Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Оценки инволюции разложимых элементов комплексной банаховой алгебры, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 14–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:00:13

УДК 517.9

Оценки инволюции разложимых элементов комплексной банаховой алгебры

© 2005. Е. А. Горин

Введение

В этой работе в основном речь идет о банаховых алгебрах A с единицей $\mathbb{I}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Когда необходимо уточнение, мы пишем $\mathbb{I}_A$ вместо $\mathbb{I}$. С другой стороны, эпитеты «банахова» и «комплексная» зачастую опускаются. Поскольку нас будут интересовать метрические задачи, в определение алгебры *включается предположение*, что $\|\mathbb{I}\| = 1$ и что $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ для всех $x, y \in A$.

Как правило, мы будем придерживаться стандартной терминологии, принятой, например, в трактатах Н. Бурбаки или в монографии [1]. Кстати, в этой последней детально обсуждается часть из вводимых ниже (и подробнее обсуждающихся в §1) объектов и история их возникновения. Дополнительную информацию можно найти в статье [2], посвященной неравенствам Бернштейна, которые и здесь играют заметную роль. Классический подход к неравенствам Бернштейна и их обобщениям отражен во многих публикациях. Особенно я хотел бы выделить недавно вышедшее (на русском языке) собрание сочинений Н. И. Ахиезера [3] и последнюю монографию Б. Я. Левина [4] (русский текст которой, к сожалению, не опубликован).

$\mathbb{C}$ -линейный функционал $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется *состоянием*, если $\|\psi\| = \psi(\mathbb{I}) = 1$. Например, в алгебре $A = C(X)$ всех непрерывных функций на метрическом компакте X гомоморфизмам $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ отвечают (согласно теореме Рисса) точечные меры, а состояниям — произвольные вероятностные борелевские меры.

Очевидно, что множество $\text{St}(A)$ всех состояний составляет $\sigma(A^*, A)$ -компактное выпуклое подмножество сопряженного пространства A^* . В отличие от множества гомоморфизмов, которое в случае некоммутативной алгебры может оказаться пустым, множество состояний всегда весьма обильно.

Выпуклый компакт

$$V(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi(a) \mid \psi \in \text{St}(A)\}$$

называется *числовым образом* элемента a . Радиус наименьшего диска с центром в точке 0, содержащего $V(a)$, называется *числовым радиусом* элемента a и обозначается через $v(a)$. Ясно, что $v(a) \leq \|a\|$. С другой стороны, известно, что $\|a\| \leq e \cdot v(a)$ (оценка точная).

Спектр элемента $a \in A$ мы обозначаем через $\text{Spec}(a)$ или, если необходимо уточнение, $\text{Spec}_A(a)$. Для спектрального радиуса используется обозначение $|a|$, и мы надеемся, что это не будет приводить к недоразумениям. Числовой образ

содержит выпуклую оболочку спектра, но, вообще говоря, существенно шире этого множества (даже в классе двумерных коммутативных алгебр с единицей).

Элемент $a \in A$ называется *эрмитовым*, если $V(a) \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел. Множество всех эрмитовых элементов алгебры A обозначается через $H(A)$. Это множество является замкнутым $\mathbb{R}$ -линейным подпространством в A .

Так как $\text{Spec}(a) \subset \mathbb{R}$ для всех $a \in H(A)$, то множество эрмитовых элементов одномерно для всех алгебр типа алгебры аналитических функций в диске. Заметим, что оно одномерно и для алгебры абсолютно сходящихся рядов Фурье. В случае C^* -алгебр эрмитовость совпадает с обычной самосопряженностью. Всегда $\|a\| = |a|$ для каждого $a \in H(A)$.

Элемент $x \in A$ называется *разложимым*, если он допускает представление $x = a + ib$, в котором a и b эрмитовы. Такое представление, если оно существует, единственно, так что *эрмитовы компоненты* a , b разложимого элемента x определены однозначно.

Совокупность всех разложимых элементов алгебры A обозначается через $H_{\mathbb{C}}(A)$. Ясно, что $H_{\mathbb{C}}(A)$ — замкнутое $\mathbb{C}$ -линейное подпространство в A , более того, $H_{\mathbb{C}}(A)$ — банахова алгебра Ли относительно коммутатора. Заметим, что если в (ассоциативной) банаховой алгебре все элементы разложимы, то, согласно теореме Виддава–Пальмера (см., например, [1]), эта алгебра имеет естественную C^* -структуру. Поэтому ясно, что замкнутость пространства $H_{\mathbb{C}}(A)$ относительно исходного умножения — большая редкость.

На алгебре $H_{\mathbb{C}}(A)$ определена естественная *инволюция*

$$a + ib = x \rightarrow x^* = a - ib.$$

Для разложимых элементов указанная выше оценка уточняется: $\|x\| \leq 2v(x)$ (и здесь оценка точная). Так как $v(x) = v(x^*)$, то отсюда следует, что для разложимых элементов $\|x^*\| \leq 2\|x\|$.

Один из основных результатов данной работы состоит в том, что последнюю оценку можно уточнить: существует такая константа $\gamma < 2$, что $\|x^*\| \leq \gamma\|x\|$. Наилучшее значение этой константы определяется равенством

$$\gamma = 2 \sup |f'(0)|,$$

где верхняя грань берется по всем таким (вещественным нечетным) целым функциям f экспоненциального типа ≤ 1 , для которых на вещественной оси

$$|t^{n+1}(t^{-1}d/dt)^n(f(t)/t)| \leq 1 \quad \text{при всех } n = 0, 1, 2, \dots$$

Фактически изучается следующая более общая проблема. Будем рассматривать только такие разложимые $x \in A$, для которых $\|x^*\| = 2$ и $v(x) = \tau$. Тогда $1 \leq \tau \leq 2$ и $\|x\| \geq \tau$. При фиксированном τ естественно спросить о такой наибольшей константе $c(\tau)$, что в этой ситуации непременно $\|x\| \geq c(\tau)$.

Ясно, что $\gamma = 2/\inf c(\tau)$. Оказывается, что

$$c(1) = \max_{t>0} \left\{ \frac{\sin t}{t} - \cos t \right\} = 1,0631 \dots$$

и что функция $c(\tau)$ непрерывна и монотонно убывает при $\tau < \tau_0$. Если $\tau \geq \tau_0$, то $c(\tau) = \tau$. Конечно, $\gamma = 2/\tau_0$.

Небольшой список результатов настоящей статьи опубликован в [5].

Я хотел бы отметить, что в дальнейшем тексте можно обнаружить целый ряд естественных, но не решенных аналитических задач.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аксиома выбора порой применяется к категориям, не являющимся множествами, и нам хотелось бы этого избежать. По смыслу нашей задачи в ней речь идет о паре элементов алгебры. Поэтому в качестве исходного материала мы можем рассматривать только алгебры с числом образующих ≤ 2 . Вместе с тем для каждого натурального n существует такое *множество* $\mathfrak{M}(n)$ банаховых алгебр, что каждая банахова алгебра с числом образующих $\leq n$ изометрически изоморфна алгебре из $\mathfrak{M}(n)$. Действительно, пусть $\text{Ass}_{\mathbb{C}}(n)$ — свободная ассоциативная алгебра с n образующими над полем $\mathbb{C}$. Элементами этой алгебры служат «ассоциативные, но не коммутативные полиномы от n переменных с комплексными коэффициентами». Алгебры вида $\text{Ass}_{\mathbb{C}}(n)/I$, где I — двусторонний идеал, составляют множество, и в качестве $\mathfrak{M}(n)$ можно взять конкретное *множество* пополнений (например, по Хаусдорфу) таких факторалгебр. В дальнейшем мы будем все это иметь в виду.

§1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы изложим в основном хорошо известные факты. Для удобства ссылок некоторые из них оформляются в виде лемм.

