Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 3, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:32:09

44, 571–636 (1980). 8. Kirchberg E. Invent. Math., **112**, 449–489 (1993). 9. Manuilov V. M., Thomsen K. J. Funct. Anal., **213**, 154–175 (2004). 10. Manuilov V. M., Thomsen K. Proc. London Math. Soc., **88**, 455–478 (2004). 11. Manuilov V. M., Thomsen K. K-Theory, **32**, 101–138 (2004).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
e-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Institut for Matematiske Fag, Ny Munkegade, Denmark
e-mail: matkt@imf.au.dk

Поступило в редакцию
30 января 2004 г.

УДК 517.43

Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2*

© 2005. А. Е. МИРОНОВ

1. Введение. В данной статье построены некоторые обыкновенные формально самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, причем функция Бейкера–Ахиезера этих операторов имеет существенную особенность в точке Вейерштрасса.

Обозначим через L_1 и L_2 дифференциальные операторы

$$L_1 = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x) \partial_x^i, \quad L_2 = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x) \partial_x^i.$$

Напомним, что по лемме Берчналла–Чаунди, если $L_1 L_2 = L_2 L_1$, то существует полином $Q(z, w)$ от двух коммутирующих переменных, такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$. Обозначим через Γ кривую, заданную в плоскости (z, w) уравнением $Q(z, w) = 0$. Для $P \in \Gamma$ в общем положении существует совместная собственная функция $\psi(x, P)$ (функция Бейкера–Ахиезера) операторов L_1 и L_2 , такая, что $L_1 \psi = z \psi$, $L_2 \psi = w \psi$. Размерность l пространства таких функций, отвечающих P , называется рангом пары L_1, L_2 . Для операторов ранга 1 функция ψ выражается явным образом через тэта-функцию многообразия Якоби кривой Γ , и в этом случае коэффициенты операторов L_1 и L_2 легко найти [1]. Случай $l > 1$ существенно сложнее. Задача отыскания операторов ранга $l > 1$ в общем случае до сих пор не решена. Новиков и Кричевер [2] нашли операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 1. Мохов [3] нашел операторы ранга 3 рода 1.

Основной результат этой работы заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 является гладким пополнением бесконечно удаленной точкой ∞ кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^5 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma(z, w) = (z, -w)$, которая имеет 6 неподвижных точек $\infty, (z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$).

*Работа поддержана грантами РФФИ (03-01-00403 и 03-01-06482) и грантом НШ-2185.2003.1

Существуют функции $\chi_0(x, P)$, $\chi_1(x, P)$ (см. [4]), такие, что $\psi_i'' = \chi_0\psi_i + \chi_1\psi_i'$, где ψ_i — функция Бейкера–Ахиезера, $i = 0, 1$. Коэффициенты операторов L_1 и L_2 находятся по χ_0 , χ_1 . Мы рассматриваем случай, когда $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Имеют место равенства*

$$\chi_1 = -\frac{\gamma'}{z - \gamma} - \frac{\gamma'}{z - (\gamma + c)},$$

$$\chi_0 = -\frac{1}{2} \frac{H_1\gamma'}{z - \gamma} - \frac{1}{2} \frac{H_2\gamma'}{z - (\gamma + c)} + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2} \frac{w}{(z - \gamma)(z - (\gamma + c))},$$

где

$$\kappa = \frac{F(\gamma) - 4\gamma'^4 + 8c\gamma'^2\gamma'' - c^2\gamma''^2 + 2c^2\gamma'\gamma'''}{2c^2\gamma'^2},$$

$$\gamma^{-1}(y) = \int \left(\frac{4}{3R(y)} \right)^{1/4} dy, \quad (1)$$

$$R(y) = y^5 + \frac{5}{2}cy^4 + \frac{1}{3}(10c^2 + 3c_3)y^3 + \frac{1}{2}(5c_3 + 2c_2 + 3cc_3)y^2 + (c^4 + c_1 + cc_2 + c^2c_3)y + \delta,$$

$y = \gamma(x)$, $\delta, c \in \mathbb{C}$. Функции $H_i(x)$ выражаются через $\gamma(x)$ по формулам (8)–(10) (см. ниже).

