Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Молчанов, Канонические представления и над-
группы для гиперboloидов, *Функц. анализ и его
прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 48–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:49:32

УДК 517.98

Канонические представления и надгруппы для гиперboloидов*

© 2005. В. Ф. Молчанов

Канонические представления на эрмитовых симметрических пространствах G/K были введены Березиным [1] и Вершиком, Гельфандом и Граевым [2] для целей квантования и квантовой теории поля. Они унитарны относительно некоторого инвариантного нелокального скалярного произведения (форма Березина). Как мы можем сейчас видеть, естественно рассматривать канонические представления в более широком смысле: надо отказаться от условия унитарности и позволить представлениям действовать в более широких пространствах, в частности в пространствах обобщенных функций. Понятие канонического представления (в этом широком смысле) может быть распространено на другие классы полупростых симметрических пространств G/H , в частности на параэрмитовы симметрические пространства [7]. Более того, полезным оказывается рассматривать одновременно несколько пространств G/H_i , возможно с разными H_i , вложенными как открытые G -орбиты в некоторое компактное многообразие Ω , на котором G действует, так что Ω есть замыкание этих орбит.

Во всех этих случаях каноническое представление, обозначим его через R , может быть получено как ограничение на G представления $\tilde{R}$ (неприводимого, как правило) некоторой большей группы («надгруппы») $\tilde{G}$.

В этой работе мы рассматриваем псевдоортогональную группу $G = \mathrm{SO}_0(p, q)$ и гиперboloид $\mathcal{X} = G/H$, где $H = \mathrm{SO}_0(p, q-1)$. В качестве надгруппы мы берем псевдоортогональную группу $\tilde{G} = \mathrm{SO}_0(p+1, q)$. Мы определяем канонические представления $R_{\lambda, \nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, как ограничения на G представлений $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ группы $\tilde{G}$, связанных с конусом, см. [3]. Они действуют на компактном многообразии Ω , которое является прямым произведением двух сфер размерностей p и $q-1$. Это многообразие Ω содержит два экземпляра пространства $\mathcal{X}$ и является их замыканием. Канонические пространства порождают граничные представления группы G , связанные с границей обеих G -орбит $\mathcal{X}$ на многообразии Ω . Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить взаимодействие операторов Ли группы $\tilde{G}$ в $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ (т. е. взаимодействие представления $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$) с операторами, сплетающими канонические представления $R_{\lambda, \nu}$ и представления группы G , связанные с конусом (мы назовем эти операторы преобразованиями Пуассона и преобразованиями Фурье, связанными с каноническими представлениями). Это развивает идею Неретина [12] в модифицированной форме. Такая форма была предложена в работе

*Работа поддержана грантами РФФИ 01-01-0100-а, Минобразования РФ E02-1.0-156, Научной программы «Университеты России» ур.04.01.037 и NWO (Голландской организации научных исследований) 047-008-009.

автора [9], см. также [10]. С другой стороны, эту задачу можно рассматривать как некоторую версию классической задачи о действии группы (алгебры Ли) в базисе, собственном для некоторой подгруппы. Многообещающей является также связь этой задачи с полиномиальным квантованием на параэрмитовых пространствах, см., например, [8].

Интересно отметить, что формулы взаимодействия для элементов из алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, не входящих в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, содержат дифференциальные операторы второго порядка.

В основной части статьи мы рассматриваем общий случай: $p > 1$, $q > 1$. В последнем параграфе мы указываем отличия случаев $p = 1$ или $q = 1$, см. [9–11], от общего случая. Эти случаи оказываются более простыми.

Мы не касаемся здесь задачи разложения канонических и граничных представлений, это будет сделано в другой работе.

Приведем сначала результат для исходного случая — для канонических представлений из [2]. Ограничимся преобразованием Пуассона. Представление $\tilde{R}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, надгруппы $\tilde{G} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (двукратного накрытия группы $\mathrm{SO}_0(3, 1)$) действует в функциях $f(z)$ комплексного переменного z по формуле

$$(\tilde{R}_\lambda(g)f)(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) |\beta z + \delta|^{-2\lambda-4}, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

Каноническое представление R_λ группы $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ — это ограничение представления $\tilde{R}_\lambda$ на G и на функции в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} < 1\}$. Возьмем какой-нибудь базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и дополним его до базиса алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$ матрицами

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Элементарные представления T_σ , $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G действуют в пространстве $\mathscr{D}(S)$ (обозначение $\mathscr{D}(M)$ см. ниже) на единичной окружности $S = \{s : s = e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$ по формуле

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{as + \bar{b}}{bs + \bar{a}}\right) |bs + \bar{a}|^{2\sigma}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Преобразование Пуассона $P_{\lambda, \sigma}$ задается формулой

$$(P_{\lambda, \sigma}\varphi)(z) = (1 - z\bar{z})^{-\lambda-\sigma-2} \int_S |1 - z\bar{s}|^{2\sigma} \varphi(s) ds \quad (ds = dt).$$

Оно сплетает $T_{-\sigma-1}$ и R_λ , так что

$$R_\lambda(X)P_{\lambda, \sigma} = P_{\lambda, \sigma}T_{-\sigma-1}(X), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Для M_k , $k = 1, 2, 3$, имеем

$$\tilde{R}_\lambda(M_k)P_{\lambda, \sigma} = a(\lambda, \sigma)P_{\lambda, \sigma+1} \circ K_\sigma^{(k)} + b(\lambda, \sigma)P_{\lambda, \sigma-1} \circ C^{(k)},$$

где $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ — умножение на $-\cos t$, $\sin t$, -1 соответственно,

$$\begin{aligned} a(\lambda, \sigma) &= \frac{\lambda + \sigma + 2}{(\sigma + 1)(2\sigma + 1)}, & b(\lambda, \sigma) &= \frac{\sigma(\lambda - \sigma + 1)}{2\sigma + 1}, \\ K_\sigma^{(1)}\varphi &= -\cos t \cdot \varphi'' + (2\sigma + 3) \sin t \cdot \varphi' + (\sigma + 1)(\sigma + 2) \cos t \cdot \varphi, \\ K_\sigma^{(2)}\varphi &= \sin t \cdot \varphi'' + (2\sigma + 3) \cos t \cdot \varphi' - (\sigma + 1)(\sigma + 2) \sin t \cdot \varphi, \\ K_\sigma^{(3)}\varphi &= -\varphi'' - (\sigma + 1)^2 \varphi, \end{aligned}$$

а штрих обозначает дифференцирование по t . См. также конец §6.

