Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Баранов, В. П. Хавин, Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:19:25

Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций*

© 2006. А. Д. БАРАНОВ, В. П. ХАВИН

Посвящается памяти Бориса Яковлевича Левина

§1. Введение и главные результаты

1.1. Пусть Θ — внутренняя функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, т. е. такая ограниченная аналитическая функция в $\mathbb{C}^+$, что $\lim_{y \rightarrow 0+} |\Theta(x + iy)| = 1$ при п. в. $x \in \mathbb{R}$.

Внутренняя функция Θ порождает модельное подпространство

$$K_{\Theta} = H^2 \ominus \Theta H^2$$

пространства Харди $H^2 = H^2(\mathbb{C}^+)$. Эти подпространства (и их аналоги для единичного круга) играют выдающуюся роль в теории функций и в теории операторов (см. [6], [16]), в частности, при построении функциональной модели сжатий гильбертова пространства по Сёкефальви-Надю-Фойашу. Приведем конкретные примеры модельных подпространств. Если $\Theta(z) = \exp(iaz)$, $a > 0$, то $K_{\Theta} = \exp(iaz/2)PW_{a/2}$, где PW_a — пространство Пэли-Винера целых функций экспоненциального типа не выше a , квадратично суммируемых на $\mathbb{R}$.

При $\Theta = B$, где B — произведение Бляшке с нулями z_n кратностей m_n , $n = 1, 2, \dots$, т. е.

$$B(z) = \prod_n e^{i\alpha_n} \left(\frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n} \right)^{m_n}$$

(здесь α_n вещественны, а множители $e^{i\alpha_n}$ обеспечивают сходимость произведения), пространство $K_{\Theta} = K_B$ совпадает с замыканием в $L^2(\mathbb{R})$ линейной оболочки дробей $(z - \bar{z}_n)^{-l}$, $1 \leq l \leq m_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Еще один пример связан с гильбертовыми пространствами целых функций, которые ввел де Бранж (см. [5]). Если внутренняя функция Θ мероморфна во всей плоскости, а z_n — ее нули, повторенные в соответствии с их кратностью, то найдется такая целая функция E с нулями в точках $\bar{z}_n$, что $\Theta = E^*/E$ и, следовательно,

$$|E(z)| > |E(\bar{z})|$$

при $z \in \mathbb{C}^+$ (здесь $E^*(z) = \overline{E(\bar{z})}$). Целые функции, удовлетворяющие последнему неравенству, называются функциями класса Эрмита-Билера (или функциями класса HB).

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты №03-01-00377 и №06-01-00313.

Каждая функция $E \in HB$ порождает пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, состоящее из всех целых функций F , таких, что F/E и F^*/E (точнее, их сужения на $\mathbb{C}^+$) принадлежат классу $H^2 = H^2(\mathbb{C}^+)$. Легко видеть, что отображение $F \mapsto F/E$ есть унитарный оператор из $\mathcal{H}(E)$ на $K_{E^*/E}$, т. е. $K_{E^*/E} = \mathcal{H}(E)/E$ (см., например, [8, Theorem 3.1]).

1.2. Неотрицательную функцию w , заданную на $\mathbb{R}$, мы будем называть *мажорантой*. Мажоранта называется *допустимой для K_Θ* , если найдется ненулевая функция $f \in K_\Theta$, удовлетворяющая п. в. на $\mathbb{R}$ неравенству $|f(x)| \leq w(x)$. Множество всех допустимых мажорант для K_Θ мы обозначаем символом $\text{Adm}(\Theta)$. Очевидное необходимое условие допустимости состоит в сходимости логарифмического интеграла:

$$\mathcal{L}(w) = \int_{\mathbb{R}} \log^+ w^{-1} d\Pi < \infty,$$

где $\log^+ t = \max(\log t, 0)$, а Π — мера Пуассона на $\mathbb{R}$, $d\Pi(t) = \pi^{-1}(1+t^2)^{-1} dt$. В самом деле, $\int_{\mathbb{R}} \log |f| d\Pi > -\infty$ для любой ненулевой функции $f \in H^2$. В разд. 5.1 мы покажем, что это необходимое условие допустимости никогда (т. е. ни для какой функции Θ) не совпадает с достаточным.

