Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Александров, Индекс векторных полей и логарифмические дифференциальные формы, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 1–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:55:27

Индекс векторных полей и логарифмические дифференциальные формы*

© 2005. А. Г. АЛЕКСАНДРОВ

Введение

Индекс векторного поля — одно из самых первых понятий топологии и геометрии гладких многообразий, на свойствах индекса основываются важные результаты теории. Среди них — теорема Пуанкаре–Хопфа, согласно которой полный индекс векторного поля на замкнутом гладком ориентируемом многообразии не зависит от поля и равен характеристике Эйлера–Пуанкаре многообразия. При изучении многообразий с особенностями естественно поставить вопрос о существовании аналогичного инварианта в более общем контексте. Одно из возможных обобщений такого рода, первоначально возникшее в теории топологии слоений, оказалось хорошо приспособленным для использования в теории многообразий с особенностями. Соответствующий инвариант, названный в недавних работах [5, 6] гомологическим индексом, корректно определен для векторных полей, которые касаются многообразия в его неособых точках. Гомологический индекс обладает основными свойствами (см. [10]) классического топологического индекса и выражается через сумму локальных индексов Пуанкаре–Хопфа в особых точках векторных полей на гладкой деформации многообразия.

В настоящей статье излагается оригинальный метод вычисления гомологического индекса векторных полей на гиперповерхности, который опирается на теорию логарифмических дифференциальных форм и векторных полей. Главная идея нашего подхода состоит в том, что гомологический индекс можно описать в терминах мероморфных дифференциальных форм на объемлющем многообразии, которые обладают логарифмическими полюсами вдоль заданной гиперповерхности. Как мы увидим, систематическое использование теории логарифмических форм позволяет не только значительно упростить вычисления, но и прояснить смысл основных конструкций, на которых основаны многие работы, посвященные этой тематике.

После краткого обсуждения необходимых понятий и обозначений в статье вводится понятие логарифмического индекса векторного поля и доказывается, что гомологический индекс выражается через логарифмический. Затем оба инварианта описываются в терминах логарифмических дифференциальных форм в случае свободного дивизора Сайто — гиперповерхности с неизолированными особенностями, а также вычисляются группы стягивающей гомологии комплекса регулярных голоморфных форм на такой гиперповерхности. В заключение

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №02-01-00623).

разобран случай нормальной гиперповерхности, в том числе и случай изолированной особенности. Кроме того, стягивающие гомологии комплекса регулярных мероморфных форм описываются с помощью вычета логарифмических форм.

§1. Регулярные дифференциалы и векторные поля

Пусть M — комплексное многообразие размерности $n+1$, $n \geq 1$, а Ω_M^q , $q \geq 0$, и $\text{Der}(M)$ — пучки ростков голоморфных q -форм и векторных полей на M соответственно. Пусть $D \subset M$ — дивизор, все неприводимые компоненты которого имеют кратность единица, так что в окрестности любой точки $x \in D$ локальное уравнение дивизора задается ростком голоморфной функции $h \in \mathcal{O}_{M,x}$ без кратных множителей: если $z = (z_0, \dots, z_n)$ — система локальных координат в окрестности этой точки, то $h(z) = 0$ — локальное уравнение дивизора D в точке x и $\mathcal{O}_{D,x} \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h)$. Обозначим $\mathcal{O}_D$ -модуль ростков регулярных (кэлеровых) дифференциалов порядка q на D через Ω_D^q , так что

$$\Omega_{D,x}^q = \Omega_{M,x}^q / (h \cdot \Omega_{M,x}^q + dh \wedge \Omega_{M,x}^{q-1}), \quad q \geq 0.$$

По аналогии с гладким случаем элементы из $\Omega_{D,x}^q$ обычно называют также ростками регулярных голоморфных форм на D (ср. [11]). Пусть теперь $\text{Der}(D) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Omega_D^1, \mathcal{O}_D)$ — пучок ростков регулярных векторных полей на D , и рассмотрим $V \in \text{Der}(D)$. Обозначим через $\mathcal{V} \in \text{Der}(M)$ голоморфное векторное поле на M , такое, что $\mathcal{V}|_D = V$. Тогда внутреннее умножение (стягивание) векторных полей и дифференциальных форм $\iota_{\mathcal{V}}: \Omega_M^q \rightarrow \Omega_M^{q-1}$ определяет структуру комплекса на $\Omega_{\bullet}^q$, поскольку $\iota_{\mathcal{V}}^2 = 0$. Стягивание $\iota_{\mathcal{V}}$ индуцирует гомоморфизм $\mathcal{O}_D$ -модулей $\iota_V: \Omega_D^q \rightarrow \Omega_D^{q-1}$, а также структуру комплекса на $\Omega_{\bullet}^q$. Соответствующие пучки и группы ι_V -гомологий обозначаются через $H_*(\Omega_{D,\bullet}^q, \iota_V)$ и $H_*(\Omega_{D,x,\bullet}^q, \iota_V)$.

§2. Гомологический индекс

Если векторное поле $\mathcal{V}$ имеет *изолированную* особенность в точке $x \in D$, то группы ι_V -гомологий комплекса $\Omega_{D,x,\bullet}^q$ — конечномерные векторные пространства, так что определена эйлерова характеристика

$$\chi(\Omega_{D,x,\bullet}^q, \iota_V) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \dim H_i(\Omega_{D,x,\bullet}^q, \iota_V)$$

комплекса регулярных дифференциалов, которая называется *гомологическим* индексом векторного поля V в точке $x \in D$ и обозначается через $\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V)$. В *неособых* точках гиперповерхности D гомологический индекс совпадает с *топологическим* индексом, или с локальным индексом Пуанкаре–Хопфа (см. [5, 6]).

§3. Логарифмические формы

С дивизором D можно связать [13, 14] когерентные аналитические пучки $\Omega_M^q(\log D)$, $q > 0$, и $\text{Der}_M(\log D)$ следующим образом. Модуль $\Omega_{M,x}^q(\log D)$ состоит из ростков мероморфных q -форм ω на M с полюсами вдоль D , таких, что $h\omega$ и $hd\omega$ голоморфны в точке x , т. е. $h \cdot \Omega_{M,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{M,x}^q$ и $h \wedge d\Omega_{M,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{M,x}^q$.