СЛЕДСТВИЕ. *Оператор, отвечающий функции z , имеет вид*

$$L = L^* = \partial_x^4 - \kappa\partial_x^2 - \kappa'\partial_x + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa''}{2} - \gamma - \frac{c}{2}.$$

Укажем пример. Пусть кривая Γ задается уравнением $w^2 = z^5 - \frac{10}{3}z^3 + \frac{7}{3}z$ и $c = 2$, $\delta = 1$, $\gamma = 1024/x^4 - 1$. Тогда L имеет вид

$$\partial_x^4 + \left(\frac{x^6}{49152} - \frac{425}{6x^2} \right) \partial_x^2 + \left(\frac{x^5}{8192} + \frac{425}{3x^3} \right) \partial_x + \frac{x^{12}}{9663676416} - \frac{245x^4}{589824} + \frac{2569}{144x^4}.$$

Оператор десятого порядка, отвечающий функции w , мы здесь не приводим из-за его громоздкости.

2. Доказательство теоремы. Кричевер [4] доказал, что в случае кривой рода 2 и $l = 2$ функции $\chi_j(x, P)$ являются мероморфными на Γ с четырьмя полюсами $P_1(x), \dots, P_4(x)$. В окрестности ∞ функции χ_j имеют вид

$$\chi_0(x, P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}), \quad \chi_1(x, P) = O(k^{-1}), \quad (2)$$

где k^{-1} — локальный параметр около ∞ , а в окрестности полюса $P_i(x)$ — вид

$$\chi_0(x, P) = \frac{-\alpha_i(x)\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i0}(x) + O(k - \gamma_i(x)), \quad (3)$$

$$\chi_1(x, P) = \frac{-\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i1}(x) + O(k - \gamma_i(x)), \quad (4)$$

где $k - \gamma_i(x)$ — локальный параметр около $P_i(x)$, причем

$$d_{i0}(x) = \alpha_i^2(x) + \alpha_i(x)d_{i1}(x) - \alpha_i'(x). \quad (5)$$

Выберем в окрестности полюса $P_i(x)$ локальный параметр $z - \gamma_i(x)$, а в окрестности ∞ локальный параметр $k^{-1} = 2/\sqrt{z}$. Пусть $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Тогда можно считать, что $\sigma P_1(x) = P_3(x)$ и $\sigma P_2(x) = P_4(x)$, а следовательно, $\gamma_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \gamma_4$, $d_{11} = d_{31}$, $d_{21} = d_{41}$. Таким образом, в силу формул (2) и (4) имеем

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\chi_1 + \sigma\chi_1) = \frac{-\gamma'_1}{z - \gamma_1} + \frac{-\gamma'_2}{z - \gamma_2}, \quad d_{11} = \frac{-\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad d_{21} = \frac{-\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Так как функция $\chi_0 + \sigma\chi_0$ не зависит от w , то $\chi_0 + \sigma\chi_0$ не может иметь полюс первого порядка в ∞ ; следовательно, из формул (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \chi_0 + \sigma\chi_0 &= -\frac{H_1\gamma'_1}{z - \gamma_1} - \frac{H_2\gamma'_2}{z - \gamma_2} + \kappa, \\ (\chi_0 - \sigma\chi_0)^2 &= \frac{F_1\gamma_1'^2}{(z - \gamma_1)^2} + \frac{2G_1\gamma'_1}{z - \gamma_1} + \frac{F_2\gamma_2'^2}{(z - \gamma_2)^2} + \frac{2G_2\gamma'_2}{z - \gamma_2} + z + \kappa_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\kappa(x)$ и $\kappa_1(x)$ — некоторые функции, $H_1 = \alpha_1 + \alpha_3$, $H_2 = \alpha_2 + \alpha_4$, $F_1 = (\alpha_3 - \alpha_1)^2$, $F_2 = (\alpha_4 - \alpha_2)^2$, $G_1 = (d_{10} - d_{30})(\alpha_3 - \alpha_1)$, $G_2 = (d_{20} - d_{40})(\alpha_4 - \alpha_2)$. Согласно равенству (6),

$$\begin{aligned} d_{10} + d_{30} &= -\frac{H_2\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2} + \kappa, & d_{20} + d_{40} &= -\frac{H_1\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \kappa, \\ d_{10} + d_{30} - (d_{20} + d_{40}) &= \frac{H_1\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1} - \frac{H_2\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Функция $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ имеет нули в пяти точках ветвления $(z_i, 0)$, а следовательно, $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2(z - \gamma_1)^2(z - \gamma_2)^2 = F(z)$, откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{F(\gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2\gamma_1'^2}, & F_2 &= \frac{F(\gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2\gamma_2'^2}, \\ G_1 &= \frac{2c_0 + c_1\gamma_1 - c_3\gamma_1^3 - 3\gamma_1^5 + \gamma_2(c_1 + 2c_2\gamma_1 + 3c_3\gamma_1^2 + 5\gamma_1^4)}{2(\gamma_2 - \gamma_1)^3\gamma_1'}, \\ G_2 &= \frac{2c_0 + c_1\gamma_2 - c_3\gamma_2^2 - 3\gamma_2^5 + \gamma_1(c_1 + 2c_2\gamma_2 + 3c_3\gamma_2^2 + 5\gamma_2^4)}{2(\gamma_1 - \gamma_2)^3\gamma_2'}. \end{aligned}$$

