Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Калюжный, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский, Построение коциклов для двойного скрещенного произведения групп Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 70–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:05:51

Построение коциклов для двойного скрещенного произведения групп Ли*

© 2006. А. А. Калюжный, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский

Конструкция двойного скрещенного произведения групп с коциклами была введена Г. И. Кацем в [1] для построения примеров конечных кольцевых групп, сейчас известных как конечные алгебры Каца. Затем эта конструкция была обобщена для построения примеров локально компактных квантовых групп в [2] и алгебр Хопфа в [3]. Аналогичная конструкция применима к биалгебрам Ли; см., например, [3].

Данная конструкция позволяет построить две некоммутативные алгебры фон Неймана, находящиеся в двойственности, с помощью пары согласованных групп, действующих друг на друге как на множествах, и пары функций, называемых коциклами и удовлетворяющих некоторым соотношениям (см. определения 1, 2). Группа классов эквивалентности пар коциклов описана для конечных групп в [1] и для локально компактных групп в [4], см. также [5]. Целью настоящей статьи является получение формулы для нахождения пары коциклов в явном виде в случае, когда группы являются группами Ли, с помощью пары коциклов на соответствующей паре согласованных алгебр Ли.

1. Всюду далее, если не оговорено противное, G, H, K — связные группы Ли, а $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ — соответствующие алгебры Ли. Элементы групп G, H, K обозначаются через $g, g_1, \dots, h, h_1, \dots$ и $k, k_1, \dots$ соответственно. Определение коциклов на группе и алгебре Ли см. в [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Парой согласованных групп Ли называется пара (G, H) , снабженная дифференцируемыми отображениями $\triangleleft: H \times G \rightarrow H$ и $\triangleright: H \times G \rightarrow G$, являющимися правым действием группы G на H и левым действием группы H на G соответственно и удовлетворяющими соотношениям

$$(h_1 h_2) \triangleleft g = (h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g))(h_2 \triangleleft g), \quad h \triangleright (g_1 g_2) = (h \triangleright g_1)((h \triangleleft g_1) \triangleright g_2).$$

Пусть $K = G \times H$, причем умножение задается формулой

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot (h_1 \triangleright g_2), (h_1 \triangleleft g_2) \cdot h_2).$$

Известно [1], что если G и H — конечные группы, то K — также группа. Очевидно, что если G, H — группы Ли, то K — также группа Ли. В дальнейшем будем использовать для группы K обозначение $G \cdot H$, а элемент $(g, h) \in K$ будем обозначать через $g \cdot h$ или gh .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли и $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Пара дифференцируемых функций (u, v) , $u: H \times G \times G \rightarrow \mathbb{T}$,

* Данная работа частично поддержана Украинским государственным фондом фундаментальных исследований в соответствии с грантом №0107/071 (первые два автора) и грантом №0107/027 (третий автор).

$v: H \times H \times G \rightarrow \mathbb{T}$, называется парой коциклов на (G, H) , если

$$u(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4)u(h_1, g_2, g_3g_4) = u(h_1, g_2, g_3)u(h_1, g_2g_3, g_4), \quad (1)$$

$$v(h_1, h_2, h_3 \triangleright g_4)v(h_1h_2, h_3, g_4) = v(h_1, h_2h_3, g_4)v(h_2, h_3, g_4), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & v(h_1, h_2, g_3g_4)u(h_1h_2, g_3, g_4) \\ & = v(h_1, h_2, g_3)u(h_2, g_3, g_4)v(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4)u(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4). \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем рассматриваются только нормализованные пары коциклов, т. е. пары, удовлетворяющие также условию $u(h_1, g_2, g_3) = 1$, $v(h_1, h_2, g_3) = 1$, если по крайней мере один из элементов h_i , g_j в рассматриваемой формуле совпадает с единицей соответствующей группы.