$\Omega_{M,x}^{q+1}$. Последнее условие, очевидно, эквивалентно соотношению $dh \wedge \Omega_{M,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{M,x}^{q+1}$. Модуль $\text{Der}_{M,x}(\log D)$ состоит из ростков голоморфных векторных полей $\mathcal{V}$ на M , таких, что $\mathcal{V}(h) \in (h)\mathcal{O}_{M,x}$. Это, в частности, означает, что такое поле *касается* дивизора D в его неособых точках и, кроме того, определяет регулярное векторное поле $V \in \text{Der}(D)$ на D , так что $\mathcal{V}|_D = V$. Внутреннее умножение полей и форм индуцирует спаривание $\mathcal{O}_M$ -модулей

$$\text{Der}_M(\log D) \times \Omega_M^q(\log D) \longrightarrow \Omega_M^{q-1}(\log D),$$

которое при $q = 1$ является *совершенным*, а пучки $\text{Der}_M(\log D)$ и $\Omega_M^1(\log D)$ оказываются двойственными $\mathcal{O}_M$ -модулями.

Когерентный пучок $\mathcal{O}_M$ -модулей $\Omega_M^q(\log D)$ называется пучком *логарифмических* q -форм, или пучком мероморфных q -форм с логарифмическими полюсами вдоль дивизора D , а $\text{Der}_M(\log D)$ — пучком *логарифмических* векторных полей. По определению $\Omega_M^0(\log D) \cong \mathcal{O}_M$ и $\Omega_{M,x}^{n+1}(\log D) \cong \mathcal{O}_{M,x}(dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n/h)$; при этом имеется включение $\Omega_M^\bullet \subseteq \Omega_M^\bullet(\log D)$, а вне дивизора D имеют место естественные изоморфизмы, $\Omega_{M,x}^\bullet \cong \Omega_{M,x}^\bullet(\log D)$ для всех $x \notin D$.

§4. Логарифмический индекс

Рассмотрим векторное поле $\mathcal{V} \in \text{Der}_M(\log D)$. Внутреннее умножение $\iota_{\mathcal{V}}$ определяет структуру комплекса на $\Omega_M^\bullet(\log D)$.

ЛЕММА 1. *Если все особенности векторного поля $\mathcal{V}$ изолированные, то группы $\iota_{\mathcal{V}}$ -гомологий комплекса $\Omega_M^\bullet(\log D)$ — конечномерные векторные пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $M = \mathbb{C}^{n+1}$ и точка $x_0 = 0 \in D \subset M$ — изолированная особенность поля $\mathcal{V}$, так что $\mathcal{V}(x_0) = 0$. Тогда $\mathcal{V}(x) \neq 0$ для любой точки x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 и в подходящей окрестности точки x можно найти такую систему координат $(t, z'_1, \dots, z'_n)$, в которой $\mathcal{V} = \partial/\partial t$. Так как $\mathcal{V}(h) \subseteq (h)\mathcal{O}_{M,0}$, то $D \cong T \times D_0$, где через T обозначен малый диск по переменной t , а D_0 — гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ (см., например, [12]). Нетрудно показать, что

$$\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^q(\log D) \cong (\Omega_{\mathbb{C}^n,0}^q(\log D_0) \oplus \Omega_{\mathbb{C}^n,0}^{q-1}(\log D_0) \wedge dt) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}. \quad (1)$$

Действительно, для ростков голоморфных форм имеется изоморфизм $\Omega_{D,0}^q \cong (\Omega_{D_0,0}^q \oplus \Omega_{D_0,0}^{q-1} \wedge dt) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, который легко получить из рассмотрения канонических проекций аналитического множества $T \times D_0$ на первый и второй сомножители и определения модуля $\Omega_{D,0}^q$. Искомый изоморфизм для ростков логарифмических форм можно получить таким же рассуждением с использованием точной последовательности

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^q + \frac{dh}{h} \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{q-1} \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^q(\log D) \xrightarrow{\cdot h} \Omega_{D,0}^q \rightarrow \Omega_{D,0}^q / \text{Tors } \Omega_{D,0}^q \rightarrow 0,$$

которая получается из точной последовательности, выражающей подпучки кручения $\text{Tors } \Omega_D^q$ в терминах логарифмических дифференциальных форм; см. [1] или [3].

Далее, на q -м элементе комплекса $(\Omega_{M,0}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}})$ имеем

$$\text{Ker}(\iota_{\partial/\partial t}) \cong \text{Im}(\iota_{\partial/\partial t}) \cong (\Omega_{\mathbb{C}^n,0}^q(\log D_0) \oplus (0)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C},0},$$

т. е. соответствующие группы гомологий равны 0 для всех q . Если $x_0 \in M \setminus D$, то без труда приходим к такому же заключению. Отсюда следует, что группы $\iota_{\mathcal{V}}$ -гомологий комплекса $\Omega_M^\bullet(\log D)$ могут быть нетривиальными лишь в особых точках поля. Из когерентности пучков логарифмических форм и их когомологий следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь, по существу, воспроизводится рассуждение из работы [6], где доказывается конечномерность групп $\iota_{\mathcal{V}}$ -гомологий комплекса дифференциалов $\Omega_{D,0}^\bullet$. Однако приведенное доказательство содержит и новый элемент — изоморфизм (1).

Таким образом, если векторное поле $\mathcal{V}$ имеет *изолированные особенности*, то для любой точки $x \in M$ определена эйлерова характеристика

$$\chi(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \dim H_i(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}}),$$

комплекса логарифмических дифференциальных форм, которую мы будем называть *логарифмическим* индексом поля $\mathcal{V}$ в точке x и обозначать через $\text{Ind}_{\log D, x}(\mathcal{V})$. Из предыдущего ясно, что $\text{Ind}_{\log D, x}(\mathcal{V}) = 0$, если $\mathcal{V}(x) \neq 0$.