Это различие приобретает особый интерес при $\Theta(z) = \exp(iaz)$, $a > 0$. Из него проистекает известная проблема описания допустимых мажорант для пространства Пэли–Винера. В этом важнейшем частном случае широкий класс допустимых мажорант доставляет знаменитая теорема Берлинга–Мальявена [4]: если $\mathcal{L}(w) < \infty$ и функция

$$\Omega = -\log w$$

липицева на $\mathbb{R}$, то w допустима для любого пространства PW_a , $a > 0$. Это один из самых глубоких результатов классического гармонического анализа; в настоящее время известно несколько его доказательств (см. [7], [12], [13] и ссылки на литературу в этих работах).

В систематической форме допустимые мажоранты для модельных подпространств впервые изучались в работах Хавина и Машреги [8], [9], где основным инструментом исследования стало преобразование Гильберта функции Ω . В дальнейшем этот подход (в статье [14] тех же авторов и Ф. Л. Назарова) привел к новому (и, возможно, самому короткому из известных) доказательству теоремы Берлинга–Мальявена. В [8] и [9] была найдена параметризация класса $\text{Adm}(\Theta)$, а также ряд конкретных критериев допустимости для различных Θ .

1.3. В настоящей работе некоторые результаты работ [8], [9] получили завершающую форму. В частности, найдена новая, упрощенная форма параметрической формулы для $\text{Adm}(\Theta)$. Как следствие мы получаем существование минимальных допустимых мажорант для любых функций Θ .

Начнем с общего критерия допустимости, найденного в [8]. Напомним, что преобразование Гильберта $\tilde{g}$ функции $g \in L^1(\Pi)$ определяется так:

$$\tilde{g}(x) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) g(t) dt.$$

Символ $\arg \Theta$ обозначает в дальнейшем главную ветвь аргумента внутренней функции Θ , т. е. $\arg \Theta \in (-\pi, \pi]$. Таким образом, $\arg \Theta$ есть измеримая функция, определенная п. в. на $\mathbb{R}$. Если же Θ мероморфна, то удобнее работать с

непрерывной ветвью ее аргумента. Заметим, что любая мероморфная внутренняя функция Θ может быть представлена в следующем виде:

$$\Theta(z) = \exp(iaz)B(z),$$

где $a \geq 0$, а B — произведение Бляшке, нули которого не имеют конечных предельных точек. В этом случае найдется такая возрастающая функция $\varphi \in C^\infty$, что $\Theta(t) = \exp(i\varphi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, причем φ единственна с точностью до аддитивной постоянной $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$$\varphi'(t) = |\Theta'(t)| = a + 2 \sum_n \frac{m_n \operatorname{Im} z_n}{|t - z_n|^2},$$

где z_n — нули функции B , а m_n — их кратности. В дальнейшем непрерывный аргумент мероморфной внутренней функции Θ мы будем обозначать через φ .

Сформулируем критерий допустимости, полученный в [8], [9] (напомним, что $\Omega = -\log w$).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Omega \in L^1(\Pi)$. Функция w принадлежит $\operatorname{Adm}(\Theta)$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательная функция $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ и внутренняя функция I , такие, что $mw \in L^2(\mathbb{R})$, $\log m \in L^1(\Pi)$ и

$$\arg \Theta + 2\widetilde{\Omega} = 2\log m + \arg I + 2\pi k \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}, \quad (1)$$

где k — измеримая целочисленная функция на $\mathbb{R}$.

Для данной функции Θ формулу (1) можно рассматривать как параметризацию множества $\operatorname{Adm}(\Theta)$. Роль параметров играют функции m , I и k . В §2 мы покажем, что функциональный параметр I можно заменить числовым параметром $\gamma \in \mathbb{R}$. Мы получим упрощенную параметризацию множества $\operatorname{Adm}(\Theta)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Omega \in L^1(\Pi)$. Функция w принадлежит $\operatorname{Adm}(\Theta)$ тогда и только тогда, когда

$$\arg \Theta + 2\widetilde{\Omega} = 2\log m + 2\pi k + \gamma \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}, \quad (2)$$

где m и k такие же, как в теореме 1.1, а γ — вещественная постоянная.