Если f — непрерывная вещественная выпуклая функция на полуоси $t \geq 0$, причем $f(0) = 0$, то $f(t)/t$ не убывает и поэтому имеет предел при $t \rightarrow 0$.

Пусть A — комплексное банахово пространство, $a, b \in A$. Тогда из выпуклости нормы и теоремы Хана–Банаха вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\|b + ta\| - \|b\|)/t = \sup \operatorname{Re} \psi(a),$$

где верхняя грань берется по всем функционалам ψ , для которых $\|\psi\| = 1$ и $\psi(b) = \|b\|$. Заметим, что двустороннего предела (при $t \rightarrow 0$), вообще говоря, нет.

В применении к банаховым алгебрам получается, что для каждого элемента $x \in A$ и $t \geq 0$

$$\|\mathbb{I} + tx\| = 1 + r(x)t + \varepsilon(t)t, \quad (1)$$

где $\varepsilon(t) \geq 0$ — неубывающая функция, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и

$$r(x) = \sup \{\operatorname{Re} \psi(x) \mid \psi \in \operatorname{St}(A)\}.$$

Число $r(x)$ называется *числовой абсциссой* элемента x . Ясно, что $r(\lambda x) = \lambda r(x)$ при $\lambda \geq 0$ и $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$.

Из формулы (1) получается, что элемент a тогда и только тогда эрмитов (т.е. $V(a) \subset \mathbb{R}$), когда $\|\mathbb{I} + ita\| = 1 + o(t)$ в вещественной окрестности точки $t = 0$.

Пусть $\omega = \omega(t)$ — такая неотрицательная функция на полуоси $t > 0$, что $\omega(s + t) \leq \omega(s) \cdot \omega(t)$ при всех $s, t > 0$.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\sup_{t > 0} \omega(t)^{1/t} < \infty$. Тогда*

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} \omega(t)^{1/t} \leq \inf \omega(t)^{1/t} \quad \text{и} \quad \varliminf_{t \rightarrow 0} \omega(t)^{1/t} \geq \sup \omega(t)^{1/t}.$$

В частности, пределы при $t \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow 0$ существуют.

Дискретный вариант леммы 1 называется леммой Фекете и тесно связан с формулой Гельфанда для спектрального радиуса. В этом случае условия на

верхнюю грань не требуется, а второе утверждение теряет смысл. Доказательство обоих утверждений этой леммы не требует ничего, кроме стандартной процедуры «деления с остатком». Поэтому правую полуось можно заменить положительной частью всюду плотной подгруппы вещественной оси. С другой стороны, хотя дополнительные условия (вроде $\omega(t) \leq e^{ct}$) можно варьировать, совсем освободиться от них нельзя (примеры получаются из разрывных решений уравнения Коши–Абея).

Из условия (1) и леммы 1 вытекает, что для эрмитова элемента a при $t \rightarrow 0$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место соотношение $\|e^{ita}\| = 1 + o(t)$. Отсюда (и из леммы 1) легко следует, что элемент a тогда и только тогда эрмитов, когда $\|e^{ita}\| = 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (довольно часто это свойство используется в качестве определения).

Из леммы 1 вытекает следующий аналог формулы (1):

$$\log \|e^{tx}\| = r(x)t - \varepsilon(t)t, \quad (2)$$

где $\varepsilon(t) \geq 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. В частности, числовая абсцисса — это наименьшая из таких констант r , что $\|e^{tx}\| \leq e^{rt}$ при всех $t \geq 0$. Аналогично, числовой радиус $v(x)$ — это наименьшая из таких констант v , что

$$\|e^{\lambda x}\| \leq e^{v|\lambda|} \quad \text{при всех } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Хотя $V(x)$ целиком определяется двумерным сечением алгебры (проходящим через x и $\mathbb{I}$), при всех натуральных n имеют место следующие неравенства:

$$\|x^n\| \leq \frac{n! e^n}{n^n} v(x)^n. \quad (4)$$

Эти неравенства вытекают из (3) и формулы Коши. Сопоставляя неравенства (4) с формулой Стирлинга в форме

$$n! = (n/e)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta/(12n)}, \quad \text{где } 0 < \theta = \theta(n) < 1,$$

при $n \geq 1$ получаем (грубое, но прозрачное) неравенство

$$\|x^n\| \leq 3n^{1/2} v(x)^n \quad (5)$$

(так как $\sqrt{2\pi} e^{1/12} = 2,724 \dots < 3$).

Если $a_1, a_2 \in H(A)$ и $a_1 + ia_2 = 0$, то $\psi(a_1) = \psi(a_2) = 0$ для каждого $\psi \in \text{St}(A)$. Поэтому $a_1 = a_2 = 0$. Следовательно, эрмитовы компоненты $a = \text{Re } x$, $b = \text{Im } x$ разложимого элемента $x = a + ib$ определены однозначно.

Так как $v(\text{Re } x) \leq v(x)$, то $H_{\mathbb{C}}(A)$ — замкнутое подпространство в A . Кроме того, $i[a, b] \in H(A)$, если $a, b \in H(A)$, т.е. $H_{\mathbb{C}}(A)$ — банахова алгебра Ли. Действительно, пусть $t \in \mathbb{R}$ и $\psi \in \text{St}(A)$. Положим

$$\psi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(e^{ita} x e^{-ita}).$$

Легко видеть, что $\psi_t \in \text{St}(A)$. Следовательно, $\psi_t(b) \in \mathbb{R}$, и остается взять производную $\partial \psi_t(b) / \partial t$ при $t = 0$. Заметим, что элемент a^2 при эрмитовом a может оказаться неразложимым.

Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей, и пусть $\emptyset \neq S \subset A$. Положим

$$Z(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in A \mid xy = yx \text{ для всех } x \in S\}.$$

Следующая лемма — стандартный алгебраический факт:

ЛЕММА 2. Пусть $B = Z(Z(S))$. Тогда B — подкольцо в A и каждый элемент из B , обратимый в A , обратим и в B . Если элементы из S коммутируют, то B коммутативно. Если A — банахова алгебра, то B — ее замкнутая подалгебра.

Доказательство имеется, например, в [6, гл. 11].

Поэтому если A — банахова алгебра и $x \in A$, то $\text{Сpec}(x) \subset V(x)$ и, в частности, $|x| \leq v(x)$. Действительно, пусть $S = \{x\}$. Тогда B — коммутативная банахова алгебра и, кроме того, $\text{Сpec}_A(x) = \text{Сpec}_B(x)$. В соответствии с основными принципами теории Гельфанда $\text{Сpec}_B(x)$ составляют числа вида $\varphi(x)$, где φ — комплексный гомоморфизм алгебры B , так что $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}) = 1$. Поэтому, продолжая φ с сохранением нормы на A , мы получим состояние.

В дальнейшем мы пишем $Z(x)$ вместо $Z(\{x\})$.

Хорошо известно, что $\|a\| = |a|$, если $a \in H(A)$. Это равенство фактически эквивалентно классическому неравенству С. Н. Бернштейна для производной целой функции экспоненциального типа, ограниченной на вещественной оси.

В случае эрмитовых элементов стандартное функциональное исчисление допускает естественное расширение за пределы аналитических функций.

Обозначим через $\text{Sym}(\mathbb{R})$ алгебру символов, состоящую из всех комплексных функций на $\mathbb{R}$, локально совпадающих с преобразованиями Фурье–Стилтьеса мер конечной полной вариации. Если $q \in \text{Sym}(\mathbb{R})$ и $a \in H(A)$, то по определению $q(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{ita} \nu(dt)$, где ν — (какая-нибудь) мера, для которой $q(\lambda) = \hat{\nu}(\lambda)$ в некоторой вещественной окрестности компакта $\text{Сpec}(a)$. Сравнительно легко проверить, что $\text{Сpec}(q(a)) = \{q(\lambda) \mid \lambda \in \text{Сpec}(a)\}$. Символ называется универсальным, если в описанной ситуации $\|q(a)\| = |q(a)|$. Это понятие, введенное в [7], детально обсуждается в [8] в контексте локально компактных абелевых групп. Имеются критерии универсальности в терминах положительно определенных функций, в ряде случаев допускающие простую проверку. В частности, если q — полином первой степени (с комплексными коэффициентами), то q и e^q — универсальные символы.