§5. Индекс векторного поля на гиперповерхности

Для изучения $\iota_{\mathcal{V}}$ -гомологий комплекса $\Omega_D^\bullet$ можно использовать подход, основанный на представлении регулярных голоморфных дифференциальных форм на гиперповерхности D с помощью мероморфных форм на объемлющем многообразии с логарифмическими полюсами вдоль D (см. [3]). Напомним (см. [1, 3]), что для $q = 0, 1, \dots, n+1$ существуют точные последовательности $\mathcal{O}_{M,x}$ -модулей

$$0 \longrightarrow \Omega_{M,x}^{q-1}/h \cdot \Omega_{M,x}^{q-1}(\log D) \xrightarrow{\wedge dh} \Omega_{M,x}^q/h \cdot \Omega_{M,x}^q \longrightarrow \Omega_{D,x}^q \longrightarrow 0,$$

где через $\wedge dh$ обозначается гомоморфизм внешнего умножения. Отсюда получаем точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow (\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}})[-1] \xrightarrow{\wedge dh} (\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \rightarrow (\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Действительно, тот факт, что умножение на $\wedge dh$ индуцирует морфизм комплексов, следует из тождества $\iota_{\mathcal{V}}(\omega) \wedge dh = \iota_{\mathcal{V}}(\omega \wedge dh) + (-1)^{q-1} \omega \wedge \mathcal{V}(h)$, поскольку второе слагаемое из правой части исчезает в факторкомплексе $\Omega_M^\bullet/h\Omega_M^\bullet$ ввиду условия $\mathcal{V}(h) \in (h)\mathcal{O}_{M,x}$. Теперь заметим, что из точной последовательности комплексов

$$0 \longrightarrow (\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{\cdot h} (\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \longrightarrow (\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \longrightarrow 0 \quad (3)$$

следует, что $\chi(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) = 0$. Таким образом, из точной последовательности (2) получаем

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V) = -\chi((\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}})[-1]) = \chi(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}}). \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $x \in D$ — *изолированная особенность векторного поля* $\mathcal{V} \in \text{Der}(\log D)$, ростки $\mathcal{V}_i \in \mathcal{O}_{M,x}$ задаются разложением $\mathcal{V} = \sum_i \mathcal{V}_i \partial/\partial z_i$ и $J_x \mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n)\mathcal{O}_{M,x}$. Тогда

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V) = \dim \mathcal{O}_{M,x}/J_x \mathcal{V} - \text{Ind}_{\log D, x}(V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow (\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) \xrightarrow{\cdot h} (\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V}) \longrightarrow (\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) \longrightarrow 0. \quad (5)$$

Сначала заметим, что комплекс $(\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ естественно изоморфен комплексу Кошуля $\mathbf{K}_\bullet((\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n); \mathcal{O}_{M,x})$, построенному на образующих $e_i = dz_i$, $i = 0, \dots, n$. Поскольку $x \in D$ — изолированная особенность векторного поля $\mathcal{V}$, последовательность $(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n)$ является $\mathcal{O}_{M,x}$ -регулярной, так что комплекс Кошуля *ацикличен* во всех размерностях, кроме нулевой: $H_0(\mathbf{K}_\bullet) \cong \mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V}$. Таким образом, соотношение

$$\chi(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V}) - \text{Ind}_{\log D, x}(V)$$

для эйлеровых характеристик комплексов из диаграммы (5) и тождество (4) дают утверждение предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 1 имеются канонические изоморфизмы

$$H_i(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) \cong H_{i-1}(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Кроме того, тривиальны следующие старшие группы гомологий:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \quad H_n(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \\ H_{n+1}(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \quad H_n(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \quad H_{n-1}(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \end{aligned}$$

а младшие группы $\iota_\mathcal{V}$ -гомологий H_0 и H_1 комплекса $\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)$ включаются в точную последовательность

$$0 \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_0(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) \xrightarrow{\cdot h} \mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V} \longrightarrow H_0 \longrightarrow 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование выписанных изоморфизмов и точной последовательности следует из ацикличности комплекса $(\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ в положительных размерностях и точной последовательности (5). Равенство нулю первой группы списка следует из того, что модуль $\Omega_{M,x}^{n+1}/h\Omega_{M,x}^{n+1}(\log D)$ тривиален. Далее, из длинной точной последовательности гомологий, ассоциированной с последовательностью (3), и из ацикличности комплекса $(\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ в положительных размерностях следует, что комплекс $(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ ацикличен во всех размерностях, кроме 0 и 1. Поэтому равенство нулю второй группы получается из точной последовательности (2), а четвертой и пятой — из только что доказанных изоморфизмов для $i = n+1$ и $i = n$ соответственно. Наконец, тривиальность третьей группы списка следует из ацикличности комплекса $(\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V})$ в положительных размерностях и из точной последовательности (5).

Теперь можно сделать и первый шаг для вычисления ι_V -гомологии комплекса $\Omega_{D,x}^\bullet$ регулярных дифференциалов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В условиях предложения 1 имеются канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_0(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V}), \quad H_3(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong H_1(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \\ H_i(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong H_{i-3}(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}), \quad i = 4, \dots, n+1, \end{aligned}$$

а группы гомологий H_1 и H_2 описываются с помощью следующей четырех-членной точной последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_2(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \longrightarrow H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V) \\ \xrightarrow{\wedge dh} H_1(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_V) \longrightarrow H_1(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из начального фрагмента точной последовательности гомологий, ассоциированной с последовательностью (2), получаем первый изоморфизм, поскольку $H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)[-1]) = H_{-1}(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)) = 0$.

Далее, как отмечалось выше, комплекс $(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_V)$ ацикличесен во всех размерностях, кроме 0 и 1. Две его нетривиальные группы гомологий находятся из точной последовательности

$$0 \longrightarrow H_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V} \xrightarrow{\cdot h} \mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V} \longrightarrow H_0 \longrightarrow 0.$$

В частности, размерности этих групп гомологий как векторных пространств равны и имеются изоморфизмы $H_0 \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V})$ и $H_1 \cong \text{Ann}_{\mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V}}(h)$.