Введем некоторые обозначения и соглашения.

Мы используем следующее обозначение для характера группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$t^{\lambda, m} = |t|^\lambda (\operatorname{sgn} t)^m, \quad (0.2)$$

где $t \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$. Этот характер зависит от m по модулю 2. Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Если M — многообразие, то $\mathcal{D}(M)$ обозначает пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций на M с комплексными значениями и компактным носителем, снабженное обычной топологией, а $\mathcal{D}'(M)$ обозначает пространство обобщенных функций на M — линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Если представление группы Ли дифференцируемо, то мы используем один и тот же символ для него и для соответствующего представления алгебры Ли этой группы Ли.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — билинейная невырожденная форма на $\mathcal{D}(M)$, инвариантная относительно пары представлений (T, S) группы G , действующих на M :

$$(T(g)F, f) = (F, S(g^{-1})f). \quad (0.3)$$

Тогда мы можем распространить представление T на $\mathcal{D}'(M)$ посредством формулы (0.3), где (F, f) обозначает значение обобщенной функции F на функции $f \in \mathcal{D}(M)$. Это на самом деле расширение, поскольку $\mathcal{D}(M)$ вкладывается в $\mathcal{D}'(M)$, если мы сопоставляем функции $f \in \mathcal{D}(M)$ функционал $h \mapsto (f, h)$ с помощью формы $(\cdot, \cdot)$. Мы сохраняем символ (в данном случае T) для этого расширения.

§1. Псевдоортогональная группа и гиперboloид

Пусть G есть группа $\mathrm{SO}_0(p, q)$ — связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, $n = p + q$, сохраняющих билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 - \dots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \dots + x_n y_n.$$

Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа, и в соответствии с этим считаем, что векторы — это строки.

Пусть K — подгруппа в G , состоящая из элементов g , таких, что $g = IgI$, где $I = \operatorname{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$,

$$\delta_1 = \dots = \delta_p = -1, \quad \delta_{p+1} = \dots = \delta_n = 1. \quad (1.1)$$

Это — максимальная компактная подгруппа в G , она изоморфна $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n , удовлетворяющих соотношению $X' = -IXI$, где штрих означает транспонирование. Базис в $\mathfrak{g}$ образован матрицами $L_{ij} = E_{ij} - \delta_i \delta_j E_{ji}$, $i < j$, где E_{ij} — «матричная единица» (1 на месте (i, j) и 0 на остальных местах).

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы K , а $\mathfrak{p}$ — подпространство, ортогональное $\mathfrak{k}$ относительно формы Киллинга. Базис в $\mathfrak{k}$ образован матрицами L_{ij} с $i < j \leq p$ и $p < i < j$, базис в $\mathfrak{p}$ образован матрицами L_{ij} , $i \leq p < j$.

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает гиперболоид $\{x : [x, x] = 1\}$. Это — однородное пространство группы G относительно сдвигов $x \mapsto xg$. Стационарная подгруппа H точки $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$ есть $\mathrm{SO}_0(p, q-1)$. Мера на $\mathcal{X}$, инвариантная относительно G , в координатах $x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n$ (переменная x_k должна быть опущена) — это

$$dx = |x_k|^{-1} dx_1 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n \quad (1.2)$$

(разные k дают одну и ту же меру).

Пусть U — представление группы G в функциях на $\mathcal{X}$ сдвигами: $(U(g)f)(x) = f(xg)$. Пространство, в котором действует U , будет специально указываться, если нужно.

§2. Представления группы G , связанные с конусом

Напомним [3] некоторый материал о представлениях группы G , связанных с конусом. Мы используем «компактную картину». В основной части текста — в §§2–5 — мы рассматриваем общий случай $p > 1$, $q > 1$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{1/2}$. Пусть S — сечение конуса $\{x : [x, x] = 0\}$, состоящее из точек s , таких, что $|s| = 1$. Оно есть произведение двух единичных сфер $S_1 \subset \mathbb{R}^p$ и $S_2 \subset \mathbb{R}^q$, задаваемых уравнениями $s_1^2 + \cdots + s_p^2 = 1$ и $s_{p+1}^2 + \cdots + s_n^2 = 1$ соответственно. Пусть ds — евклидова мера на S . В качестве локальных координат на S_1 и S_2 возьмем соответственно переменные s_i , $1 \leq i \leq p$, и s_j , $p < j \leq n$, опуская по одной из них для каждой из сфер. Операторы Лапласа–Бельтрами Δ_1 и Δ_2 на S_1 и S_2 задаются формулами

$$\Delta_1 = H_1 - D_1^2 - (p-2)D_1, \quad \Delta_2 = H_2 - D_2^2 - (q-2)D_2,$$

где

$$H_1 = \sum \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}, \quad D_1 = \sum s_i \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad H_2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial s_j^2}, \quad D_2 = \sum s_j \frac{\partial}{\partial s_j}.$$

Нам потребуется *разность* этих операторов

$$\Delta^{(-)} = -\Delta_1 + \Delta_2. \quad (2.1)$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ пространство функций φ из $\mathcal{D}(S)$ четности ε : $\varphi(-s) = (-1)^\varepsilon \varphi(s)$. Представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ так:

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)\varphi)(s) = \varphi(sg/|sg|) \cdot |sg|^\sigma. \quad (2.2)$$

Если σ не целое, то $T_{\sigma, \varepsilon}$ неприводимо и эквивалентно представлению $T_{2-n-\sigma, \varepsilon}$. Билинейная форма

$$(\psi, \varphi)_S = \int_S \psi(s) \varphi(s) ds \quad (2.3)$$

инвариантна относительно пары $(T_{\sigma,\varepsilon}, T_{2-n-\sigma,\varepsilon})$, т. е.

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\psi, \varphi)_S = (\psi, T_{2-n-\sigma,\varepsilon}(g^{-1})\varphi)_S. \quad (2.4)$$

Для $X \in \mathfrak{g}$ это дает

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(X)\psi, \varphi)_S = -(\psi, T_{2-n-\sigma,\varepsilon}(X)\varphi)_S. \quad (2.5)$$

С помощью формулы (2.4) представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ может быть распространено на пространство $\mathscr{D}'_\varepsilon(S)$ обобщенных функций на S четности ε . В обозначениях иногда удобно вместо ε писать другое целое число той же четности.