Две пары коциклов (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на согласованной паре (G, H) называются эквивалентными, если существует дифференцируемая функция $r: H \times G \rightarrow \mathbb{T}$, такая, что

$$\begin{aligned} u_1(h_1, g_2, g_3)u_2(h_1, g_2, g_3)^{-1} &= r(h_1, g_2)r(h_1 \triangleleft g_2, g_3)r(h_1, g_2g_3)^{-1}, \\ v_1(h_1, h_2, g_3)v_2(h_1, h_2, g_3)^{-1} &= r(h_1h_2, g_3)r(h_1, h_2 \triangleright g_3)^{-1}r(h_2, g_3)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Множество классов эквивалентности $[u, v]$ пар коциклов на согласованной паре (G, H) образует абелеву группу относительно поточечного умножения (т. е. $[u_1, v_1] \cdot [u_2, v_2] = [u_1u_2, v_1v_2]$), см. [1]. Эту группу далее будем обозначать через $E(G, H)$.

Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли и $K = G \cdot H$. Для пары (u, v) функций $u: H \times G \times G \rightarrow \mathbb{T}$ и $v: H \times H \times G \rightarrow \mathbb{T}$, следуя [5], рассмотрим функцию $f_{u,v}: K \times K \times K \rightarrow \mathbb{T}$, определенную формулой

$$f_{u,v}(k_1, k_2, k_3) = u(h_1, g_2, h_2 \triangleright g_3)v(h_1 \triangleleft g_2, h_2, g_3),$$

где $k_i = g_ih_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда, как следует из [5], пара (u, v) удовлетворяет условиям (1), (2) и (3) тогда и только тогда, когда $f_{u,v}$ является неоднородным 3-коциклом на группе K , равным 1, если один из элементов k_1, k_2, k_3 равен e_K . Кроме того [5], пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2) удовлетворяют равенствам (4) тогда и только тогда, когда существует дифференцируемая функция $r: K \times K \rightarrow \mathbb{T}$, такая, что $r(k_1, k_2) = r(h_1, g_2)$ для всех $k_i = g_ih_i \in K$, $i = 1, 2$, и $f_{u_1, v_1}f_{u_2, v_2}^{-1} = dr$, где d — дифференциал на комплексе нормализованных неоднородных коцепей на K .

Используя [3], определим пару согласованных алгебр Ли следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ алгебр Ли называется парой согласованных алгебр Ли, если существует алгебра Ли $\mathfrak{k}$, такая, что $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебры Ли в $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара линейных функционалов (U, V) , где $U: \mathfrak{h} \otimes (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ и $V: (\mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, называется парой коциклов на согласованной паре алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, если линейный функционал $F_{U,V}: \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный формулой

$$\begin{aligned} F_{U,V}(A_1 + X_1, A_2 + X_2, A_3 + X_3) &= U(X_1; A_2, A_3) + U(X_2; A_3, A_1) \\ &+ U(X_3; A_1, A_2) + V(X_1, X_2; A_3) + V(X_2, X_3; A_1) + V(X_3, X_1; A_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$A_i \in \mathfrak{g}$, $X_i \in \mathfrak{h}$, $i = 1, 2, 3$, является 3-коциклом на алгебре Ли $\mathfrak{k}$. Две пары коциклов (U_1, V_1) и (U_2, V_2) называются эквивалентными, если существует линейный функционал $R: \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что $F_{U_1, V_1} - F_{U_2, V_2} = dR$, где $F_{U, V}$ определяется формулой (5), и $R(A_1, A_2) = R(X_1, X_2) = 0$ для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$. Здесь d — дифференцирование в комплексе полилинейных антисимметричных форм на $\mathfrak{k}$ [6].

Это определение следует из [3] и [7].

Как и для пары согласованных групп, множество классов эквивалентности пар $[U, V]$ коциклов на согласованной паре алгебр Ли образует абелеву группу, $[U_1, V_1] + [U_2, V_2] = [U_1 + U_2, V_1 + V_2]$. Обозначим эту группу через $E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

2. Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли, $K = G \cdot H$, а $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ — алгебры Ли групп Ли G , H и K соответственно. Тогда $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, т. е. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — пара согласованных алгебр Ли.