Наконец, из точной последовательности гомологий, ассоциированной с последовательностью (2), и из условия ацикличесности получаем изоморфизмы

$$H_i(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong H_{i-2}(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V), \quad i = 3, \dots, n+1,$$

и точную последовательность (7). Эти изоморфизмы с учетом следствия 1 дают требуемое.

Таким образом, задача вычисления гомологического индекса и, в самом общем контексте, групп ι_V -гомологий комплекса $\Omega_{D,x}^\bullet$ сводится к вычислению логарифмического индекса и групп ι_V -гомологий комплекса логарифмических дифференциальных форм $\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)$.

§6. Свободные дивизоры

Нетрудно описать гомологии комплекса логарифмических дифференциальных форм $(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V)$ в случае, когда D — свободный дивизор Сайто, т. е. когда $\Omega_M^q(\log D)$ — локально свободные $\mathcal{O}_M$ -модули для всех $q \geq 0$. Перед тем как приступить к вычислениям, напомним несколько известных фактов из теории свободных дивизоров. Так, в этом случае, согласно критерию Сайто [14], для любой точки $x \in D$ существует набор ростков векторных полей $V^0, \dots, V^n \in \text{Der}_{M,x}(\log D)$, таких, что детерминант матрицы $\|v_{ij}\|$, образованной коэффициентами этих полей, равен γh , где γ — обратимый элемент из $\mathcal{O}_{M,x}$. Рассмотрим дифференциальные 1-формы

$$\vartheta_i = \sum_{j=0}^n \Upsilon_{ij} dz_j, \quad i = 0, \dots, n,$$

где Υ_{ij} — алгебраические дополнения элементов v_{ij} . Пусть $\Delta = \det \|v_{ij}\|$. Тогда дифференциальные формы $\omega_i = \vartheta_i/\Delta$, $i = 0, \dots, n$, образуют базис свободного $\mathcal{O}_{M,x}$ -модуля $\Omega_{M,x}^1(\log D)$. Нетрудно проверить, что базисы $V^0, \dots, V^n$ и $\omega_0, \dots, \omega_n$ двойственны относительно совершенного спаривания из §3. В частности, $\iota_{V^j}(\omega_i) = \delta_i^j$ для $i, j = 0, \dots, n$, где δ_i^j — символ Кронекера, и $df =$

$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i = \sum_{i=0}^n V^i(f) \omega_i$, если $f \in \mathcal{O}_{M,x}$. В дальнейшем будем предполагать, что $\Delta = h$. Это упростит обозначения и, как нетрудно видеть, не повлияет на результаты вычислений.

Вернемся к точной последовательности (5). Как уже отмечалось, комплекс в середине естественно изоморфен комплексу Кошуля $\mathbf{K}_\bullet((\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n); \mathcal{O}_{M,x})$, построенному на образующих $e_i = dz_i$, $i = 0, \dots, n$. Если D — свободный дивизор, то комплекс $(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}})$ в точности по тем же соображениям естественно изоморфен комплексу Кошуля $\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})$, построенному на образующих $e'_i = \omega_i$, $i = 0, \dots, n$, где ростки $\alpha_i \in \mathcal{O}_{M,x}$ определяются из разложения векторного поля $\mathcal{V}$ по базисным векторным полям: $\mathcal{V} = \sum_i \alpha_i V^i$. Таким образом,

$$H_*(\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}}) \cong H_*(\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})).$$

Нетрудно проверить, что умножение на h в последовательности (5) индуцирует морфизм соответствующих комплексов Кошуля, который также происходит из умножения на h в кольце коэффициентов. Действительно, обозначим через $\mathcal{A}_0$ гомоморфизм умножения на h нульмерных компонент обоих комплексов, отождествленных с кольцом коэффициентов:

$$\mathbf{K}_0((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_M) \cong \mathcal{O}_M \cong \mathbf{K}_0((\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n); \mathcal{O}_M).$$

Отображение $\mathcal{A}_1$ на одномерных компонентах задается по правилу $\mathcal{A}_1(e'_i) = \sum_j \Upsilon_{ij} e_j$. При этом $\iota_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_1(e'_i) = \mathcal{A}_0 \iota_{\mathcal{V}}(e'_i) = h \alpha_i$, поскольку

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_1(e'_i) &= \iota_{\mathcal{V}} \left(\sum_j \Upsilon_{ij} e_j \right) = \sum_j \Upsilon_{ij} \iota_{\mathcal{V}}(e_j) = \sum_j \Upsilon_{ij} \mathcal{V}_j \\ &= \sum_j \Upsilon_{ij} \sum_k (\alpha_k v_{kj}) = \sum_k \alpha_k \left(\sum_j \Upsilon_{ij} v_{kj} \right) = h \alpha_i = \mathcal{A}_0 \iota_{\mathcal{V}}(e'_i). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств третье следует из того, что $\mathcal{V}_j = \sum_i v_{ij} \alpha_i$ (ввиду тождеств $\mathcal{V} = \sum_i \mathcal{V}_i \partial / \partial z_i = \sum_i \alpha_i V^i = \sum_{i,j} \alpha_i v_{ij} \partial / \partial z_j$), а предпоследнее — из того, что $\sum_j \Upsilon_{ij} v_{kj} = \delta_i^k h$ по основным свойствам систем дуальных базисов. Остальные отображения $\mathcal{A}_\ell$, $\ell \geq 2$, определяются как внешние степени отображения $\mathcal{A}_1$. Суммируя сказанное выше, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть D — свободный дивизор Саито, $x \in D$ — изолированная особенность векторного поля $\mathcal{V} \in \text{Der}(\log D)$, а $\mathcal{V} = \sum_i \alpha_i V^i$ — разложение этого поля по базисным векторным полям. Тогда

$$\text{Ind}_{\log D, x}(\mathcal{V}) = \chi(\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $J_{\log D, x} \mathcal{V} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mathcal{O}_{M,x}$, и предположим, что коэффициенты $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ разложения векторного поля $\mathcal{V}$ по базисным полям образуют регулярную $\mathcal{O}_{M,x}$ -последовательность. Тогда

