы обозначаем через $\text{Ext}_h(A, B)$ множество гомотопических классов расширений C^* -алгебры A с помощью C^* -алгебры B , формула (1) определяет отображение

$$CH_\tau: \text{Ext}_h(A, B) \rightarrow [[SA, B]]_\tau.$$

В силу сепарабельности C^* -алгебры A существует компактное множество $X \subseteq A$, линейная оболочка которого плотна в A . Заметим, что последовательность $h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{n=0}^\infty \|[\Delta_n, s(a)]\| < \infty \quad (2)$$

для всех $a \in X$ и

$$s(a) - \sum_{j=0}^\infty \Delta_j s(a) \Delta_j \in B \quad (3)$$

для всех $a \in A$.

Пусть $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ — такая непрерывная возрастающая функция, что $\lim_{t \rightarrow -\infty} \kappa(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa(t) = 1$. Положим $v_t = \sum_{j=0}^\infty \Delta_j^2 \kappa(t - t_j)$.

ЛЕММА 3. Пусть последовательность $h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ выбрана так, что условия (2) и (3) выполнены. Тогда

- 1) $\lim_{t \rightarrow -\infty} v_t = 0$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} v_t b = b$ для всех $b \in B$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} (v_t s(a) - s(a) v_t) = 0$ для всех $a \in A$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} (g(v_t) s(a) - \varphi_t((g \circ \kappa) \otimes a)) = 0$ для всех $g \in C_0(0, 1)$, $a \in A$.

Это значит, что если $CH(\psi): SA \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм, полученный с помощью конструкции Конна–Хигсона [4], то $CH(\psi)$ гомотопен трансляционно инвариантному асимптотическому гомоморфизму.

Перейдем теперь к построению обратного к CH_τ отображения. Пусть $\beta_0 \in C_0(\mathbb{R})$ — такая непрерывная функция с носителем в $[-1, 1]$, что

$$\beta_0(t) > 0 \quad \text{при } t \in (-1, 1), \quad \tau_1(\beta_0)\tau_{-1}(\beta_0) = 0$$

и

$$\tau_{-1}(\beta_0)\beta_0 + \beta_0^2 + \tau_1(\beta_0)\beta_0 = \beta_0.$$

Для $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$, положим $\beta_i = \tau_{-i}(\beta_0)$. Тогда $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — такое разбиение единицы в $C_0(\mathbb{R})$, что $\text{supp } \beta_i = [-i-1, -i+1]$. Положим $\alpha_i = \sqrt{\beta_i}$ и заметим, что $\alpha_i \alpha_j = 0$, $|i-j| \geq 2$.

Пусть $\varphi = (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}: SA \rightarrow B$ — асимптотически трансляционно инвариантный асимптотический гомоморфизм. Для удобства предположим, что $\varphi_t(0) = 0$ при всех t . Тогда

$$\varphi_i(\tau_i(\alpha_i \alpha_j) \otimes a) = 0 \quad \text{при } |i-j| \geq 2 \quad (4)$$

для всех $a \in A$. Пусть $\mathbb{K}$ есть C^* -алгебра компактных операторов в $l^2(\mathbb{Z})$, и пусть e_{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}$, — стандартные матричные единицы в $\mathbb{K}$.

Определим отображение $\Phi_0: A \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$ равенством

$$\Phi_0(a) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \varphi_i(\tau_i(\alpha_i \alpha_j) \otimes a) \otimes e_{ij}.$$

Эта сумма сходится в строгой топологии благодаря свойству (4) и оценке $\sup_{i,j} \|\varphi_i(\tau_i(\alpha_i \alpha_j) \otimes a)\| < \infty$. Пусть $q_{B \otimes \mathbb{K}}: M(B \otimes \mathbb{K}) \rightarrow Q(B \otimes \mathbb{K})$ — канонический эпиморфизм и $\Phi = q_{B \otimes \mathbb{K}} \circ \Phi_0$.