Выпишем операторы, отвечающие в представлении $T_{\sigma,\varepsilon}$ элементам базиса L_{ij} (эти операторы не зависят от ε , поэтому ε мы опустим):

$$T_\sigma(L_{ik}) = -s_k \frac{\partial}{\partial s_i} + s_i \frac{\partial}{\partial s_k}, \quad L_{ik} \in \mathfrak{k}, \quad (2.6)$$

$$T_\sigma(L_{ik}) = s_k X_i + s_i Y_k + \sigma s_i s_k, \quad L_{ik} \in \mathfrak{p}, \quad (2.7)$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial s_i} - s_i D_1, \quad Y_k = \frac{\partial}{\partial s_k} - s_k D_2. \quad (2.8)$$

Если какая-нибудь переменная s_m не входит в число локальных координат, то производную по ней надо опустить. Обратно, операторы X_i, Y_k ($i \leq p < k$) выражаются через операторы Ли:

$$\sum_k s_k T_\sigma(L_{ik}) = X_i + \sigma s_i, \quad (2.9)$$

$$\sum_i s_i T_\sigma(L_{ik}) = Y_k + \sigma s_k. \quad (2.10)$$

Выпишем операторы, сопряженные операторам X_i, Y_k относительно формы (2.3):

$$X_i^* = -X_i + (p-1)s_i, \quad Y_k^* = -Y_k + (q-1)s_k. \quad (2.11)$$

Для получения этих формул проще всего использовать формулы (2.9), (2.10), затем (2.5) и затем снова (2.9), (2.10). Нам еще потребуется оператор, сопряженный оператору $s_i \Delta^{(-)}$, т. е. оператор $\Delta^{(-)} \circ s_i$. Имеем

$$(s_i \Delta^{(-)})^* = s_i \Delta^{(-)} - 2X_i + (p-1)s_i, \quad i \leq p, \quad (2.12)$$

$$(s_k \Delta^{(-)})^* = s_k \Delta^{(-)} + 2Y_k - (q-1)s_k, \quad k > p. \quad (2.13)$$

§3. Канонические представления на гиперboloиде

Расширим пространство $\mathbb{R}^n$, где действует G , до пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, добавив координату x_0 , и снабдим $\mathbb{R}^{n+1}$ билинейной формой

$$[[x, y]] = -x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \cdots + x_n y_n.$$

Группа $\tilde{G} = \text{SO}_0(p+1, q)$ сохраняет эту форму. Как и раньше, считаем, что $\tilde{G}$ действует на $\mathbb{R}^{n+1}$ справа. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\tilde{G}$.

Напомним еще раз некоторые факты о представлениях группы $\tilde{G}$, связанных с конусом [3]. Обозначения мы адаптируем к нашим целям.

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает конус $\{x : [[x, x]] = 0, x \neq 0\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}(\mathcal{C})$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, обозначает пространство функций класса C^∞ на $\mathcal{C}$ (с комплексными значениями), однородных степени λ , ν , т. е.

$$f(tx) = t^{\lambda, \nu} f(x), \quad x \in \mathcal{C}, t \in \mathbb{R}^*. \quad (3.1)$$

Представление $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ группы $\tilde{G}$ действует сдвигами в $\mathcal{D}_{1-n-\lambda, \nu}$ (из некоторых соображений, впрочем, не принципиальных, мы берем здесь $1 - n - \lambda$, а не λ):

$$(\tilde{R}_{\lambda, \nu}(g)f)(x) = f(xg), \quad x \in \mathcal{C}, g \in \tilde{G}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ положим $\|x\| = (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2)^{1/2}$. Пусть Ω — множество точек u из $\mathcal{C}$, таких, что $\|u\| = 1$. Это прямое произведение единичных сфер из $\mathbb{R}^{p+1}$ и $\mathbb{R}^q$. Пусть du — евклидова мера на Ω .

Функции из $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}(\mathcal{C})$ полностью определяются своими ограничениями на Ω . Эти ограничения образуют пространство $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ функций из $\mathcal{D}(\Omega)$ четности ν . Представление $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ реализуется на $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ так:

$$(\tilde{R}_{\lambda, \nu}(g)f)(u) = f(ug/\|ug\|) \cdot \|ug\|^{1-n-\lambda}. \quad (3.2)$$

Билинейная форма

$$(f, h)_\Omega = \int_\Omega f(u)h(u) du \quad (3.3)$$

инвариантна относительно пары $(\tilde{R}_{\lambda, \nu}, \tilde{R}_{1-n-\lambda, \nu})$:

$$(\tilde{R}_{\lambda, \nu}(g)f, h)_\Omega = (f, \tilde{R}_{1-n-\lambda, \nu}(g^{-1})h)_\Omega. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) позволяет распространить $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$ на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций на Ω четности ν .

Вложим группу G в группу $\tilde{G}$ как подгруппу, сохраняющую координату x_0 . Каноническим представлением $R_{\lambda, \nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G назовем ограничение на G представления $\tilde{R}_{\lambda, \nu}$. Оно действует на $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$, а также распространяется на $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$.

Рассмотрим сечение $\tilde{\mathcal{X}}$ конуса $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $x_0 = 1$. Мы можем отождествить его с гиперboloидом $\mathcal{X}$: точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{X}$ сопоставляем точку $\tilde{x} = (1, x_1, \dots, x_n)$ из $\tilde{\mathcal{X}}$. Ограничим функции из $\mathcal{D}_{1-n-\lambda, \nu}(\mathcal{C})$ на $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$. Мы получим некоторое пространство $\mathcal{D}_{1-n-\lambda, \nu}(\mathcal{X})$ функций на $\mathcal{X}$. Оно содержит $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ и содержится в $C^\infty(\mathcal{X})$. На этом пространстве (а также на $\mathcal{D}(\mathcal{X})$) представление $R_{\lambda, \nu}$ становится представлением U сдвигами.

На пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ представление $R_{\lambda, \nu}$ действует по формуле (3.2) с $g \in G$. Билинейная форма (3.3) инвариантна относительно пары $(R_{\lambda, \nu}, R_{1-n-\lambda, \nu})$.