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{O}_{M,x} / J_x \mathcal{V} - \dim \mathcal{O}_{M,x} / J_{\log D, x} \mathcal{V}. \quad (8)$$

§7. Группы ι_V -гомологий комплекса регулярных дифференциалов

Покажем, как группы гомологий комплексов $\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)$ и $\Omega_{D,x}^\bullet$ описываются в терминах комплекса Кошуля для свободных дивизоров. Начнем с анализа первого комплекса.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В условиях и обозначениях следствия 2 существуют канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V) &\cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V}), \\ H_1(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V) &\cong \text{Ann}_{\mathcal{O}_{M,x}/J_x \mathcal{V}}(h)/J_{\log D,x} \mathcal{V}, \\ H_i(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_V) &\cong H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})), \quad i = 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H_0(\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})) \cong \mathcal{O}_{M,x}/J_{\log D,x} \mathcal{V}$, точная последовательность (6) принимает вид

$$0 \longrightarrow H_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{M,x}/J_{\log D,x} \mathcal{V} \xrightarrow{h} \mathcal{O}_{M,x}/J_x \mathcal{V} \longrightarrow H_0 \longrightarrow 0. \quad (6^\circ)$$

Из нее сразу получаем первые два изоморфизма, а для группы H_1 еще и такой: $H_1 \cong (h) \cap J_x \mathcal{V}/(h) \cdot J_{\log D,x} \mathcal{V}$. Изоморфизмы для $i \geq 2$ получаются непосредственно из следствия 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что морфизм умножения на h отображает фактормодули в необычном направлении — из меньшего в больший. Действительно, как уже отмечалось, $\mathcal{V}_j = \sum_i v_{ij} \alpha_i$, так что $J_x \mathcal{V} \subseteq J_{\log D,x} \mathcal{V}$. Наконец, тот факт, что умножение на h корректно определяет отображение фактормодулей, следует из включения $hJ_{\log D,x} \mathcal{V} \subseteq J_x \mathcal{V}$, которое нетрудно проверить. А именно, в обозначениях предыдущего параграфа $\sum_k v_{jk} \Upsilon_{ik} = h\delta_i^j$ по основному свойству систем дуальных базисов. Отсюда следует, что $h\alpha_i = \sum_j h\delta_i^j \alpha_j = \sum_k \sum_j \Upsilon_{ik} v_{jk} \alpha_j = \sum_k \Upsilon_{ik} \mathcal{V}_k$.

Перейдем теперь к описанию гомологий комплекса регулярных дифференциалов на D .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть D — свободный дивизор Саито, $x \in D$ — изолированная особенность векторного поля $\mathcal{V} \in \text{Der}(\log D)$ и $\mathcal{V}(h) = \varphi h$, $\varphi \in \mathcal{O}_{M,x}$. Обозначим через $\mathcal{B}_x$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{M,x}/J_x \mathcal{V}$. Тогда имеются канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_0(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) &\cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V}), \\ H_1(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) &\cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h)/(\varphi)\mathcal{B}_x, \quad H_2(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(\varphi)/(\hbar)\mathcal{B}_x, \\ H_i(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) &\cong H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet((\alpha_0, \dots, \alpha_n); \mathcal{O}_{M,x})), \quad i = 3, \dots, n+1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности (2) следует, что

$$H_0(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_V) \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V}).$$

Теперь докажем, что точную последовательность (7) можно представить в следующем виде:

$$0 \rightarrow H_2(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \longrightarrow \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V}) \xrightarrow{\varphi} \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h) \longrightarrow H_1(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \rightarrow 0, \quad (7^\circ)$$

где отображение в середине есть умножение на $\varphi \in \mathcal{O}_{M,x}$. Для этого рассмотрим кусок точной последовательности (7), состоящий из двух средних компонент. По

предыдущему утверждению $H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_\mathcal{V}) \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V})$, так что этот фрагмент принимает вид

$$\wedge dh: \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V}) \rightarrow H_1(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V}) \cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h).$$

Теперь опишем связывающий гомоморфизм $\wedge dh$ в явном виде. Для этого рассмотрим росток $g \in \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V})$, представляющий произвольный элемент 0-мерной $\iota_\mathcal{V}$ -гомологии комплекса $\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D)$. Тогда по определению

$$\wedge dh(g) = gdh \in \text{Ker}(\iota_\mathcal{V}: \Omega_{M,x}^1/h\Omega_{M,x}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{M,x}/h\mathcal{O}_{M,x}).$$

Если также через g обозначить росток в $\mathcal{O}_{M,x}$ — соответствующий представитель выбранного выше элемента 0-мерной группы гомологий, — то снова из определений выводим соотношение $\iota_\mathcal{V}(gdh) = hG$ для некоторого $G \in \mathcal{O}_{M,x}$. Наконец, из определения связывающего гомоморфизма следует, что $\wedge dh$ сопоставляет элементу g росток

$$G = \iota_\mathcal{V}(gdh)/h = g\mathcal{V}(h)/h = g\varphi \in \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h) \cong H_1(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet, \iota_\mathcal{V}),$$

что и требовалось доказать.