Следующее неравенство уточняет оценку $\|x\| \leq e \cdot v(x)$ в случае разложимых элементов и является прямым обобщением известного неравенства Бергера (для C^* -алгебр):

ЛЕММА 3. Если $x \in H_{\mathbb{C}}(A)$, то $\|x\| \leq 2v(x)$.

Действительно,

$$\|x\| \leq \|\text{Re } x\| + \|\text{Im } x\| = |\text{Re } x| + |\text{Im } x| \leq 2v(x).$$

Разложимый элемент $x = a + ib$ будем называть нормальным, если $[a, b] = 0$.

ЛЕММА 4. Если элемент x нормален, то $V(x)$ совпадает с выпуклой оболочкой спектра этого элемента. В частности, $v(x) = |x|$.

Действительно, без ограничения общности можно предположить, что алгебра A коммутативна. Достаточно установить, что $V(x)$ лежит в полуплоскости $\text{Re } \lambda \leq 0$, если в этой полуплоскости лежит $\text{Сpec}(x)$. Пусть $t > 0$ и $\varphi \in \text{Hom}(A, \mathbb{C})$ (т.е. φ — комплексный гомоморфизм). Пусть $a = \text{Re } x$. Тогда $0 < \varphi(e^{ta}) = e^{t\varphi(a)} \leq 1$. Поэтому $\|e^{tx}\| = \|e^{ta}\| = |e^{ta}| \leq 1$, т.е. $r(x) \leq 0$.

В частности, согласно леммам 3 и 4, $\|x\| \leq 2|x|$ для нормальных элементов x , и эта оценка точна (ниже мы приведем пример). Вместе с тем вытекающая

из равенства $V(x) = \overline{V(x^*)}$ и леммы 3 оценка $\|x^*\| \leq 2\|x\|$ точной не является, и установить это — одна из целей данной работы.

Классическое пространство Бернштейна — это пространство $\mathbf{B}_\tau$ всех целых функций f экспоненциального типа не выше τ , ограниченных на вещественной оси. Относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы по $\mathbb{R}$ это пространство является банаховым. В комплексной плоскости $|f(\lambda)| \leq \|f\|e^{\tau|\operatorname{Im} \lambda|}$. Отсюда следует, что $\mathbf{B}_\tau$ составляют в точности те непрерывные ограниченные функции на оси, преобразование Фурье которых сосредоточено на отрезке $[-\tau, \tau]$. Это позволяет конструировать содержательные аналоги пространств $\mathbf{B}_\tau$ во всех $\mathbb{R}^n$ (и даже на локально компактных абелевых группах). Нам потребуется один из простейших примеров такого сорта.

В дальнейшем через Q обозначается евклидов единичный шар в стандартном пространстве $\mathbb{R}^2$. Далее, при $\tau > 0$ через $\mathbf{B}_\tau(Q)$ обозначается снабженное $\sup$ -нормой по плоскости пространство ограниченных непрерывных функций, преобразование Фурье которых сосредоточено на τQ . Эти функции продолжаются до целых в $\mathbb{C}^2$ с оценкой, аналогичной указанной (разумеется, теперь $|\operatorname{Im} \lambda|$ — евклидова норма).

Нам будет удобно ввести в $\mathbb{R}^2$ комплексную координату $z = \lambda_1 + i\lambda_2$ и соответствующий оператор $D = \partial/\partial\lambda_1 - i\partial/\partial\lambda_2$. Формально сопряженный оператор обозначается через D^* , так что, в частности, $Dz = 2$, $D^*z = 0$ и $\Delta = DD^*$ — оператор Лапласа.

Определим неотрицательное r равенством $r^2 = z\bar{z}$. Если $g(t)$ — четная гладкая функция на вещественной оси, то $g(r)$ — сферически симметричная функция на $\mathbb{R}^2$. Ясно, что $Dg(r) = \bar{z}g'(r)/r$. Вообще, при неотрицательных k и l

$$D^k \bar{z}^l g(r) = \bar{z}^{k+l} (r^{-1} d/dr)^k g(r). \quad (6)$$

Вращения в $\mathbb{R}^2$ реализуются в форме $z \rightarrow \zeta z$, где $|\zeta| = 1$. Обозначим через R_ζ индуцированный оператор в $\mathbf{B}_\tau(Q)$. Тогда R_ζ — изометрия и, кроме того, $DR_\zeta = \zeta R_\zeta D$. Положим

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} R_\zeta d\zeta.$$

Если $u \in \mathbf{B}_\tau(Q)$, причем

$$u(z, \bar{z}) = \sum_{p, q \geq 0} c_{p, q} z^p \bar{z}^q,$$

то

$$(Pu)(z, \bar{z}) = \bar{z} \sum_{p \geq 0} c_{p, p+1} r^{2p} = \bar{z} g(r),$$

где g — четная функция из $\mathbf{B}_\tau$, причем $\sup_{\mathbb{R}} |tg(t)| \leq \|u\|$. Поэтому (нечетная) функция $f(t) = tg(t)$ также принадлежит $\mathbf{B}_\tau$ и $\|f\| \leq \|u\|$.

Ясно, что $(D^*u)(0, 0) = 2f'(0)$. По неравенству Бернштейна $|f'(0)| \leq \tau\|f\|$, и среди нечетных f равенство достигается в точности для функций, кратных $\sin \tau t$.

В пространстве $\mathbf{B}_\tau(Q)$ оператор D является нормальным (с сопряженным D^*) и $\operatorname{Spec}(D) = \tau Q$. Поэтому $v(D) = |D| = \tau$. С другой стороны, если $u(z, \bar{z}) = (z \sin \tau r)/r$, то $\|u\| = 1$ и $(Du)(0, 0) = 2\tau$, так что $\|D\| = 2\tau$. Аналогично, $\|D^*\| = 2\tau$, так как $(D^*v)(0, 0) = 2$, где $v(z, \bar{z}) = (\bar{z} \sin \tau r)/r$. Других таких функций в

$\mathbf{B}_\tau(Q)$ нет [7], и это довольно просто вытекает из описания экстремалей для неравенства Бернштейна в одномерном случае.

Существует несколько способов доказать, что $\|D^2\| = 8\tau^2/\pi$, но уже вычисление $\|D^3\|$ приводит к полным эллиптическим интегралам. При $n \geq 1$ грубую оценку сверху для $\|D^n\|$ дает формула (5):

$$\|D^n\| \leq 3n^{1/2}\tau^n,$$

а грубую оценку снизу — соотношение

$$\|D^n\|^2 \geq \|\Delta^n\| = 4^n(n!)^2\tau^{2n}/(2n)! \sim (\pi n)^{1/2}\tau^{2n}.$$

§2. Предварительные конструкции и оценки

В дальнейшем для вещественных $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ будет удобно вместо $\max\{\xi, \eta\}$ писать $\xi \oplus \eta$.

Пусть A и B — банаховы алгебры. Через $A \oplus B$ мы обозначаем прямую сумму алгебр A и B с нормой $\|a \oplus b\| = \|a\| \oplus \|b\|$. Исходные алгебры естественно погружаются в $A \oplus B$ в качестве идеалов. Алгебра $A \oplus B$ тогда и только тогда коммутативна, когда коммутативны обе алгебры A и B .

ЛЕММА 5. $V(a \oplus b)$ — выпуклая оболочка множества $V(a) \cup V(b)$. В частности, $v(a \oplus b) = v(a) \oplus v(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. «Тонкость» состоит в том, что a , b и $a \oplus b$ — элементы различных алгебр.