Группа G имеет три орбиты на Ω относительно действия $u \mapsto ug/|ug|$, а именно, две орбиты $\Omega^+ = \{u : u_0 > 0\}$ и $\Omega^- = \{u : u_0 < 0\}$ размерности $n - 1$ и одну орбиту $\Omega_0 = \{u : u_0 = 0\}$ размерности $n - 2$. Последняя может быть отождествлена с многообразием S из §2: точке $s = (s_1, \dots, s_n)$ из S сопоставляем точку $\hat{s} = (0, s_1, \dots, s_n)$ из Ω_0 . Положим $\Omega' = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Каждая из орбит $\Omega^\pm$ может быть отождествлена с сечением $\tilde{\mathcal{X}}$ и, следовательно, с гиперboloидом $\mathcal{X}$. Отображение строится по прямолинейным образующим конуса: точке

u из Ω сопоставляется точка $\tilde{x} = u/u_0$ из $\tilde{\mathcal{X}}$. Меры на $\mathcal{X}$ и на Ω связаны так:

$$dx = |u_0|^{1-n} du. \quad (3.5)$$

Пусть функция f принадлежит $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$. Ее ограничения $f(u)$ на Ω и $f(x)$ на $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}$ связаны так:

$$f(u) = u_0^{1-n-\lambda,\nu} f(x), \quad x \longleftrightarrow \tilde{x} = u/u_0. \quad (3.6)$$

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ порождает следующие представления $L_{\lambda,\nu}$ и $M_{\lambda,\nu}$, связанные с границей Ω_0 многообразий $\Omega^\pm$ (*граничные представления*).

Пусть f — функция из $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. Рассмотрим ее ряд Тейлора $a_0 + a_1 u_0 + a_2 u_0^2 + \dots$ по степеням u_0 . Здесь $a_m = a_m(f)$ — функции из $\mathcal{D}_{\nu-m}(S)$. Определим отображение $u \mapsto s(u)$ точек u из Ω с $u_0 \neq \pm 1$ на S следующим образом: $s_i(u) = (1 - u_0^2)^{-1/2} u_i$ для $i = 1, \dots, p$ и $s_i(u) = u_i$ для $i = p+1, \dots, n$. Обозначим через $\Sigma_\nu^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1$, пространство обобщенных функций из $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$, имеющих вид

$$\sum_{m=0}^k \varphi_m(s(u)) \delta^{(m)}(u_0),$$

где $\varphi_m \in \mathcal{D}_{\nu-m}(S)$, δ — дельта-функция Дирака на прямой и $\delta^{(m)}$ — ее производные. Пусть $\Sigma_\nu(\Omega) = \bigcup \Sigma_\nu^k(\Omega)$.

Обозначим через $L_{\lambda,\nu}$ ограничение представления $R_{\lambda,\nu}$ на $\Sigma_\nu(\Omega)$. Это представление записывается верхней треугольной матрицей с диагональю $T_{2-n-\lambda+m,\nu-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Для λ общего положения (в частности, $2\lambda \notin \mathbb{Z}$) представление $L_{\lambda,\nu}$ диагонализуемо (диагональ та же).

Пусть $a(f)$ обозначает столбец из коэффициентов Тейлора $a_m(f)$. Представление $M_{\lambda,\nu}$ действует на этих столбцах:

$$M_{\lambda,\nu}(g)a(f) = a(R_{\lambda,\nu}(f)).$$

Оно записывается нижней треугольной матрицей с диагональю $T_{1-n-\lambda-m,\nu-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Для λ общего положения оно диагонализуемо.

§4. Преобразования Пуассона и Фурье

Пространство H -инвариантов в $\mathcal{D}'_\varepsilon(S)$ относительно $T_{\sigma,\varepsilon}$ одномерно, базисом служит обобщенная функция

$$\theta_{\sigma,\varepsilon}(s) = s_n^{\sigma,\varepsilon} = [x^0, s]^{\sigma,\varepsilon} \quad (4.1)$$

или ее вычеты в полюсах по σ (в точках $\sigma \in -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$), см. [4]. Согласно общей схеме [6], этот H -инвариант порождает ядро Пуассона

$$P_{\sigma,\varepsilon}(x, s) = (T_{\sigma,\varepsilon}(g^{-1})\theta_{\sigma,\varepsilon})(s) = [x, s]^{\sigma,\varepsilon},$$

где $x = x^0 g \in \mathcal{X}$, $s \in S$. Это ядро порождает два оператора: преобразование Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon}: \mathcal{D}_\varepsilon(S) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X})$ и преобразование Фурье $F_{\sigma,\varepsilon}: \mathcal{D}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon(S)$, задаваемые формулами

$$(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(x) = \int_S [x, s]^{\sigma,\varepsilon} \varphi(s) ds, \quad (4.2)$$

$$(F_{\sigma,\varepsilon}f)(s) = \int_{\mathcal{X}} [x, s]^{\sigma,\varepsilon} f(x) dx, \quad (4.3)$$

Интегралы абсолютно сходятся при $\operatorname{Re} \sigma > -1$ и продолжаются аналитически по σ до мероморфных функций (с полюсами в тех же точках, что и у $\theta_{\sigma,\varepsilon}$). Оба преобразования — линейные непрерывные операторы, они сплетают $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$ с U и U с $T_{\sigma,\varepsilon}$ соответственно.

Отметим, что для σ общего положения образ преобразования Пуассона плотен в пространстве функций из $C^\infty(\mathcal{X})$ четности ε , собственных для оператора Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{X}$ с собственным значением $\sigma(\sigma + n - 2)$. Всякая функция из $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ восстанавливается по ее компонентам Фурье непрерывной серии ($\operatorname{Re} \sigma = (2 - n)/2$) и первой дискретной серии (по поводу этих серий см. [3]), и имеет место формула Планшереля (см. [5]).

Теперь построим операторы, сплетающие канонические представления $R_{\lambda,\nu}$ и представления $T_{\sigma,\varepsilon}$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{D}_\varepsilon(S)$ рассмотрим ее преобразование Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon}\varphi$ как ограничение на $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ некоторой функции на конусе $\mathcal{C}$ степени однородности $(1 - n - \lambda, \nu)$, см. (3.1), и затем перейдем от $\widetilde{\mathcal{X}}$ к Ω . Для этого в формуле (4.2) мы переписываем $[x, s]$ как $[[\tilde{x}, \overset{\circ}{s}]]$ (см. §3 по поводу $\tilde{x}$ и $\overset{\circ}{s}$) и затем используем соотношение (3.6). Мы получим оператор $P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}: \mathcal{D}_\varepsilon(S) \rightarrow C^\infty(\Omega')$, задаваемый формулой

$$(P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}\varphi)(u) = u_0^{1-n-\lambda-\sigma,\nu-\varepsilon} \int_S [[u, \overset{\circ}{s}]]^{\sigma,\varepsilon} \varphi(s) ds \quad (4.4)$$

(мы используем здесь обозначение (0.2); напомним еще, что для $s \in S$ имеем $[[u, \overset{\circ}{s}]] = -u_1 s_1 - \dots - u_p s_p + u_{p+1} s_{p+1} + \dots + u_n s_n$). Этот оператор сплетает $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$ с $R_{\lambda,\nu}$. Назовем его *преобразованием Пуассона, связанным с каноническим представлением $R_{\lambda,\nu}$* . Здесь мы рассматриваем $R_{\lambda,\nu}$ как ограничение на $\mathcal{D}_\nu^\infty(\Omega')$ (пространство функций из $C^\infty(\Omega')$ четности ν) представления $R_{\lambda,\nu}$, действующего в пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$.