В качестве еще одного непосредственного следствия из точной последовательности (7°) получаем, что

$$H_2(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong (J_x\mathcal{V} : \varphi)/(h, J_x\mathcal{V}), \quad H_1(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h)/(\varphi)\mathcal{B}_x,$$

где через $(J_x\mathcal{V} : \varphi)$ обозначается дробный идеал, состоящий из ростков $f \in \mathcal{O}_{M,x}$, таких, что $f\varphi \in J_x\mathcal{V}$. В частности, $(J_x\mathcal{V} : \varphi)/(h, J_x\mathcal{V}) \cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(\varphi)/(h)\mathcal{B}_x$. Полезно еще отметить, что если $\varphi \equiv 0$, то четырехчленная последовательность (7°) распадается на два изоморфизма

$$H_2(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V}), \quad H_1(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V) \cong \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предположим, что коэффициенты $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ разложения векторного поля $\mathcal{V}$ по базисным полям образуют регулярную последовательность. Тогда*

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По доказанной теореме группы ι_V -гомологий H_i комплекса $\Omega_{D,x}^\bullet$ равны нулю при $i \geq 3$, а пространства групп гомологий H_1 и H_2 этого комплекса имеют одинаковую размерность. Последнее прямо следует из сравнения размерностей всех членов точных последовательностей (6°) и (7°).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Предположим, что оба идеала $J_x\mathcal{V} \subset J_{\log D, x}\mathcal{V}$ порождаются регулярными последовательностями, причем детерминант матрицы перехода равен h . Тогда группа гомологий H_1 в диаграмме (6°) тривиальна, т. е. гомоморфизм умножения на h в этой точной последовательности инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из двух выражений для гомологического индекса, полученных в предложении 2 и в замечании 2 (формула (8)) из предыдущего параграфа, следует, что

$$\dim \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V}) = \dim \mathcal{O}_{M,x}/J_x\mathcal{V} - \dim \mathcal{O}_{M,x}/J_{\log D, x}\mathcal{V}.$$

Изоморфизм $H_0 \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x\mathcal{V})$ показывает, что $H_1 = 0$, а это и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На самом деле тот факт, что при аналогичных условиях умножение на h инъективно, — ключевой момент в доказательстве теоремы локальной двойственности Гротендика в инвариантной форме (см. [8]). Там же это утверждение проверяется другим способом, с помощью вычисления функторов Ext .

ПРИМЕРЫ. Найдем теперь индекс и группы гомологий для двух примеров (5.1) и (5.3) из работы [6]. В первом примере $M = (\mathbb{C}^3, 0)$ и гиперповерхность $D \subset M$ задается функцией $h(z_0, z_1, z_2) = z_1 z_2$. Заметим, что D — свободный дивизор Сайто. Действительно, пусть $\partial_i = \partial/\partial z_i$. Тогда $V^0 = \partial_0$, $V^1 = z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2$, $V^2 = z_1 \partial_1 - z_2 \partial_2$ составляют базис модуля $\text{Der}_M(\log D)$. Рассмотрим семейство векторных полей $\mathcal{V}_t = z_0^p \partial_0 + t z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2$, $p \geq 1$. Тогда $\mathcal{V}_t \in \text{Der}_M(\log D)$ имеет изолированные особенности для любого $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Далее, $\mathcal{V}_t = z_0^p V^0 + \frac{1}{2}(t+1)V^1 + \frac{1}{2}(t-1)V^2$, так что идеал $J_{\log D, 0} = (z_0^p, t+1, t-1)$ порождается регулярной последовательностью, которая содержит обратимый элемент при любом значении параметра t . Из формулы (8) следует, что $\text{Ind}_{\text{hom}, D, 0} = \dim H_0(\Omega_{D, 0}^\bullet) = \dim \mathcal{O}_{M, 0}/(z_0^p, z_1, z_2) = p$. Для вычисления остальных групп гомологий воспользуемся теоремой 1. Тогда $H_3(\Omega_{D, 0}^\bullet) = 0$. Так как $\mathcal{V}_t(h) = (t+1)h$, то $\varphi_t = t+1$. Если $t = -1$, то $\varphi_{-1} \equiv 0$, так что $\dim H_2(\Omega_{D, 0}^\bullet) = \dim \mathcal{O}_{M, 0}/(z_0^p, z_1, z_2) = p$ и, аналогично, $\dim H_1(\Omega_{D, 0}^\bullet) = p$. Если же $t \neq -1$, то φ_t обратим, так что $H_1(\Omega_{D, 0}^\bullet) = H_2(\Omega_{D, 0}^\bullet) = 0$.

Второй пример — это дискриминант минимальной версальной деформации простой особенности A_3 . Хорошо известно, что такие дискриминанты — свободные дивизоры [13]. В тех же обозначениях дискриминант $D \subset M$ задается функцией $h = 256z_0^3 - 128z_0^2 z_2^2 + 16z_0 z_2^4 + 144z_0 z_1^2 z_2 - 4z_1^2 z_2^3 - 27z_1^4$. Тогда $V^0 = 4\partial_0 + 3\partial_1 + 2\partial_2$, $V^1 = -\frac{1}{2}z_1 z_2 \partial_0 + (4z_0 - z_2^2)\partial_1 + 3z_1 \partial_2$ и $V^2 = -\frac{3}{4}z_1^2 \partial_0 - 2z_1 z_2 \partial_1 + (4z_0 - z_2^2)\partial_2$ образуют базис модуля $\text{Der}_M(\log D)$. Рассмотрим семейство векторных полей $\mathcal{V}_t = z_2 V^0 + t V^2$. Тогда $\mathcal{V}_t \in \text{Der}_M(\log D)$ имеет изолированные особенности для любого $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, \frac{3}{2}, 2\}$. Здесь идеал $J_{\log D, 0} = (z_2, t)$ порождается регулярной последовательностью, которая содержит обратимый элемент при любом допустимом значении параметра t . Снова из формулы (8) следует, что $\text{Ind}_{\text{hom}, D, 0} = \dim H_0(\Omega_{D, 0}^\bullet) = \dim \mathcal{O}_{M, 0}/(h, J_0 \mathcal{V}_t) = \dim \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}/(z_1^2 - z_2^3, z_1 z_2) = 5$. По теореме 1 легко вычислить и две нетривиальные группы гомологий. Имеем $\mathcal{V}_t(h) = (12 - 4t)z_2$, т.е. $\varphi_t = 12 - 4t$. Если $t = 3$, то $\varphi_3 \equiv 0$, так что $\dim H_2(\Omega_{D, 0}^\bullet) = \dim \mathcal{O}_{M, 0}/(h, J_0 \mathcal{V}_t) = 5$ и, аналогично, $\dim H_1(\Omega_{D, 0}^\bullet) = 5$. Если же $t \neq 3$, то φ_t обратим, так что $H_1(\Omega_{D, 0}^\bullet) = H_2(\Omega_{D, 0}^\bullet) = 0$.