Если $\psi \in \text{St}(A)$, то $x \oplus y \rightarrow \psi(x)$ — состояние алгебры $A \oplus B$. Поэтому $V(a) \subset V(a \oplus b)$, и остается проверить, что $r(a \oplus b) \leq r(a) \oplus r(b)$. Но если $r(a) = r(b) = 0$, то это очевидно (так как $A \oplus B$ снабжается «нормой Кратана»), а общий случай сводится к этому¹⁾.

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность банаховых алгебр. Обозначим через Σ банахову алгебру всех ограниченных (по норме) последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_k \in A_k$, с покоординатными операциями и нормой $\sup_k \|x_k\|$.

Рассмотрим факторалгебру Σ/Σ_0 , где Σ_0 — идеал последовательностей из Σ , для которых $x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6. Предположим, что элемент $x \in \Sigma/\Sigma_0$ порождается последовательностью $\{x_k\}$. Тогда $\|x\| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|$, $r(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(x_k)$ и $v(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} v(x_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение тривиально. Докажем второе утверждение.

Предположим, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(x_k) < 0$. Заменяя последовательность эквивалентной, мы можем считать, что $r(x_k) < 0$ при всех k . По формуле (2) тогда $\log \|e^{tx_k}\| < 0$ при каждом $t > 0$. Следовательно, $\log \|e^{tx}\| \leq 0$, так что $r(x) \leq 0$.

Обратно, пусть $r(x) < 0$. Тогда $\|\mathbb{I} + t_0 x\| < 1$ при некотором $t_0 > 0$. Обозначим через $\mathbb{I}_k$ единицу алгебры A_k . Заменяя последовательность эквивалентной, можно считать, что $\|\mathbb{I}_k + t_0 x_k\| < 1$ при всех k . По формуле (1) тогда $t_0 r(x_k) < 0$.

Последнее утверждение можно доказать, используя формулу (3), однако легко свести дело к числовым абсциссам, и мы ограничимся этим замечанием.

¹⁾Напомним, что $r(a)$ — это числовая абсцисса элемента a (а не спектральный радиус, который обозначается через $|a|$).

Заметим, кроме того, что $|x|$ может оказаться *больше* соответствующего верхнего предела, и это аналогично тому, что последовательность нильпотентов может сходиться по норме к элементу с положительным спектральным радиусом, однако в данном случае пример указать проще: достаточно в качестве A_n взять алгебру всех операторов гильбертова пространства размерности n с отмеченным ортогональным базисом $\{e_k\}$ и рассмотреть в A_n жорданову клетку

$$e_n \rightarrow e_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow 0$$

максимальной размерности.

Пусть X — банахово пространство и $B = B(X)$ — алгебра всех ограниченных операторов $S: X \rightarrow X$, снабженная стандартной операторной нормой.

Пусть $T \in B(X)$, причем $|T| < \|T\|$. Фиксируем такую константу c , что $|T| < c$, и введем в X новую норму по формуле

$$\|x\| = \sup_{k \geq 0} c^{-k} \|T^k x\|.$$

Легко видеть, что это определение корректно, что новая норма эквивалентна исходной и что $\|x\| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$. Хотя новая норма зависит от T и c , мы не будем снабжать ее дополнительными индексами.

Легко проверить, что $\|Sx\| \leq \|S\| \cdot \|x\|$ для всех $x \in X$, если $S \in Z(T)$. Следовательно, в таком случае $\|S\| \leq \|S\|$, где $\|S\|$ — операторная норма, порожденная новой нормой на X .

Пусть Y — еще одно банахово пространство. При замене исходной нормы в X на новую и сохранении нормы в Y нормы операторов $X \rightarrow Y$ не возрастают. В частности, это относится к нормам линейных функционалов на X .

ЛЕММА 7. (а) Если $S \in Z(T)$ и $\|Sx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$, то и $\|Sx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$.

(б) $\|T\| \leq c$.

(с) Если $c \leq \|T\|$, то $\|T\| = c$.

(д) Если оператор T нормален в исходной норме, то он нормален и в новой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (а) и (б) тривиальны. Докажем утверждение (с). Если $c = \|T\|$, то, как легко видеть, $\|x\| = \|x\|$ при всех $x \in X$ и доказывать нечего. Поэтому будем считать, что $c < \|T\|$. Но в этом случае найдется такой вектор $x_0 \in X$, что $\|x_0\| < c^{-1} \|Tx_0\|$. Легко проверить, что тогда $\|x_0\| = c^{-1} \|Tx_0\|$, так что $\|T\| \geq c$ (а обратное неравенство содержится в п. (б)). Наконец, пусть T — оператор, нормальный в исходной норме. Тогда $\operatorname{Re} T$ эрмитов, так что $\|e^{it \operatorname{Re} T}\| = 1$ при всех вещественных t . Согласно утверждению (а), это свойство сохранится и в новой норме, т. е. $\operatorname{Re} T$ остается эрмитовым. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение (д) обобщается: если S нормален и $S \in Z(T)$, то S нормален и в новой норме. К доказательству надо добавить только одно: установить, что $\operatorname{Re} S \in Z(T)$. Но этот факт является весьма частным случаем обобщенной (см., например, [9]) теоремы Путнама–Фуглде: оператор, коммутирующий с нормальным, коммутирует и с сопряженным.

Рассмотрим последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ банаховых алгебр с общей единицей. Для простоты норма элемента из A_{n+1} предполагается не меньшей, чем норма этого элемента в A_n . Алгебра $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_1^\infty A_n$ снабжается

стандартной топологией проективного предела. В этой топологии $\mathbf{A}$ — полная метризуемая локально выпуклая алгебра.

Для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ имеет смысл экспонента $e^{\mathbf{x}}$, причем $\mathbf{u}(t) = e^{t\mathbf{x}}$ является единственным решением задачи Коши $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{x}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(0) = \mathbb{I}$.

Линейный непрерывный оператор $\mathbf{D}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ называется дифференцированием, если $\mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{y} = (\mathbf{D}\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{x}(\mathbf{D}\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$. Заметим, что формула Лейбница (с учетом порядка сомножителей) сохраняется.

Приведенное ниже рассуждение аналогично тем, которые обычно используются в теории возмущений¹⁾.

ЛЕММА 8. Для каждого непрерывного дифференцирования $\mathbf{D}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, каждого $t \in \mathbb{R}$ и каждого натурального n

$$\mathbf{D}^n e^{t\mathbf{x}} = \sum_1^n \binom{n}{k} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{x}} (\mathbf{D}^k \mathbf{x}) (\mathbf{D}^{n-k} e^{\tau\mathbf{x}}) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{v} = \mathbf{D}^n \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = e^{t\mathbf{x}}$. Тогда $\mathbf{v}(0) = 0$ и

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \sum_1^n \binom{n}{k} (\mathbf{D}^k \mathbf{x}) (\mathbf{D}^{n-k} \mathbf{u}).$$

Так как $\mathbf{u}$ обратим, мы можем искать $\mathbf{v}$ в виде $\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{z}$. Для $\dot{\mathbf{z}}$ получается явное представление, и остается учесть, что $\mathbf{z}(0) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если дополнительно $\mathbf{D}^2 \mathbf{x} = 0$, то

$$\mathbf{D}^n e^{t\mathbf{x}} = n \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{x}} (\mathbf{D}\mathbf{x}) (\mathbf{D}^{n-1} e^{\tau\mathbf{x}}) d\tau. \quad (7)$$

Разумеется, при $n = 1$ формула (7) — частный случай леммы 8, так что дополнительного условия $\mathbf{D}^2 \mathbf{x} = 0$ не требуется.