Аналогично действию, рассмотренному в [1], для $k_0 = g_0 h_0$ определим левое действие $\lambda_{k_0}: K \rightarrow K$ посредством формулы $\lambda_{g_0 h_0} = \lambda_{g_0} \lambda_{h_0}$, где $\lambda_{g_0}: K \rightarrow K$ и $\lambda_{h_0}: K \rightarrow K$ задаются на $k = gh$ формулами $\lambda_{g_0}(k) = (g_0 g) \cdot (h \triangleleft g_0^{-1})$, $\lambda_{h_0}(k) = (h_0 \triangleright g) \cdot (hh_0^{-1})$. Легко видеть, что $k = gh = \lambda_{g(h \triangleleft g)^{-1}}(e_K)$.

Векторное поле $\eta: K \rightarrow T(K)$, $\eta_k \in T_k(K)$, на K назовем λ -инвариантным, если $\eta_{\lambda_{k_0}(k)} = (D\lambda_{k_0})_k \eta_k$ для всех $k, k_0 \in K$, где $T(K)$ — касательное расслоение группы Ли K , а $(D\lambda_{k_0})_k: T_k(K) \rightarrow T_{\lambda_{k_0}(k)}(K)$ — отображение, касательное к λ_{k_0} . Легко видеть, что λ -инвариантные векторные поля на K образуют алгебру Ли, которую мы обозначим через $\tilde{\mathfrak{k}}$.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы Ли K . Отождествим $\mathfrak{k}$ с алгеброй Ли левинвариантных векторных полей ξ на K , и пусть $\tilde{\mathfrak{k}}$ — алгебра Ли λ -инвариантных векторных полей η на K . Пусть $\pi_G: K \rightarrow G$ и $\pi_H: K \rightarrow H$ — проекции $(g, h) \mapsto g$ и $(g, h) \mapsto h$ соответственно. Тогда отображение $\tau: \mathfrak{k} \rightarrow \tilde{\mathfrak{k}}$, определенное формулой

$$(\tau(\xi))_k = (D\lambda_{g(h \triangleleft g)^{-1}})_{e_K} (D\pi_G)_{e_K} \xi_{e_K} - (D\lambda_{g(h \triangleleft g)^{-1}})_{e_K} (D\pi_H)_{e_K} \xi_{e_K}, \quad (6)$$

является изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{k}$ и $\tilde{\mathfrak{k}}$.

3. Положим $I = [0, 1]$. Пусть отображения $\gamma_G: I \times G \rightarrow G$ и $\gamma_H: I \times H \rightarrow H$, $(u, g) \mapsto \gamma_G^u(g)$, $(u, h) \mapsto \gamma_H^u(h)$, $u \in I$, дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$\gamma_G^1(g) = g, \quad \gamma_G^0(g) = e_G, \quad \gamma_H^1(h) = h, \quad \gamma_H^0(h) = e_H \quad (7)$$

для всех $g \in G$, $h \in H$. Пусть $\Delta^1 = I$, $\Delta^2 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2: t_1, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 \leq 1\}$ — стандартные 1- и 2-симплексы. Положим $\Delta^{2,1} = \Delta^1 \times \Delta^2$ и $\Delta^{1,2} = \Delta^2 \times \Delta^1$. Аналогично [6] рассмотрим функции $s_1: \Delta^1 \rightarrow I$ и $s_2: \Delta^2 \rightarrow I$, заданные формулами

$$s_1(t_1) = 1 - t_1, \quad s_2(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1-t_1-t_2}{1-t_1}, & 1 - t_1 \neq 0, \\ 0, & 1 - t_1 = 0. \end{cases}$$