§8. Нормальные гиперповерхности

Обозначим через $Z = \text{Sing } D$ подмножество особенностей приведенного дивизора D , а через $c = \text{codim}(Z, D)$ коразмерность подмножества Z в D . Хорошо известно (см. [2]), что для свободных дивизоров Сайто $c = 1$, т.е. в определенном смысле особенности дивизора D составляют максимально возможное подмножество. Если же $c \geq 2$, то из критерия Серра следует, что гиперповерхность D — *нормальное* многообразие (см. [9, гл. II, предложение 8.23]). Для дальнейшего анализа этого случая мы используем следующую переформулировку понятия логарифмической формы из работ [13, 14].

ЛЕММА 2. Росток ω мероморфной дифференциальной q -формы в точке $x \in M$ с полюсами вдоль D является ростком логарифмической формы, т. е. $\omega \in \Omega_{M,x}^q(\log D)$, тогда и только тогда, когда существуют ростки голоморфной функции $g \in \mathcal{O}_{M,x}$, голоморфной $(q-1)$ -формы $\xi \in \Omega_{M,x}^{q-1}$ и голоморфной q -формы $\eta \in \Omega_{M,x}^q$, такие, что

- (i) $\dim_{\mathbb{C}} D \cap \{z \in M : g(z) = 0\} \leq n-1$,
- (ii) $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$.

Обозначим через $\varrho: \Omega_{M,x}^q(\log D) \rightarrow \Omega_{M,x}^q$ гомоморфизм умножения на h , и пусть $\omega \in \Omega_{M,x}^q(\log D)$. Тогда существует элемент $g \in \mathcal{O}_{M,x}$ из леммы 2, такой, что $gh\omega \in h\Omega_{M,x}^q + dh \wedge \Omega_{M,x}^{q-1}$, т. е. $gh\omega = 0$ в $\Omega_{D,x}^q$. Поскольку росток g определяет неделитель нуля в $\mathcal{O}_{D,x}$, это, в частности, означает, что $h\omega \in \text{Tors } \Omega_{D,x}^q$, где через $\text{Tors } \Omega_{D,x}^q$ обозначается подмодуль кручения пучка регулярных q -дифференциалов. Таким образом, $\text{Im}(\varrho) \subseteq \text{Tors } \Omega_{D,x}^q$ (хотя на самом деле здесь имеется равенство). Если $\text{Tors } \Omega_{D,x}^q = 0$, то росток g из представления (ii) может быть только обратимым элементом, а потому

$$\Omega_{M,x}^q(\log D) \cong \Omega_{M,x}^q + \frac{dh}{h} \wedge \Omega_{M,x}^{q-1}. \quad (9)$$

На самом деле этот изоморфизм можно получить и без приведенных выше рассуждений, прямо воспользовавшись точной последовательностью для модулей кручения $\text{Tors } \Omega_{D,x}^q$ из работы [1] или [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть D — нормальная гиперповерхность. Тогда

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V) = \dim \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V}) + \sum_{i=c'}^{n+1} (-1)^i \dim H_i(\Omega_{D,x}^\bullet, \iota_V),$$

где $c' = 2\left[\frac{c+1}{2}\right] + 1$, квадратные скобки обозначают целую часть, а сумма полагается равной нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. [7]), что $\text{Tors } \Omega_D^q = 0$ для $0 < q < c$ (на самом деле это верно не только для гиперповерхностей, но и для полных пересечений). Вместе с изоморфизмом (9) это показывает, что $\Omega_{M,x}^q/h\Omega_{M,x}^q(\log D) \cong \Omega_{D,x}^q$ для всех таких q . Поэтому из точной последовательности (2) следует, что

$$H_i(\Omega_D^q, \iota_V) \cong H_{i-1}(\Omega_D^q[-1], \iota_V) = H_{i-2}(\Omega_D^q, \iota_V)$$

для всех $i = 3, \dots, c+1$. В частности, в указанном диапазоне размерности групп ι_V -гомологий комплекса $\Omega_{D,x}^\bullet$ из двух серий H_{2i} и H_{2i-1} одинаковы. Далее, нетрудно видеть, что точная последовательность (7°) получается из (7) с помощью точно таких же рассуждений, как в доказательстве теоремы 1, не только для свободных дивизоров Сайто, но и для любых гиперповерхностей, обладающих свойством $H_0(\Omega_{M,x}^\bullet/h\Omega_{M,x}^\bullet(\log D), \iota_{\mathcal{V}}) \cong \mathcal{O}_{M,x}/(h, J_x \mathcal{V})$. Для нормальных особенностей последнее выполнено ввиду формулы (9). Поэтому размерности групп H_1 и H_2 также равны, откуда и следует нужная формула. Целая часть при задании нижнего предела суммирования здесь понадобилась для того, чтобы различать случаи четной и нечетной коразмерности.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $x \in D$ — изолированная особенность как гиперповерхности D , так и векторного поля $\mathcal{V} \in \text{Der}(\log D)$, $\mathcal{V}(h) = \varphi h$ и $\varphi \in \mathcal{O}_{M,x}$. Тогда

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V) = \dim \mathcal{O}_{M, x} / (h, J_x \mathcal{V}) + \varepsilon \dim \text{Ann}_{\mathcal{B}_x}(h) / (\varphi) \mathcal{B}_x,$$

где $\varepsilon = -1$, если n чётно, и $\varepsilon = 0$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для изолированной особенности $c = n$, из теоремы 2 получаем

$$\text{Ind}_{\text{hom}, D, x}(V) = \dim \mathcal{O}_{M, x} / (h, J_x \mathcal{V}) + \varepsilon \dim H_{n+1}(\Omega_{D, x}^\bullet, \iota_V).$$

Как показано в только что проведенном рассуждении с использованием точной последовательности (7°), группы четномерных и нечетномерных гомологий H_{2i} и H_{2i-1} комплекса $\Omega_{D, x}^\bullet$ вплоть до H_{n+1} изоморфны группам H_2 и H_1 соответственно. Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В работе [5] аналогичный результат для усеченного комплекса регулярных дифференциалов $(\Omega_D^q, \iota_V)_{q=0, \dots, n}$ устанавливается прямым вычислением с использованием спектральных последовательностей, ассоциированных с конусом морфизма, а в работе [6] этот подход развивается для гиперповерхностей с одномерным подпространством особенностей, т. е. в случае $c = n - 1$.