Для K -финитных функций φ и для σ общего положения (в частности, если $2\sigma \notin \mathbb{Z}$) это преобразование Пуассона может быть разложено по степеням u_0 :

$$\begin{aligned} (P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}\varphi)(u) &= u_0^{1-n-\lambda-\sigma,\nu-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma,\varepsilon,k}\varphi)(s(u)) u_0^{2k} \\ &\quad + u_0^{-\lambda+\sigma-1,\nu-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon,k}\varphi)(s(u)) u_0^{2k}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $C_{\sigma,\varepsilon,k}$, $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon,k}$ — некоторые линейные непрерывные операторы в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$. Множители перед рядами в (4.5) дают полюсы преобразования Пуассона по σ , зависящие от λ ; они располагаются в точках

$$\sigma = \lambda - k, \quad \sigma = 2 - n - \lambda + l, \quad (4.6)$$

где $k, l \in \mathbb{N}$ и $k \equiv \nu - \varepsilon$, $l \equiv \nu - \varepsilon \pmod{2}$.

Аналогично, рассмотрим функцию f в формуле (4.3) как ограничение на $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ некоторой функции из $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$, затем переписываем $[x, s]$ как $[[\tilde{x}, \overset{\circ}{s}]]$ и используем формулы (3.6), (3.5). Мы получим интеграл по Ω с множителем $1/2$, поскольку отображение $u \mapsto \tilde{x} = x$ накрывает $\mathcal{X}$ дважды. Отбрасывая этот множитель, мы получим оператор $F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}: \mathcal{D}_\nu(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon(S)$, задаваемый

формулой

$$(F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}f)(s) = \int_{\Omega} [[u, \overset{\circ}{s}]]^{\sigma,\varepsilon} u_0^{\lambda-\sigma,\nu-\varepsilon} f(u) du. \quad (4.7)$$

Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \sigma > -1/2$, $\operatorname{Re}(\lambda \pm \sigma) > -1$ и аналитически продолжается по σ и λ до мероморфной функции. Назовем оператор $F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}$ преобразованием Фурье, связанным с каноническим преобразованием $R_{\lambda,\nu}$. Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $T_{\sigma,\varepsilon}$.

Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$(F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}f, \varphi)_S = (f, P_{1-n-\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}\varphi)_{\Omega}. \quad (4.8)$$

Полюсы преобразования Фурье по σ , зависящие от λ , расположены в точках

$$\sigma = 1 - n - \lambda - k, \quad \sigma = \lambda + 1 + l, \quad (4.9)$$

где k, l такие же, как и выше. Полюсы (4.6) и (4.9) являются простыми для λ общего положения.

§5. Взаимодействие надалгебры с преобразованием Пуассона и Фурье

В этом параграфе мы указываем в явном виде, как взаимодействуют преобразования Пуассона и Фурье $P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}$ и $F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}$ с операторами Ли надгруппы $\tilde{G}$ в представлении $\tilde{R}_{\lambda,\nu}$, т. е. с представлением $\tilde{R}_{\lambda,\nu}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ («надалгебры») группы $\tilde{G}$. Это означает, что мы должны выписать в явном виде композиции $\tilde{R}_{\lambda,\nu} \circ P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}(X)$ и $F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}(X) \circ \tilde{R}_{\lambda,\nu}$, где $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Если $X \in \mathfrak{g}$, то в силу сплетаемости, отмеченной в §4, ответ прост:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\lambda,\nu}(X) \circ P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon} &= P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon} \circ T_{2-n-\sigma,\varepsilon}(X), \\ F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon} \circ \tilde{R}_{\lambda,\nu}(X) &= T_{\sigma,\varepsilon}(X) \circ F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно взять в качестве $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ элементы из $\tilde{\mathfrak{g}}$, дополняющие базис в $\mathfrak{g}$ до базиса в $\tilde{\mathfrak{g}}$. В качестве таких элементов мы возьмем элементы $M_k = E_{0k} + \lambda_k E_{k0}$, $k = 1, \dots, n$. Как и выше, E_{ij} , $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, — матричные единицы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть σ не является полюсом преобразования Пуассона $P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}$. Операторы $\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k)$, $k = 1, \dots, n$, взаимодействуют с этим преобразованием следующим образом:

$$\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k) \circ P_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon} = a(\lambda, \sigma) P_{\lambda,\nu;\sigma+1,\varepsilon+1} \circ K_{\sigma}^{(k)} + b(\lambda, \sigma) P_{\lambda,\nu;\sigma-1,\varepsilon-1} \circ C^{(k)}, \quad (5.1)$$

где

$$a(\lambda, \sigma) = \frac{\lambda + \sigma + n - 1}{(\sigma + 1)(2\sigma + n - 2)}, \quad b(\lambda, \sigma) = \frac{\sigma(\lambda - \sigma + 1)}{2\sigma + n - 2}, \quad (5.2)$$

$$K_{\sigma}^{(k)} = -s_k \Delta^{(-)} + (2\sigma + n)X_k - (\sigma + p)(\sigma + n - 2)s_k, \quad k \leq p,$$

$$K_{\sigma}^{(k)} = s_k \Delta^{(-)} + (2\sigma + n)Y_k - (\sigma + q)(\sigma + n - 2)s_k, \quad k > p,$$

$$C^{(k)} = -\delta_k s_k;$$

$\Delta^{(-)}$, X_k , Y_k , δ_k задаются формулами (2.1), (2.8), (1.1).