Для фиксированных $g_1, g_2 \in G$ и $h_1, h_2 \in H$ определим отображения $\Delta_G^1(g_1): \Delta^1 \rightarrow G$, $\Delta_G^2(g_1, g_2): \Delta^2 \rightarrow G$ и $\Delta_H^1(h_1): \Delta^1 \rightarrow H$, $\Delta_H^2(h_1, h_2): \Delta^2 \rightarrow H$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Delta_G^1(g_1)(t_1) &= \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1), & \Delta_G^2(g_1, g_2)(t_1, t_2) &= \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1 \gamma_G^{s_2(t_1, t_2)}(g_2)), \\ \Delta_H^1(h_1)(t_1) &= \gamma_H^{s_1(t_1)}(h_1), & \Delta_H^2(h_1, h_2)(t_1, t_2) &= \gamma_H^{s_1(t_1)}(\gamma_H^{s_2(t_1, t_2)}(h_1) h_2).\end{aligned}$$

Наконец, для каждой из троек $(h_1, g_2, g_3) \in H \times G \times G$ и $(h_1, h_2, g_3) \in H \times H \times G$ определим отображения $\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3): \Delta^{2,1} \rightarrow K$ и $\sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3): \Delta^{1,2} \rightarrow K$ формулами

$$\begin{aligned}\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta_G^2(g_2, g_3)(t_2, t_3) \cdot \Delta_H^1(h_1)(t_1), \\ \sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta_G^1(g_3)(t_3) \cdot \Delta_H^2(h_1, h_2)(t_1, t_2).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Пусть (G, H) — пара согласованных связных групп Ли и $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — пара соответствующих алгебр Ли. Пусть γ_G и γ_H удовлетворяют условиям (7) и $h \triangleright \gamma_G^u(g) = \gamma_G^u(h \triangleright g)$, $\gamma_H^u(h) \triangleleft g = \gamma_H^u(h \triangleleft g)$ для всех $g \in G$, $h \in H$, $u \in [0, 1]$. Рассмотрим $(D\gamma_G^u)_g: T_g(G) \rightarrow T_{\gamma_G^u(g)}(G)$ и $(D\gamma_H^u)_h: T_h(H) \rightarrow T_{\gamma_H^u(h)}(H)$. Предположим, что $(D\gamma_G^u)_g \rightarrow 0$ и $(D\gamma_H^u)_h \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$. Для пары коциклов (U, V) , $[U, V] \in E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ зададим λ -инвариантную дифференциальную 3-форму на K формулой $\omega_{U,V} = (\tau^{-1})^*(F_{U,V})$, где $F_{U,V}$ определен в (5), а τ — в (6), и функции $\tilde{u}: G \times G \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{v}: H \times H \times G \rightarrow \mathbb{R}$ посредством несобственных интегралов

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \int_{\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_{U,V}, \quad \tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = \int_{\sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3)} \omega_{U,V}. \quad (8)$$

Тогда интегралы в (8) сходятся, а отображение $\text{Int}: E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow E(G, H)$, заданное равенством $\text{Int}([U, V]) = [e^{i\tilde{u}}, e^{i\tilde{v}}]$, корректно определено и является гомоморфизмом групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац Г. И. Матем. сб., **76**, вып. 3, 473–496 (1968).
2. Vaes S., Vainerman L. Adv. in Math., **175**, No. 1, 1–101 (2003).
3. Majid S. Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge University Press, 1995.
4. Baaj S., Skandalis G., Vaes S. Topological Kac cohomology for bicrossed products. <http://arxiv.org/math.QA/0307172>.
5. Chapovsky Yu. A., Kalyuzhnyi A. A., Podkolzin G. B. Algebra Discrete Math., **2004**, No. 3, 12–19 (2004).
6. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. Мир, М., 1984.
7. Chapovsky Yu. A., Kalyuzhnyi A. A., Podkolzin G. B. On 2+2 locally compact quantum groups. В сб.: Proc. Fifth. Internat. Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics,” Part III, Пр. Инст. Мат. НАН України, Т. 50, Инст. Мат. НАН України, Київ, 2004, с. 1064–1070.

Институт математики
Национальной академии наук Украины
e-mail: kalyuzh@imath.kiev.ua

Национальный технический университет Украины «КПИ»
e-mail: gpod@mmsa-ntuu.kpi.kiev.ua

Институт математики
Национальной академии наук Украины
e-mail: yc@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
22 ноября 2004 г.