§9. Индекс и регулярные мероморфные формы

В заключение затронем еще один круг вопросов, тесно связанных с понятием *вычета* логарифмических форм. Обозначим $\mathcal{O}_D$ -модуль ростков мероморфных функций на ростке гиперповерхности D через $\mathcal{M}_D$. Тогда отображение вычета — это гомоморфизм $\mathcal{O}_M$ -модулей

$$\text{res}: \Omega_M^q(\log D) \rightarrow \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1},$$

который сопоставляет ростку $\omega \in \Omega_{M, x}^q(\log D)$ элемент $\frac{1}{g}\xi \in \mathcal{M}_{D, x} \otimes_{\mathcal{O}_{D, x}} \Omega_{D, x}^{q-1}$, заданный представлением (ii) из леммы 2. Этот элемент называется *вычетом* ростка ω и обозначается через $\text{res}(\omega)$.

Пусть теперь $\omega_D^n \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\mathcal{O}_D, \Omega_M^{n+1})$ — дуализирующий модуль Гротендика для ростка $D \subset M$, который при наших предположениях локально изоморфен $\mathcal{O}_D$. Тогда элементы из $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Omega_D^{n-q}, \omega_D^n)$, $q = 0, \dots, n$, называются *регулярными мероморфными дифференциальными q -формами*, а соответствующие пучки обозначаются через ω_D^q (см. [4, 3]). Можно доказать (loc. citе), что $\omega_{D, x}^0$ содержит все ростки слабо голоморфных функций на D (ср. [13, 14]), или локально ограниченных мероморфных функций на D . Наконец, отметим, что стягивание ι_V на комплексе Ω_D^q по двойственности индуцирует канонический гомоморфизм $\mathcal{O}_D$ -модулей $\iota_V: \omega_D^q \rightarrow \omega_D^{q-1}$ и тем самым наделяет $\omega_D^\bullet$ структурой комплекса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $D \subset M$ — росток произвольной гиперповерхности. Тогда существует точная последовательность комплексов $\mathcal{O}_M$ -модулей

$$0 \longrightarrow (\Omega_M^\bullet, \iota_V) \longrightarrow (\Omega_M^\bullet(\log D), \iota_V) \xrightarrow{\text{res}} (\omega_D^\bullet[-1], \iota_V) \longrightarrow 0,$$

индуцирующая естественные изоморфизмы групп гомологий

$$H_q(\Omega_{M, x}^\bullet(\log D), \iota_V) \cong H_q(\omega_{D, x}^\bullet[-1], \iota_V) = H_{q-1}(\omega_{D, x}^\bullet, \iota_V)$$

для всех $q \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений следует, что $\text{res}(\iota_{\gamma}(\omega)) = -\iota_{\gamma}(\text{res}(\omega))$, так что отображение вычета коммутирует с точностью до знака со стягиванием ι_{γ} (равно как и с внешним дифференцированием d ; см. [3]). Отсюда следует первое утверждение. Ацикличность комплекса $(\Omega_M^{\bullet}, \iota_{\gamma})$ в положительных размерностях дает искомые изоморфизмы и, кроме того, точную последовательность

$$0 \rightarrow H_1(\Omega_M^{\bullet}(\log D), \iota_{\gamma}) \rightarrow H_0(\omega_D^{\bullet}, \iota_V) \rightarrow H_0(\Omega_M^{\bullet}, \iota_V) \rightarrow H_0(\Omega_M^{\bullet}(\log D), \iota_{\gamma}) \rightarrow 0.$$

В частности, для свободных дивизоров Сайто получаем описание ι_V -гомологий комплекса регулярных мероморфных дифференциальных форм $\omega_D^{\bullet}$ в терминах комплекса Кошуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Г. О комплексе де Рама неизолированных особенностей. Функц. анализ и его прил., **22**, вып. 2, 59–60 (1988).
2. Александров А. Г. Неизолированные особенности Сайто. Матем. сб., **137** (179), №4 (12), 554–567 (1988).
3. Aleksandrov A. G. Nonisolated hypersurface singularities. In: Adv. in Soviet Math. (Arnold V. I., ed.), Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 211–246.
4. Barlet D. Le faisceau $\omega_X^{\bullet}$ sur un espace analytique X de dimension pure. Lecture Notes in Math., Vol. 670, 187–204, Springer-Verlag, 1978.
5. Gómez-Mont X. An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity. J. Alg. Geom., **7**, 731–752 (1998).
6. Giraldo L., Gómez-Mont X., Mardešić P. On the index of vector fields tangent to hypersurfaces with non-isolated singularities. J. London Math. Soc. (2), **65**, No. 2, 418–438 (2002).
7. Greuel G.-M. Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. Math. Ann., **214**, No. 3, 235–266 (1975).
8. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 2. Мир, М., 1982.
9. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Мир, М., 1981.
10. Milnor J. Topology from the differential viewpoint. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.
11. Reiffen H.-J., Vetter U. Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen. Math. Ann., **167**, No. 4, 338–350 (1966).
12. Rossi H. Vector fields on analytic spaces. Ann. of Math. (2), **78**, 455–467 (1963).
13. Saito K. On the uniformization of complements of discriminant loci. In: Hyperfunctions and Linear partial differential equations, RIMS Kōkyūroku, **287**, 117–137 (1977).
14. Saito K. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., **27**, No. 2, 265–291 (1980).

Институт проблем управления РАН
email: alexandr@ipu.rssi.ru

Поступило в редакцию
3 марта 2004 г.