(Отметим, что эта теорема дает следующую реализацию представления $\tilde{R}_{\lambda,\nu}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$. Фиксируем σ_0 (общего положения) и $\varepsilon_0 (= 0, 1)$. Рассмотрим пространство последовательностей $\varphi = \{\varphi_\sigma\}$, где $\sigma \in \sigma_0 + \mathbb{Z}$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 + \sigma - \sigma_0 \pmod{2}$ и $\varphi_\sigma \in \mathcal{D}(S)$. На этом пространстве элементы X из $\mathfrak{g}$ действуют диагонально: $\varphi_\sigma \mapsto T_{\sigma,\varepsilon}(X)\varphi_\sigma$, а элементы $M_k \in \tilde{\mathfrak{g}}$ переводят φ в ψ так, что

$$\psi_\sigma = a(\lambda, \sigma - 1)K_{\sigma-1}^{(k)}\varphi_{\sigma-1} + b(\lambda, \sigma + 1)C^{(k)}\varphi_{\sigma+1}.$$

Другие комментарии см. после теоремы 5.2.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично формулам (2.6) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k) &= -u_k \frac{\partial}{\partial u_0} + u_0 \frac{\partial}{\partial u_k}, & k \leq p, \\ \tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k) &= u_k \tilde{X}_0 + u_0 \tilde{Y}_k + (1 - n - \lambda)u_0 u_k, & k > p,\end{aligned}$$

где

$$\tilde{X}_0 = \frac{\partial}{\partial u_0} - u_0 \tilde{D}_1, \quad \tilde{Y}_k = \frac{\partial}{\partial u_k} - u_k \tilde{D}_2, \quad \tilde{D}_1 = \sum u_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \tilde{D}_2 = \sum u_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (5.3)$$

переменные u_0 и u_k входят в число локальных координат на Ω , а суммирование в (5.3) происходит по $i = 0, \dots, p$ и по $j = p + 1, \dots, n$, причем какой-нибудь один индекс i и какой-нибудь один индекс j опущены.

Применим оператор $\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k)$ к функции (4.4). Для краткости введем обозначение

$$A = [[u, \overset{\circ}{s}]] = -\xi + \eta,$$

где

$$\xi = u_1 s_1 + \dots + u_p s_p, \quad \eta = u_{p+1} s_{p+1} + \dots + u_n s_n.$$

Кроме того, для облегчения записи мы опустим индексы ν и ε и не будем упоминать символ m в обозначении (0.2), так что, например, A^σ , $A^{\sigma \pm 1}$, u_0^μ , $u_0^{\mu+1}$ обозначают соответственно $A^{\sigma,\varepsilon}$, $A^{\sigma \pm 1, \varepsilon \pm 1}$, $u_0^{\mu, \nu - \varepsilon}$, $u_0^{\mu+1, \nu - \varepsilon + 1}$ и т.д.

Мы имеем

$$\tilde{R}_\lambda(M_k)(u_0^{1-n-\lambda-\sigma} A^\sigma) = \delta_k \{(1 - n - \lambda - \sigma)u_k u_0^{-n-\lambda-\sigma} A^\sigma + \sigma u_0^{2-n-\lambda-\sigma} A^{\sigma-1}\}.$$

Следовательно,

$$\tilde{R}_\lambda(M_k)P_{\lambda;\sigma}\varphi = \delta_k \{(1 - n - \lambda - \sigma) \cdot \alpha + \sigma \cdot \beta\}, \quad (5.4)$$

где

$$\alpha = u_k P_{\lambda+1;\sigma}\varphi, \quad \beta = P_{\lambda;\sigma-1}(s_k \varphi).$$

С другой стороны, вычислим преобразование Пуассона $P_{\lambda;\sigma+1}$ от функции $s_k \Delta^{(-)}\varphi$.

Поскольку оператор $\Delta^{(-)}$ симметричен относительно формы (2.3), нам надо вычислить $\Delta^{(-)}(s_k A^{\sigma+1})$. Сначала полезно вычислить

$$\Delta^{(-)}A^{\sigma+1} = -(\sigma+1)(\sigma+q-1)A^{\sigma+1} - (\sigma+1)(2\sigma+n-2)A^\sigma \cdot \xi + \sigma(\sigma+1)u_0^2 A^{\sigma-1}.$$

Используя это равенство, получаем для $k \leq p$

$$\begin{aligned}\Delta^{(-)}(s_k A^{\sigma+1}) &= (\sigma+2)(\sigma+p)A^{\sigma+1} \cdot s_k - (\sigma+1)(2\sigma+n)A^\sigma \cdot \eta \cdot s_k \\ &\quad + (2\sigma+2)u_k A^\sigma + \sigma(\sigma+1)u_0^2 A^{\sigma-1} \cdot s_k,\end{aligned}$$

а для $k > p$

$$\begin{aligned}\Delta^{(-)}(s_k A^{\sigma+1}) &= -(\sigma+2)(\sigma+q)A^{\sigma+1} \cdot s_k - (\sigma+1)(2\sigma+n)A^\sigma \cdot \xi \cdot s_k \\ &\quad + (2\sigma+2)u_k A^\sigma + \sigma(\sigma+1)u_0^2 A^{\sigma-1} \cdot s_k.\end{aligned}$$

Следовательно, для $k \leq p$

$$P_{\lambda;\sigma+1}(s_k \Delta^{(-)}\varphi) = -\delta_k(\sigma+2)(\sigma+p) \cdot \gamma - (\sigma+1)(2\sigma+n) \cdot \zeta + (2\sigma+2) \cdot \alpha + \sigma(\sigma+1) \cdot \beta, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma &= P_{\lambda;\sigma+1}(s_k \varphi), \\ \zeta &= u_0^{-n-\lambda-\sigma} \int_S A^\sigma \cdot \eta \cdot s_k \varphi(s) ds, \quad k \leq p, \\ \zeta &= u_0^{-n-\lambda-\sigma} \int_S A^\sigma \cdot \xi \cdot s_k \varphi(s) ds, \quad k > p,\end{aligned}$$

и та же формула справедлива с заменой p на q для $k > p$.

Теперь вычислим преобразование Пуассона $P_{\lambda;\sigma+1}$ от функций $X_k \varphi$ при $k \leq p$ и $Y_k \varphi$ при $k > p$. Для этого надо найти соответственно $X_k^* A^{\sigma+1}$ и $Y_k^* A^{\sigma+1}$. Используя (2.11), получаем

$$\begin{aligned}X_k^* A^{\sigma+1} &= (\sigma+1)A^\sigma(u_k - \eta s_k) + (\sigma+p)A^{\sigma+1} \cdot s_k, \quad k \leq p, \\ Y_k^* A^{\sigma+1} &= -(\sigma+1)A^\sigma(u_k - \xi s_k) + (\sigma+q)A^{\sigma+1} \cdot s_k, \quad k > p.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}P_{\lambda;\sigma+1}(X_k \varphi) &= (\sigma+1) \cdot \alpha - (\sigma+1) \cdot \zeta + (\sigma+p) \cdot \gamma, \quad k \leq p, \\ P_{\lambda;\sigma+1}(Y_k \varphi) &= -(\sigma+1) \cdot \alpha + (\sigma+1) \cdot \zeta + (\sigma+q) \cdot \gamma, \quad k > p.\end{aligned}$$