ЛЕММА 4. *Отображение Φ является $*$ -гомоморфизмом из A в $Q(B \otimes \mathbb{K})$, т. е. расширением C^* -алгебры A с помощью C^* -алгебры $B \otimes \mathbb{K}$.*

Обозначим через $I(\varphi)$ расширение Φ из леммы 4. Легко видеть, что эта конструкция дает корректно определенное отображение

$$I: [[SA, B]]_{a,\tau} \rightarrow \text{Ext}_h(A, B \otimes \mathbb{K}),$$

такое, что $I[\varphi] = [I(\varphi)]$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A и B суть C^* -алгебры, A сепарабельна, а B σ -унитальна и стабильна. Тогда имеет место изоморфизм $[[SA, B]]_{a,\tau} \simeq [[SA, B]]_\tau$ (как абелевых полугрупп) и $CH_\tau: \text{Ext}_h(A, B) \rightarrow [[SA, B]]_\tau$ — изоморфизм.*

В заключение отметим, что $[[SA, B \otimes \mathbb{K}]]_\tau$ совпадает с группой $E(SA, B)$ E -теории по крайней мере в двух известных случаях: когда алгебра A ядерна и когда она является надстройкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arveson W. Duke Math. J., **44**, 329–355 (1977).
2. Anderson J. Ann. of Math., **107**, 455–458 (1978).
3. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Ann. of Math., **105**, 265–324 (1977).
4. Connes A., Higson N. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **311**, 101–106 (1990).
5. Higson N. In: Index theory and operator algebras (Boulder, CO, 1991), Contemp. Math., Vol. 148, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 67–86.
6. Higson N., Kasparov G., Trout J. Adv. Math., **135**, 1–40 (1998).
7. Каспаров Г. Г. Изв. АН СССР, сер. матем.,

44, 571–636 (1980). 8. Kirchberg E. Invent. Math., **112**, 449–489 (1993). 9. Manuilov V. M., Thomsen K. J. Funct. Anal., **213**, 154–175 (2004). 10. Manuilov V. M., Thomsen K. Proc. London Math. Soc., **88**, 455–478 (2004). 11. Manuilov V. M., Thomsen K. K-Theory, **32**, 101–138 (2004).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
e-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Institut for Matematiske Fag, Ny Munkegade, Denmark
e-mail: matkt@imf.au.dk

Поступило в редакцию
30 января 2004 г.

УДК 517.43

Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2*

© 2005. А. Е. МИРОНОВ

1. Введение. В данной статье построены некоторые обыкновенные формально самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, причем функция Бейкера–Ахиезера этих операторов имеет существенную особенность в точке Вейерштрасса.

Обозначим через L_1 и L_2 дифференциальные операторы

$$L_1 = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x) \partial_x^i, \quad L_2 = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x) \partial_x^i.$$

Напомним, что по лемме Берчналла–Чаунди, если $L_1 L_2 = L_2 L_1$, то существует полином $Q(z, w)$ от двух коммутирующих переменных, такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$. Обозначим через Γ кривую, заданную в плоскости (z, w) уравнением $Q(z, w) = 0$. Для $P \in \Gamma$ в общем положении существует совместная собственная функция $\psi(x, P)$ (функция Бейкера–Ахиезера) операторов L_1 и L_2 , такая, что $L_1 \psi = z \psi$, $L_2 \psi = w \psi$. Размерность l пространства таких функций, отвечающих P , называется рангом пары L_1, L_2 . Для операторов ранга 1 функция ψ выражается явным образом через тэта-функцию многообразия Якоби кривой Γ , и в этом случае коэффициенты операторов L_1 и L_2 легко найти [1]. Случай $l > 1$ существенно сложнее. Задача отыскания операторов ранга $l > 1$ в общем случае до сих пор не решена. Новиков и Кричевер [2] нашли операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 1. Мохов [3] нашел операторы ранга 3 рода 1.

Основной результат этой работы заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 является гладким пополнением бесконечно удаленной точкой ∞ кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^5 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma(z, w) = (z, -w)$, которая имеет 6 неподвижных точек $\infty, (z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$).

*Работа поддержана грантами РФФИ (03-01-00403 и 03-01-06482) и грантом НШ-2185.2003.1