Следующий пример наиболее важен для дальнейшего. Пусть A — банахова алгебра, m — натуральное число и $\mathbf{A} = \text{Hol}(\mathbb{C}^m, A)$ — алгебра всех целых A -значных функций от $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$. Мы снабжаем алгебру $\mathbf{A}$ поточечными операциями и топологией равномерной сходимости на компактах. Ясно, что к алгебре $\mathbf{A}$ применима лемма 8. Вместе с тем сужение $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}|_{\mathbb{R}^m}$ — алгебраический изоморфизм, и мы можем рассматривать $\mathbf{A}$ как алгебру A -значных функций на $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{C}$ и

$$\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \dots + \zeta_m \frac{\partial}{\partial \lambda_m}.$$

Тогда $\mathbf{D}$ — непрерывное дифференцирование алгебры $\mathbf{A}$. Пусть $a_1, \dots, a_m \in A$ и $\mathbf{x} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$. Очевидно, что $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{D}^2 \mathbf{x} = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_1, \dots, a_m \in H(A)$. Тогда при вещественных λ_k , комплексных ζ_k и натуральных n имеет место неравенство

$$\left\| \left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \dots + \zeta_m \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \right)^n e^{i(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m)} \right\| \leq \| \zeta_1 a_1 + \dots + \zeta_m a_m \|^n.$$

¹⁾ На такое рассуждение (для $n = 1$), существенно более короткое и прозрачное, чем мое первоначальное (использовавшее формулу Далецкого–Троттера), в свое время указал мне В. Я. Лин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (7) по индукции легко получается, что при всех $t > 0$ имеет место неравенство $\|\mathbf{D}^n e^{it\mathbf{x}}\| \leq t^n \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^n$, в котором остается взять $t = 1$.

§3. Схема изменения функции $c(\tau)$

Обозначим через T множество (треугольник) всех таких точек $(\tau, \omega) \in \mathbb{R}^2$, что

$$1 \leq \tau \leq \omega \leq 2.$$

Ясно, что относительно покомпонентной операции $\xi \oplus \eta$ это множество составляет компактную абелеву полугруппу.

Схема изменения $c(\tau)$

Обозначим через W совокупность всех таких точек $(\tau, \omega) \in \mathbb{R}^2$, координаты которых допускают реализацию $\tau = v(x)$, $\omega = \|x\|$, где x — разложимый элемент (хотя бы одной) банаховой алгебры, для которого $\|x^*\| = 2$.

Если $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\alpha$, то найдется такой нормальный элемент x , что $v(x) = \alpha$ и $\|x\| = \|x^*\| = \beta$. Действительно, можно считать, что $\beta = 2$. Если при этом $\alpha = 1$, то в качестве x можно взять оператор D в пространстве $\mathbf{B}_1(Q)$ (с исходной нормой, см. конец §1). При $\alpha > 1$ вместе с этим элементом x достаточно рассмотреть элемент α в одномерной алгебре $\mathbb{C}$ и применить к $x \oplus \alpha$ лемму 5.

Сопоставляя этот факт с леммой 6, легко убедиться, что W — замкнутый идеал в T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если точка $\xi \in W$ реализуется нормальным элементом и $\eta \in T$, то из сказанного выше вытекает, что $\xi \oplus \eta$ также реализуется нормальным элементом. На самом деле, как будет доказано в следующем параграфе, каждая точка из W реализуется нормальным элементом, однако для доказательства этого факта нам придется использовать утверждение, содержащееся в предыдущей фразе.

Основная характеристика, с которой мы будем иметь дело, — это функция $c(\tau)$ на отрезке $1 \leq \tau \leq 2$, которая определяется равенством

$$c(\tau) = \inf\{\omega \mid (\tau, \omega) \in W\}.$$

Так как W — замкнутое подмножество в T , то нижняя грань достигается. Далее, легко убедиться, что если $c(\tau_0) = \tau_0$ при некотором $\tau_0 \geq 1$, то $c(\tau) = \tau$ при всех $\tau \geq \tau_0$.

В дальнейшем через τ_0 мы будем обозначать *наименьшее из всех таких τ , для которых $c(\tau) = \tau$* .

ЛЕММА 9. *На интервале $(1, \tau_0)$ функция $c(\tau)$ не возрастает.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < \tau_1 < \tau_0$. Тогда $\tau_1 < \omega_1 = c(\tau_1)$. Отрезок, соединяющий точки (τ_1, ω_1) и (ω_1, ω_1) , содержится в W . Поэтому $c(\tau) \leq \omega_1$ всюду на отрезке (τ_1, ω_1) .

ЗАМЕЧАНИЕ. Последняя лемма приобретет смысл, когда мы докажем, что $\tau_0 > 1$, т.е. что $c(1) > 1$.

Так как множество W замкнуто, легко убедиться, что функция $c(\tau)$ непрерывна справа. На самом деле она непрерывна и $c(\tau) < c(1)$ при $1 < \tau \leq \tau_0$, но для доказательства этих утверждений потребуются дополнительные средства. Приведенная выше схема дает некоторое представление об изменении $c(\tau)$. На этой схеме масштабы в левом нижнем углу примерно в 10 раз больше, чем в правом верхнем). Некоторые элементы этой схемы будут обоснованы только в §5.

§4. Функциональная модель

Приводимые ниже утверждения естественно объединяются в функциональный критерий включения $(\tau, \omega) \in W$. Однако если вставить в формулировку сопутствующие обстоятельства, то она удлинится и теряет прозрачность. Поэтому мы разделяем ее на несколько отдельных утверждений. Как и выше, мы используем формальные переменные z и $\bar{z}$, так что $u = u(z, \bar{z})$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $x \neq 0$ — разложимый элемент алгебры A . Тогда существует такая функция $u \in \mathbf{B}_\tau(Q)$, где $\tau = v(x)$, что $\|D^k u\| \leq \|x\|^k$ при всех $k \geq 0$ и $(D^*u)(0, 0) = \|x^*\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = a_1 + ia_2$, где $a_1 = \operatorname{Re} x$. Рассмотрим функцию $F(\lambda) = e^{i(\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2)}$ от $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ со значениями в A . Пусть $\lambda = \xi + i\eta$, так что, например, $\xi_1 = \operatorname{Re} \lambda_1$.

Из теоремы 1 вытекает, что $\|D^k F(\xi)\| \leq \|x\|^k$.

Далее, $i(\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2) = a + ib$, где $a = -\eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$, $b = \xi_1 a_1 - \xi_2 a_2$ и оба элемента эрмитовы. Ясно (см. начало §1), что $\|e^{a+ib}\| \leq e^{r(a+ib)} \leq e^{v(a)}$. Пусть $\psi \in \operatorname{St}(A)$. Тогда $|\psi(a)| \leq (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2} (\psi(a_1)^2 + \psi(a_2)^2)^{1/2}$, так что $v(a) \leq |\eta|v(x)$. Иначе говоря, $\|F(\lambda)\| \leq \tau |\operatorname{Im} \lambda|$. Наконец, ясно, что $(D^*F)(0, 0) = ix^*$.

Таким образом, в качестве искомого u можно взять $\chi \circ F$, где $\chi \in A^*$, $\|\chi\| = 1$ и $\chi(ix^*) = \|x^*\|$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если к u применить операцию P , введенную в §1, то получится функция с аналогичными свойствами вида $\bar{z}f(r)/r$, где f — нечетная вещественная функция из $\mathbf{B}_\tau$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $(\tau, \omega) \in T$, и пусть $u \in \mathbf{B}_\tau(Q)$, причем $(D^*u)(0, 0) = 2$ (или ≥ 2) и $\|D^k u\| \leq \omega^k$ при всех целых $k \geq 0$. Тогда найдется такой нормальный элемент x , что $v(x) = \tau$, $\|x\| = \omega$ и $\|x^*\| = 2$, т.е. (τ, ω) принадлежит W и реализуется нормальным элементом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \leq \tau < \omega < 2$. Снабдим пространство $\mathbf{B}_\tau(Q)$ нормой $\|v\|$, введенной перед леммой 7,

$$\|v\| = \sup_{k \geq 0} \omega^{-k} \|D^k v\|.$$

Тогда $v(D) = \tau$ и $\|D\| = \omega$.