Выразим отсюда $(\sigma+1) \cdot \zeta$ и подставим в формулу (5.5) для $k \leq p$ и сделаем то же с заменой p на q для $k > p$. Затем выразим α и подставим в (5.4). После приведения подобных членов получим (5.1). $\square$

Из формул (2.11)–(2.13) следует, что сопряженным относительно (2.3) оператором к $K_\sigma^{(k)}$ является $K_{1-n-\sigma}^{(k)}$. В силу условия сопряженности (4.8) мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть σ не является полюсом преобразования Фурье $F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon}$. Операторы $\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k)$ взаимодействуют с этим представлением следующим образом:

$$\begin{aligned}F_{\lambda,\nu;\sigma,\varepsilon} \circ \tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k) &= -a(1-n-\lambda, \sigma) K_{1-n-\sigma}^{(k)} \circ F_{\lambda,\nu;\sigma+1,\varepsilon+1} \\ &\quad - b(1-n-\lambda, \sigma) C^{(k)} \circ F_{\lambda,\nu;\sigma-1,\varepsilon-1}.\end{aligned} \quad (5.6)$$

Обсудим формулы (5.1) и (5.6) и структуру коэффициентов a, b для λ общего положения ($2\lambda \notin \mathbb{Z}$). Мы видим, что для σ общего положения последовательность $\sigma + \mathbb{Z}$ есть своего рода «пространство представления» для представления $\tilde{R}_{\lambda,\nu}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Коэффициенты (5.2) содержат множители

$$\beta_1(\lambda, \sigma) = \sigma + \lambda + n - 1, \quad \beta_2(\lambda, \sigma) = \sigma - \lambda - 1, \quad (5.7)$$

являющиеся линейными функциями от σ , зависящими от λ . В (4.5) показатели множителей перед рядами — это как раз $-\beta_1$ и β_2 .

С другой стороны, эти линейные функции должны запрещать попадание в полюсы преобразования Пуассона, см. формулы (4.6). Следовательно, функция β_1 должна обращаться в нуль в точке $\sigma = 1 - n - \lambda$ (один шаг влево от самой левой точки во второй из последовательностей (4.6)), а функция β_2 должна обращаться в нуль в точке $\sigma = \lambda + 1$ (один шаг вправо от самой правой точки в первой из последовательностей (4.6)). Это объясняет появление множителей (5.7) в формуле (5.1). Функции β_i — это *барьерные функции*. С другой стороны, нули этих функций являются крайними полюсами преобразования Фурье, см. (4.9). Следовательно, каждая из двух последовательностей (4.9) есть своего рода «инвариантное подпространство» для $\tilde{R}_{\lambda,\nu}$. Такое подпространство в самом деле существует: это пространство струй, на котором действует представление $M_{\lambda,\nu}$, см. §3. Как уже было сказано, для λ общего положения это представление диагонализуемо.

Аналогично (двойственным образом) дело обстоит с коэффициентами a , b в соотношении (5.6). Здесь появляются функции

$$\beta_1(1 - n - \lambda, \sigma) = \sigma - \lambda, \quad \beta_2(1 - n - \lambda, \sigma) = \sigma + \lambda + n - 2.$$

Они должны запрещать попадание в полюсы преобразования Фурье (см. (4.9)) и, следовательно, имеют указанный вид. Их нули — крайние полюсы преобразования Пуассона. Следовательно, каждая из последовательностей (4.6) есть «инвариантное подпространство». Такое пространство в самом деле существует: это пространство $\Sigma_\nu(\Omega)$ обобщенных функций, сосредоточенных на S , где действует представление $L_{\lambda,\nu}$, см. §3. Для λ общего положения оно диагонализуемо.

§6. Случаи $p = 1$ и $q = 1$

Случаи $p = 1$ (тогда $q = n - 1$) и $q = 1$ (тогда $p = n - 1$) имеют некоторые отличия от общего случая $p > 1, q > 1$. Для нашей задачи основное отличие заключается в том, что группа K имеет нетривиальный (одномерный) централизатор в $\tilde{\mathfrak{g}}$. Он порожден элементом M_1 для $p = 1$ и M_n для $q = 1$. Это значительно облегчает вычисления в теореме 5.1.

Сейчас эту теорему удобно доказывать так. Например, пусть $p = 1$. Поскольку M_1 коммутирует с $\mathfrak{k}$, операторы $K_\sigma^{(1)}$ и $C^{(1)}$ коммутируют с вращениями из группы K , и их вычисление оказывается значительно проще, чем вычисление операторов в §5. Затем используем соотношение коммутации $[M_1, L_{1k}] = M_k$. Оно дает

$$\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_k) = [\tilde{R}_{\lambda,\nu}(M_1), R_{\lambda,\nu}(L_{1k})],$$

и остается вычислить $K_\sigma^{(k)}$ и $C^{(k)}$ по формулам

$$K_\sigma^{(k)} = K_\sigma^{(1)} T_{2-n-\sigma}(L_{1k}) - T_{1-n-\sigma}(L_{1k}) K_\sigma^{(1)},$$

$$C^{(k)} = C^{(1)} T_{2-n-\sigma}(L_{1k}) - T_{3-n-\sigma}(L_{1k}) C^{(1)}.$$

Такой способ годится и в общем случае $p > 1, q > 1$, однако количество вычислений оказывается не меньше, чем в доказательстве теоремы 5.1 в §5.

Для случаев $p = 1$ и $q = 1$ многообразие $\mathcal{X}$ есть соответственно однополостный гиперboloид и одна пола двуполостного гиперboloида (во втором случае

$\mathcal{X}$ есть пространство Лобачевского размерности $n-1$, это — риманово симметрическое пространство). Многообразие S есть сечение конуса $\{x : [x, x] = 0\}$ гиперплоскостью $x_1 = 1$ для $p = 1$ и $x_n = 1$ для $q = 1$. Оно есть сфера S_2 для $p = 1$ и сфера S_1 для $q = 1$. Пусть Δ_S обозначает оператор Лапласа–Бельтрами на S . Он есть Δ_2 для $p = 1$ и Δ_1 для $q = 1$, так что $\Delta^{(-)} = \Delta_S$ для $p = 1$ и $\Delta^{(-)} = -\Delta_S$ для $q = 1$. Представления группы G , связанные с конусом, нумеруются с помощью $\sigma \in \mathbb{C}$ (без ε). Представление T_σ действует в $\mathcal{D}(S)$ по формуле (2.2), где надо заменить $|sg|$ на $(sg)_1$ при $p = 1$ и на $(sg)_n$ при $q = 1$.