Выразим H_1 и H_2 через γ_1 и γ_2 . В силу формулы (5)

$$\begin{aligned} d_{10} - d_{30} &= \alpha_1^2 - \alpha_3^2 + d_{11}(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha'_1 - \alpha'_3), \\ d_{20} - d_{40} &= \alpha_2^2 - \alpha_4^2 + d_{21}(\alpha_2 - \alpha_4) - (\alpha'_2 - \alpha'_4). \end{aligned}$$

Умножим эти равенства соответственно на $\alpha_3 - \alpha_1$ и на $\alpha_4 - \alpha_2$ и получим

$$H_1 = \frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} = \frac{2\gamma'_1\gamma'_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_1''}{(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1'}, \quad (8)$$

$$H_2 = \frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} = \frac{-2\gamma'_1\gamma'_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_2''}{(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_2'}. \quad (9)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \alpha_3^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)^2 = \frac{1}{2}H_1^2 + \frac{1}{2}F_1, \\ \alpha_2^2 + \alpha_4^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_4)^2 = \frac{1}{2}H_2^2 + \frac{1}{2}F_2.\end{aligned}$$

Выразим $d_{10} + d_{30}$ и $d_{20} + d_{40}$ через γ_1 и γ_2 . Из равенства (5) выводим, что

$$d_{10} + d_{30} = \frac{H_1^2}{2} + \frac{F_1}{2} - H_1' + d_{11}H_1, \quad d_{20} + d_{40} = \frac{H_2^2}{2} + \frac{F_2}{2} - H_2' + d_{21}H_2.$$

Подставим полученные выражения для H_1 , H_2 , $d_{10} + d_{30}$ и $d_{20} + d_{40}$ в (7). Получим уравнение на γ_1 и γ_2 :

$$\begin{aligned}4\gamma_1'^4\gamma_2'^2 + \gamma_2'^2(c_0 + c_3\gamma_1^3 + \gamma_1^5 - \gamma_2^2\gamma_1''^2 + \gamma_1^2(c_2 - \gamma_1''^2) + \gamma_1(c_1 + 2\gamma_2\gamma_1''^2)) \\ + 2(\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_1^3\gamma_2'\gamma_2'' + 2(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1'\gamma_2'^2((\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1''' - \gamma_2'\gamma_1'') \\ - \gamma_1'^2(c_0 + c_3\gamma_2^3 + \gamma_2^5 + 4\gamma_2'^4 - \gamma_1^2\gamma_2''^2 + 6\gamma_1\gamma_2'^2(\gamma_1'' + \gamma_2'') + 2\gamma_1^2\gamma_2'\gamma_2''') \\ + \gamma_2^2(c_2 - \gamma_2''^2 + 2\gamma_2'\gamma_2''') + \gamma_2(c_1 + 2\gamma_1\gamma_2''^2 - 6\gamma_2'^2(\gamma_1'' + \gamma_2'') - 4\gamma_1\gamma_2'\gamma_2''') = 0.\end{aligned}$$

При

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \gamma + c, \tag{10}$$

это уравнение принимает вид

$$(c^4 + c_1 + cc_2 + c^2c_3) + (5c_3 + 2c_2 + 3cc_3)\gamma + (10c^2 + 3c_3)\gamma^2 + 10c\gamma^3 + 5\gamma^4 - 16\gamma'^2\gamma'' = 0$$

и интегрируется в квадратурах (см. (1)). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кричевер И. М. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 1, 15–31 (1977). **2.** Кричевер И. М., Новиков С. П. Функц. анализ и его прил., **12**, вып. 4, 41–52 (1978). **3.** Мохов О. И. Изв. АН СССР, сер. матем., **53**, №6, 1291–1314 (1989). **4.** Кричевер И. М. Функц. анализ и его прил., **12**, вып. 4, 41–52 (1978).

Институт математики им. С. Л. Соболева
СО РАН, Новосибирск
e-mail: mironov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
21 января 2004 г.