На алгебре операторов пространства $\mathbf{B}_\tau(Q)$ с исходной нормой рассмотрим функционал $\chi(L) \stackrel{\text{def}}{=} (Lu)(0, 0)$. Ясно, что $\|\chi\| = 1$. Поэтому $\|\chi\| \leq 1$. Так как $\chi(D^*) \geq 2$, то $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \|D^*\| \geq 2$.

Итак, мы построили такой нормальный элемент x , что $v(x) = \tau$, $\|x\| = \omega$ и $\|x^*\| = \lambda \geq 2$. Теперь воспользуемся замечанием из начала §3 и предшествующими ему рассуждениями. Векторы $(2\tau/\lambda, 2\omega/\lambda, 2)$ и (τ, ω, ω) из $\mathbb{R}^3$ оба реализуются нормальными элементами, и потому такую же реализацию имеет и их $\oplus$ -сумма (покоординатный максимум), т. е. $(\tau, \omega, 2)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Все точки из W имеют нормальную реализацию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 \leq \tau \leq \omega \leq 2$. Включение $(\tau, \omega) \in W$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая нечетная вещественная функция $f \in \mathbf{B}_\tau$, что $f'(0) = 1$ и $|t^{n+1}(t^{-1}d/dt)^n(f(t)/t)| \leq \omega^n$ при всех целых $n \geq 0$ и всех вещественных t .

§5. Основные свойства функции $c(\tau)$

Последнее утверждение предыдущего параграфа естественно приводит к рассмотрению последовательности функций $\{f_n\}$, $n \geq 0$, которая формируется следующим образом. Пусть f — нечетная вещественная функция из $\mathbf{B}_\tau$. Положим $f_0 = f$ и

$$f_n(t) = (-1)^n t^{n+1} (t^{-1} d/dt)^n (f(t)/t)$$

при $n \geq 1$. Выбор знака таков, что при $f(t) = \sin t$ в качестве f_n получаются классические функции Риккати–Бесселя $s_n(t) = (\pi t/2)^{1/2} J_{n+1/2}(t)$. Положим $c_n = \|s_n\|$ (суп-норма по $\mathbb{R}$).

Следующая теорема (из которой легко вытекает, что $\gamma < 2$) — один из основных результатов данной работы.

ТЕОРЕМА 4. Величина $c(1)$ представляется (приведенной во введении) формулой

$$c(1) = \max_{t > 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} - \cos t \right\} = 1,06310 \dots \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости будем писать c вместо $c(1)$. Существует такой разложимый элемент x , что $\|x\| = c$, $v(x) = 1$, $\|x^*\| = 2$. Согласно следствию 2 из теоремы 3, найдется такая нечетная вещественная функция $f \in \mathbf{B}_1$, что $\|f_n\| \leq c^n$ (так что, в частности, $\|f\| \leq 1$) и $f'(0) = 1$. Поэтому описание экстремалей в одномерном неравенстве Бернштейна влечет за собой равенство $f(t) = \sin t$. Следовательно, $c = \sup_{n \geq 1} c_n^{1/n}$. Чтобы завершить доказательство теоремы 4, теперь достаточно установить, что справедлива следующая

ЛЕММА 10. Если $n \geq 2$, то $c_n < c_1^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹⁾. Пусть t_n — минимальная положительная критическая точка функции s_n . Хорошо известно, что $|s_n(t)| < c_n = s_n(t_n)$, если $n \geq 1$ и $t \neq t_n$. Кроме того, модули значений в критических точках *строго убывают* при удалении от точки 0 и их предел равен 1.

Хотя функции s_n элементарные, их вид быстро усложняется. Тем не менее простейшие вычислительные средства позволяют установить, что $t_1 = 2,74370 \dots$, что $c_1 = 1,06310 \dots$, а также что $c_2 < c_1^2$ и $c_3 < c_1^3$.

Оценка (4) при $\tau = 1$ и $n \geq 1$ приводит к оценке $c_n \leq \|D^n\| \leq 3n^{1/2}$, из которой легко вытекает, что неравенство $c_n < c_1^n$ достаточно проверить при $n \leq m = 50$. Эту проверку уже можно «поручить» достаточно развитому калькулятору $\dots$. Если воспользоваться связями функций Бесселя с полиномами Лежандра, то можно снизить m до 20. Наконец, можно свести конкретные вычисления до указанного выше минимума ($m = 3$), и в заключение мы кратко опишем, как это сделать.

Пусть Y_ν — функция Неймана. Известно (см., например, [10, с. 491]), что для $\nu \geq 1/2$ функция

$$(t^2 - \nu^2)^{1/2}(J_\nu(t)^2 + Y_\nu(t)^2)$$

при $t \geq \nu$ не убывает и стремится к $2/\pi$. Следовательно, при $t > \nu$

$$((\pi t/2)^{1/2} J_\nu(t))^4 < t^2/(t^2 - \nu^2).$$

Если $\nu > 4$, то первая стационарная положительная точка для $J_\nu(t)$ лежит правее $\nu^{1/2}(\nu + 3)^{1/2}$ (теорема Шафхейтлина [10, с. 536]). Тем более это верно для произведения на $(\pi t/2)^{1/2}$. Кроме того, модуль этого произведения в первой стационарной точке достигает глобального максимума [10, с. 537]. Так как $t^2/(t^2 - \nu^2)$ при $t > \nu$ убывает, то получается, что указанное произведение не превосходит $(1 + \nu/3)^{1/4}$ и потому $s_n^4(t)^4 < (2n + 7)/6$ при $n \geq 4$. Легко убедиться, что при таких n правая часть в последнем неравенстве меньше c_1^{4n} , так что $c_n < c_1^n$. Лемма доказана и тем самым завершено доказательство теоремы 4.

Используя замену $\xi \rightarrow \xi/\tau$, критерий включения $(\tau, \omega) \in W$ можно переформулировать в терминах класса $\mathbf{B}_1(Q)$ или класса $\mathbf{B}_1$ функций одной переменной экспоненциального типа ≤ 1 . В доказательстве следующей теоремы мы используем тот факт, что указанное включение имеет место тогда и только тогда, когда существует такая функция $u \in \mathbf{B}_1(Q)$, что $(D^*u)(0, 0) = 2$ и

$$\|D^k u\| \leq \omega^k / \tau^{k-1} \quad \text{при всех целых } k \geq 0. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 5. *Функция $c(\tau)$ непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать обозначения (и факты) из §3. Достаточно рассмотреть промежуток $(1, \tau_0]$ и проверить непрерывность слева. Пусть $1 < \sigma \leq \tau_0$. Точка σ остается фиксированной.

Пусть u_0 — экстремальная функция из $\mathbf{B}_1(Q)$, отвечающая точке $\tau = 1$ (так что $u_0(z, \bar{z}) = (\bar{z} \sin r)/r$), и u_1 — экстремальная функция, отвечающая точке σ (так что для этой функции выполняются неравенства (9) с $\tau = \sigma$ и $\omega = \omega_1 = c(\sigma)$). При $0 < \varepsilon < 1$ положим $u_\varepsilon = \varepsilon u_0 + (1 - \varepsilon) u_1$. Ясно, что

¹⁾Такие вещи могли быть известны лет 200 назад. Вместе с тем, поскольку речь идет о сравнении значений в переходных зонах, конкретные вычисления становятся почти неизбежными.

$u_\varepsilon \in \mathbf{B}_1(Q)$ и $(D^*u_\varepsilon)(0,0) = 2$. Фиксируем $\delta > 0$ и займемся оценками норм $\|D^k u_\varepsilon\|$.