При $p = 1$ пространство H -инвариантов в $\mathcal{D}'(S)$ в представлении T_σ двумерно (за исключением случая $n = 3$, $\sigma = -1, -2, \dots$, когда оно трехмерно), базис образован обобщенными функциями $\theta_{\sigma, \varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$, см. (4.1), или их вычетами. Для теорем 5.1 и 5.2 надо сделать следующие изменения:

$$\begin{aligned} K_\sigma^{(1)} &= -\Delta_S - (\sigma + 1)(\sigma + n - 2), \\ K_\sigma^{(k)} &= s_k \Delta_S + (2\sigma + n)Y_k - (\sigma + n - 1)(\sigma + n - 2)s_k, \quad k \geq 2, \\ C^{(1)} &= 1, \quad C^{(k)} = -s_k, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

При $q = 1$ группа H совпадает с K . Пространство K -инвариантов в $\mathcal{D}(S)$ в представлении T_σ состоит из констант. Представления группы $\tilde{G} = SO_0(n, 1)$, связанные с конусом, нумеруются с помощью $\lambda \in \mathbb{C}$ (без ν). Они действуют в однородных функциях степени однородности λ на поле конуса $\mathcal{C}^+ = \{x : [x, x] = 0, x_n > 0\}$. Многообразие Ω есть сфера — сечение этого конуса гиперплоскостью $u_n = 1$. В $\mathcal{D}(\Omega)$ представления $\tilde{R}_\lambda$ действуют по формуле

$$(\tilde{R}_\lambda(g)f)(u) = f(ug/(ug)_n)(ug)_n^{1-n-\lambda}.$$

Их ограничения на G — это канонические представления R_λ группы G .

Представления Пуассона и Фурье, кроме λ и σ , зависят еще от параметра $\nu = 0, 1$. Мы определяем преобразование Пуассона $P_{\lambda, \nu, \sigma} : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ и преобразование Фурье $F_{\lambda, \nu, \sigma} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ формулами (4.4) и (4.7), в которых надо опустить ε . Заметим, что $[[u, \hat{s}]] \geq 0$ для всех $u \in \Omega$, $s \in S$. Функции из образа преобразования Пуассона имеют четность ν по u_0 , а преобразование Фурье обращается в нуль на функциях противоположной четности. Для теорем 5.1 и 5.2 надо сделать следующие изменения:

$$\begin{aligned} K_\sigma^{(k)} &= s_k \Delta_S + (2\sigma + n)X_k - (\sigma + n - 2)(\sigma + n - 1)s_k, \quad k < n, \\ K_\sigma^{(n)} &= -\Delta_S - (\sigma + 1)(\sigma + n - 2), \\ C^{(k)} &= s_k, \quad k < n, \quad C^{(n)} = -1. \end{aligned}$$

В частности, пусть $p = 2$, $q = 1$. Тогда представление $\tilde{R}_\lambda$ надгруппы $\tilde{G} = SO_0(3, 1)$ действует сдвигами в пространстве $\mathcal{D}_{-\lambda-2}(\mathcal{C}^+)$ функций класса C^∞ и однородных степени $-\lambda-2$ на конусе $\mathcal{C}^+ = \{x : -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, x_3 > 0\}$. Сечение $\mathcal{Z}$ этого конуса плоскостью $x_0 + x_3 = 2$ можно отождествить с $\mathbb{C}$: точке $z = x + iy$ отвечает точка $\zeta = (1 - z\bar{z}, 2x, 2y, 1 + z\bar{z})$ из $\mathcal{Z}$. С другой стороны, пространство $\mathbb{R}^4$ можно реализовать как пространство эрмитовых матриц

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_3 - x_0 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_3 + x_0 \end{pmatrix}.$$

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на нем по формуле $x \mapsto \bar{g}' x g$. Это дает гомоморфизм группы $SL(2, \mathbb{C})$ на группу $SO_0(3, 1)$ с ядром $\{\pm E\}$, так что $\tilde{R}_\lambda$ есть представление и группы $SL(2, \mathbb{C})$. Пространство $\mathcal{D}_{-\lambda-2}(\mathcal{C}^+)$ может быть реализовано как некоторое пространство функций на сечении $\mathcal{Z}$. В этой реализации представление $\tilde{R}_\lambda$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ дается в точности формулой (0.1), так что наша конструкция канонических представлений в случае $p = 2$, $q = 1$ дает канонические представления из [2] (надо еще взять ограничение на круг D).

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических пространствах. Изв. АН СССР, сер. мат., **39**, №2, 363–402 (1975).
2. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций. УМН, **28**, вып. 5, 83–128 (1973).
3. Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Матем. сб., **81**, №3, 358–375 (1970).
4. Молчанов В. Ф. Сферические функции на гиперboloидах. Матем. сб., **99**, No. 2, 139–161 (1976).
5. Молчанов В. Ф. Формула Планшереля для гиперboloидов. Труды МИАН, **147**, 65–85 (1980).
6. Молчанов В. Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 59, ВИНТИ, М., 1990, с. 5–144.
7. Molchanov V. F. Quantization on para-Hermitian symmetric spaces. In: Contemporary Mathematical Physics. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 (Adv. Math. Sci., Vol. 31), Vol. 175, 1996, pp. 81–95.
8. Molchanov V. F., Volotova N. B. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. In: Proc. Tambov Summer School-Seminar “Harmonic analysis on homogeneous spaces” (Aug. 26–31, 1996). Вестник Тамбовского ун-ва., **3**, вып. 1, 65–78 (1998).
9. Molchanov V. F. Canonical representations and overgroups. Preprint Math. Inst. Univ. Leiden, No. MI 2002-05 (2002).
10. Molchanov V. F. Canonical representations and overgroups. In: Lie Groups and Symmetric Spaces. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 (Adv. Math. Sci., Vol. 54), Vol. 210, 2003, pp. 213–224.
11. Molchanov V. F. Canonical representations and overgroups for hyperbolooids of one sheet and Lobachevsky spaces. Acta Appl. Math., **86**, No. 1, 115–129 (2005).
12. Неретин Ю. А. Действие надалгебры в планшерелевском разложении и операторы сдвига в мнимом направлении. Изв. РАН, сер. матем., **66**, №5, 171–182 (2002).

Тамбовский государственный университет
email: molchano@molchano.tstu.ru

Поступило в редакцию
25 ноября 2003 г.