При $k = 0$ имеем

$$\|u_\varepsilon\| \leq \tau_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon + (1 - \varepsilon)\sigma.$$

Ясно, что $1 < \tau_\varepsilon < \sigma$ и что $\tau_\varepsilon \rightarrow \sigma$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При всех $k \geq 1$ имеет место неравенство $\|D^k u_\varepsilon\| \leq 3k^{1/2}\tau_\varepsilon$. Следовательно, если k_0 достаточно велико, то при $k > k_0$

$$\|D^k u_\varepsilon\| \leq (1 + \delta)^k \omega_1^k / \tau_\varepsilon^{k-1},$$

так как $\tau_\varepsilon < \sigma \leq \omega_1$. Если мы проверим, что такое же неравенство выполняется при всех $k \leq k_0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то получится, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\tau_\varepsilon) \leq (1 + \delta)\omega_1,$$

и теорема будет доказана.

При $k = 0$ неравенство выполняется при всех ε . Рассмотрим для определенности случай $k = 2$. Имеем

$$\|D^2 u_\varepsilon\| \leq \varepsilon c^2(1) + (1 - \varepsilon)\omega_1^2/\sigma \leq (1 + \delta)^2 \omega_1^2 / \tau_\varepsilon,$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало (так как $\tau_\varepsilon \rightarrow \sigma$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; разумеется, $(1 + \delta)^2$ написано для единообразия). При другом k , быть может, придется уменьшить ε , однако эту процедуру достаточно проделать не более k_0 раз. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность глобальных максимумов функций Риккати–Бесселя. Используя известные асимптотики максимумов бесселевых функций (см., в частности, [11, 9.5.24]), нетрудно убедиться, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место эквивалентность $c_n \sim an^{1/6}$. Это наводит на мысль, что последовательность $\{c_n\}$ возрастающая, а последовательность $\{c_n^{1/n}\}$ убывающая. Я не умею этого доказывать. При небольших n оба утверждения подтверждаются вычислениями. В пользу второго утверждения говорит и лемма 10. Более того, если $n > 2$, то $c_n^{1/n} < c_2^{1/2}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить доказательство леммы 10 (однако теоремы Шафхейтлина приводят к цели только при $n > 5$, а остающиеся случаи проверяются при помощи вычислений).

Мы воспользуемся неравенством $c_n^{1/n} < c_2^{1/2}$ при доказательстве следующей теоремы (оно сокращает путь, хотя можно было бы обойтись и без него).

ТЕОРЕМА 6. *Неравенство $c(1 + \varepsilon) < c(1)$ имеет место при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим последовательность $\{f_n\}$, начиная не с $\sin t$, а с $f_0(t) = (\sin t)(\cos \varepsilon t)$. Достаточно убедиться, что при малых $\varepsilon > 0$ и всех $k \geq 0$ будут выполняться неравенства

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbb{R}} |f_k(t)| \leq b^k, \quad \text{где } b < c(1). \quad (10)$$

Ясно, что $2f_0(t) = \sin(1 + \varepsilon)t + \sin(1 - \varepsilon)t$. Пусть $c_2^{1/2} < d < c_1$. Имея в виду отмеченный выше факт, легко усмотреть, что $b_k \leq ((1 + \varepsilon)d)^k$ при $k \geq 2$.

Следовательно, если $0 < \varepsilon < \delta$, где $(1+\delta)d < c_1$, то неравенства (10) с $b = (1+\delta)d$ будут выполняться при $k \geq 2$. Поэтому решающим оказывается случай $k = 1$.

Здесь удобно писать $f_1(t, \varepsilon)$, явно указывая зависимость от параметра ε .

Пусть $t_1 > 0$ — точка первого максимума функции $s_1(t) = f_1(t, 0)$. Мы знаем, что $t_1 \in (2, 3)$. Пусть Δ_1 — интервал длины $2(3 - t_1)$ с центром в точке t_1 . На множестве $\mathbb{R} \setminus \Delta_1$ функция $s_1(t)$ *строго меньше*, чем c_1 , и это свойство сохранится при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Наконец,

$$\left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -t^2 s_1(t) - 2t \sin t < 0,$$

если $t \in \Delta_1$. Поэтому $\sup_t |f_1(t, \varepsilon)| < c_1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, и теорема доказана.

Можно предположить, что на промежутке $[1, \tau_0)$ функция $c(\tau)$ *строго убывает*. Увы, ни доказать это в общем объеме, ни опровергнуть я не умею. Следующее рассуждение показывает, что *в некоторой правой полукрестности точки 1 строгое убывание есть*.

Если $\{f_k\}$ — стандартная последовательность (которая начинается с ограниченной на $\mathbb{R}$ функции f_0 экспоненциального типа), то по индукции легко получается, что

$$f_k(t) = (-1)^k f_0^{(k)}(t) + O(t^{-1}), \quad (11)$$

причем O -член допускает равномерную оценку по f_0 с ограниченными в совокупности экспоненциальными типами и верхними границами модуля на $\mathbb{R}$.

При $1 < \tau < \tau_0$ отметим (какую-нибудь) «экстремальную функцию» $f_{0,\tau}$. Выберем (какую-нибудь) последовательность $\tau \rightarrow 1$ (не будем снабжать τ индексами). Из этой последовательности (по теореме Витали) можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах. Предположим, что мы перешли к подпоследовательности. Тогда имеет место сходимость $f_{0,\tau} \rightarrow f_0$. Легко видеть, что предельная функция — экстремаль, отвечающая значению $\tau = 1$, так что $f_0(t) = \sin t$. Таким образом, если $\tau \rightarrow 1$, то $f_{0,\tau}(z)$ равномерно на компактах сходится к $\sin z$. Из теоремы Вейерштрасса вытекает, что в том же смысле имеет место сходимость $f_{k,\tau} \rightarrow s_k$ при каждом $k \geq 0$.

Сопоставляя этот факт сходимости с оценками (11), мы получим, что для каждого фиксированного k при τ , близких к 1, график функции $f_{0,\tau}$ в своей существенной части почти не отличается от графика функции s_k . Например, для $f_{1,\tau}$ первая положительная стационарная точка будет точкой глобального максимума, а вторая — точкой глобального минимума. Действительно, если бы, например, глобальный максимум распадался при $\tau \rightarrow 1$, то у s'_1 возник бы положительный нуль высокой кратности (а такого нет).

Поэтому доказательство теоремы 6 в том, что касается набора $\{s_k\}$ с $k \leq k_0$, распространяется на $f_{k,\tau}$, если τ достаточно близко к 1. Вместе с тем оценки функций с большими k носили общий характер. Таким образом, при τ , близких к 1, теорема 6 переносится с функции $\sin t$ на все $f_{0,\tau}$, т. е. при таких τ функция $c(\tau)$ строго убывает.

Для константы γ , помимо принципиальной оценки $\gamma < 2$, мы пока не имеем ничего, кроме неравенства $\geq 2/c(1)$ (чуть лучшая оценка снизу на этом пути возможна, но связана с не очень приятными выкладками). Чтобы сколько-нибудь конкретно оценить γ сверху, мы в заключительном параграфе оценим

снизу $\tau_0 = c(\tau_0)$. Заметим, что следствие 2 теоремы 3 приводит к сформулированной во введении экстремальной проблеме в $\mathbf{B}_1$, дающей точное значение константы γ . Однако я не знаю, как выглядит экстремаль.

§6. Оценка снизу, связанная с $c(\tau)$

Значение $c(\tau)$ — это нижняя грань таких ω , для которых существует нечетная вещественная функция $f = f_0 \in \mathbf{B}_1$, удовлетворяющая условиям $f'(0) = 1$ и $\|f_k\| \leq \omega^k / \tau^{k-1}$ при всех целых $k \geq 0$, причем эта нижняя грань реализуется. При $\tau = \tau_0$ имеет место равенство $\omega = \tau$ (здесь $\omega = c(\tau_0)$). Если f — экстремаль, отвечающая этой ситуации, то $\|f_k\| \leq \tau$. Уже неравенство $\|f\| \leq 1$ вместе с равенством $f'(0) = 1$ позволяет (как мы увидим) дать некоторую оценку *снизу* для f_1 на промежутке $(\pi/2, \pi)$. Этот промежуток включает первую стационарную точку функции s_1 , и, добавляя условие $\|f_1\| \leq \tau$, мы получим некоторую конструктивную оценку снизу для τ_0 (и, стало быть, оценку сверху для $\gamma = 2/\tau_0$). Таким образом, как оценка сверху ($\tau_0 < c(1)$), так и оценка снизу основаны на весьма грубых приближениях. Поэтому финальное равенство $\gamma \approx 1,92$ с относительной погрешностью 2% можно расценивать как (относительную) удачу.

Мы начнем с простейшей интерполяционной формулы. Для краткости положим $\lambda_n = \pi/2 + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Иначе говоря, $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_n\}$ — последовательность всех положительных нулей функции $\cos t$. Пусть f — нечетная функция из $\mathbf{B}_1$. Тогда равномерно на компактах имеет место представление

$$\frac{f(z)}{z} = 2 \cos z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(\lambda_n)}{\lambda_n^2 - z^2}. \quad (12)$$

При $z = \lambda_n$ правая часть «по непрерывности» меняется на $f(\lambda_n)/\lambda_n$. Так как $f(t)/t$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то формула (12) вытекает из (достаточно широко понимаемой) теоремы Пифагора.

Пусть ν — мера на оси $\mathbb{R}$, сосредоточенная на множестве Λ , причем $\nu(\{\lambda_n\}) = 2 \cdot (-1)^n / \lambda_n^2$. Тогда $\|\nu\| = 1$ (норма меры — ее полная вариация). Представление (12) можно переписать в интегральной форме:

$$\frac{f(t)}{t} = \int_0^{\infty} K_0(\lambda, t) f(\lambda) \nu(d\lambda), \quad \text{где } K_0(\lambda, t) = \frac{\lambda^2 \cos t}{\lambda^2 - t^2}. \quad (13)$$

Заметим, что мы намеренно пишем интеграл так, как это принято в теории вероятностей. Для «независимой переменной» мы вместо z снова употребляем t , поскольку не собираемся покидать вещественную ось.

Считая теперь, что $f = f_0$, из представления (13) мы получим представление

$$f_1(t) = \int_0^{\infty} K_1(\lambda, t) f(\lambda) \nu(d\lambda), \quad \text{где } K_1(\lambda, t) = t\lambda^2 \left(\frac{\sin t}{\lambda^2 - t^2} - \frac{2t \cos t}{(\lambda^2 - t^2)^2} \right). \quad (14)$$

Нам потребуется несколько элементарных неравенств, которые для удобства ссылок мы оформим в виде лемм. Так как $\cos t < 0$ в промежутке $(\pi/2, \pi)$, то имеет место

ЛЕММА 11. Если $\pi < \alpha < \beta$ и $\pi/2 < t < \pi$, то $K_1(\alpha, t) > K_1(\beta, t)$.

«Теоретическое» доказательство следующей леммы — довольно унылое занятие. Однако, поскольку речь идет об элементарном неравенстве с одной переменной, которое выполняется с некоторым запасом, можно использовать «достаточно продвинутый» калькулятор.

ЛЕММА 12. Если $\pi/2 < t < \pi$, то $K_1(\lambda_1, t) > K_1(\lambda_0, t)$.

Соединяя леммы 11 и 12, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Если $\pi/2 < t < \pi$, то

$$\sup_n K_1(\lambda_n, t) = K_1(\lambda_1, t). \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При других значениях t это, вообще говоря, неверно. Например, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} K_1(\lambda, t) = 1 - 2/\lambda^2$.

ЛЕММА 13. Если $0 \leq t \leq \pi$, то $K_1(\lambda_n, t) \geq 0$ при каждом $n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что в указанном промежутке $g(t) \geq 0$, где $g(t) = (\lambda_0^2 - t^2) \sin t - 2t \cos t$, так что $g'(t) = (\lambda_0^2 - t^2 - 2) \cos t$. Уравнение $g'(t) = 0$ имеет 2 корня в интервале $(0, \pi)$, больший из которых есть $\pi/2$, и в этой точке g имеет минимум, равный 0. Лемма доказана.

Обозначим через μ сосредоточенную на Λ вероятностную меру, которая определяется равенствами $\mu(\{\lambda_n\}) = |\nu(\{\lambda_n\})|$. Можно сказать, что $\mu(d\lambda) = (\sin \lambda) \nu(d\lambda)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\tau > 1$, и пусть f — такая нечетная вещественная функция из $\mathbf{B}_1$, что $\|f\| \leq \tau$ и $f'(0) = 1$. Пусть $f_1(t) = -(t d/dt)(f(t)/t)$. Тогда

$$f_1(t) \leq \tau s_1(t), \quad \text{если } 0 \leq t \leq \pi, \quad (16)$$

и

$$f_1(t) \geq \tau s_1(t) - (\tau - 1)K_1(\lambda_1, t), \quad \text{если } \pi/2 \leq t \leq \pi. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дважды используя формулу (14) и лемму 13, получаем при $0 \leq t \leq \pi$

$$f_1(t) = \int_0^\infty K_1(\lambda, t) f(\lambda) \nu(d\lambda) \leq \tau \int_0^\infty K_1(\lambda, t) \mu(d\lambda) = \tau s_1(t),$$

и неравенство (16) установлено. Далее, если $\pi/2 \leq t \leq \pi$, то

$$\begin{aligned} \tau s_1(t) - f_1(t) &= \sum_{n=0}^\infty K_1(\lambda_n, t) (\tau - (-1)^n f(\lambda_n)) \frac{2}{\lambda_n} \\ &\leq \left(\sup_n K_1(\lambda_n, t) \right) \sum_{n=0}^\infty (\tau - (-1)^n f(\lambda_n)) \frac{2}{\lambda_n} \\ &= K_1(\lambda_1, t) \left(\tau - 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n f(\lambda_n)}{\lambda_n^2} \right) \quad (\text{по формуле (15)}) \\ &= K_1(\lambda_1, t) (\tau - f'(0)) = (\tau - 1)K_1(\lambda_1, t), \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Применим теорему 7 в случае, когда f — экстремаль, отвечающая точке τ_0 . Тогда в дополнение к неравенству (17) выполняется неравенство $\|f_1\| \leq \tau_0$. Поэтому в данном случае неравенство сохранится, если заменить $f_1(t)$ на τ_0 .

Если произвести такую замену и в полученном неравенстве в качестве t взять первую положительную стационарную точку t_1 функции $s_1(t)$, то получится, что

$$\tau_0 \geq K_1(\lambda_1, t_1)/(K_1(\lambda_1, t_1) - c(1) + 1) = 1,0212 \dots$$

Среднее арифметическое правой части с $c(1)$ как раз и приводит к $\gamma \approx 1,92$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonsall F. F., Duncan J.* Complete Normed Algebras. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1973.
2. *Горин Е. А.* Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов. Вестник Харьков. унив., сер. прикл. мат. и мех., **205**, вып. 45, 77–105 (1980).
3. *Ахизер Н. И.* Избранные труды по теории функций и математической физике. Т. 1, 2, Харьков, АКТА, 2001.
4. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, Vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
5. *Gorin E. A.* Estimation of a partial involution in a Banach algebra. Russian J. Math. Phys., **5**, №1, 117–118 (1997).
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. Мир, М., 1975.
7. *Норвидас С. Т.* Об устойчивости дифференциальных операторов в пространствах целых функций. Докл. АН СССР, **291**, вып. 3, 548–581 (1986).
8. *Gorin E. A.* Universal symbols on locally compact Abelian groups. Bull. Polish Acad. Sci., Math., **51**, №2, 199–204 (2003).
9. *Горин Е. А.* Обобщение одной теоремы Фугледе. Алгебра и анализ, **5**, №4, 83–97 (1993).
10. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
11. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям. Наука, М., 1979.

Московский педагогический государственный университет
e-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
28 июня 2005 г.