Эта упрощенная параметрическая формула следует из (1) и из того факта, что аргумент любой внутренней функции I можно представить следующим образом:

$$\arg I = 2\log m_1 + 2\pi k_1 + \gamma \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $m_1 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $m_1 \geq 0$, $\log m_1 \in L^1(\Pi)$, а k_1 — измеримая целочисленная функция.

В дальнейшем мы будем подразумевать, что равенства типа (1)–(3) верны п. в. на $\mathbb{R}$.

1.4. Обсудим еще одно интересное следствие формулы (3). Назовем мажоранту $w \in \operatorname{Adm}(\Theta)$ минимальной, если для любой функции $w_1 \in \operatorname{Adm}(\Theta)$ из оценки $w_1 \leq cw$ п. в. на $\mathbb{R}$ следует, что $w_1 \asymp w$, т. е. что $cw \leq w_1 \leq cw$ п. в. на $\mathbb{R}$ для некоторой положительной константы c .

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Минимальная мажоранта существует для любой внутренней функции Θ .

Этот результат будет доказан в §5. Там мы сравним его с результатом работы [8] о существовании минимальных мажорант, в частности, строго положитель-

ных минимальных мажорант (см. теорему 5.6). Мы получим два различных критерия минимальности (предложения 5.4 и 5.6).

1.5. Для приложений теоремы 1.2 нам нужен рабочий признак представимости данной функции f в виде $f = 2\log m + 2\pi k$, где m и k — «параметры», участвующие в формулировке теоремы 1.1. Воспользуемся понятием почти возрастающей функции, введенным в [9].

Рассмотрим возрастающую последовательность $\{d_n\}$, где индекс n пробегает $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$; в первом случае мы считаем, что $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |d_n| = \infty$, а во втором — что $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$, причем во втором случае положим $d_0 = -\infty$. Пусть $I_n = (d_n, d_{n+1})$. Символ $\text{Osc}(f, I)$ будет обозначать колебание функции f на множестве I : $\text{Osc}(f, I) = \sup_{s, t \in I} (f(s) - f(t))$.

Абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f называется *почти возрастающей*, если существует такая возрастающая последовательность $\{d_n\}$ (см. выше), что $f(d_{n+1}) - f(d_n) \asymp 1$, где $n \in \mathbb{Z}$ (или $n \in \mathbb{N}$), и для некоторой константы C

$$\text{Osc}(f, I_n) \leq C, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (или } n \in \mathbb{Z}_+), \quad (4)$$

и

$$\frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} |f'(x) - f'(t)| dt \leq C \quad (5)$$

для п. в. $x \in I_n$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ (или $n \in \mathbb{N}$); $|I|$ обозначает длину промежутка I . В случае односторонней последовательности $\{d_n\}$ мы предполагаем, что f липшицева на $(-\infty, d_1)$. Если $f \in C^1(\mathbb{R})$, то интегральное условие (5) следует из оценок

$$\text{Osc}(f', I_n) \leq C, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (или } n \in \mathbb{Z}_+).$$

Следующая теорема дает достаточное условие представимости по модулю 2π данной функции в виде преобразования Гильберта логарифма ограниченной функции.

ТЕОРЕМА 1.4. *Любая почти возрастающая функция f представима в виде $f = 2\log m + 2\pi k + \gamma$ п. в. на $\mathbb{R}$, где $m \geq 0$, $m \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\log m \in L^1(\Pi)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, а k — измеримая целочисленная функция.*

Эта теорема была доказана в [9] при дополнительном предположении о длинах $|I_n| = d_{n+1} - d_n$:

$$\sum_{d_n d_{n+1} > 0} \frac{|I_n|^2}{d_n d_{n+1}} < \infty$$

(оно выполнено, если длины $|I_n|$ ограничены в совокупности). В теореме 1.4 мы освобождаемся от этого предположения.

1.6. Отметим полезное для приложений следствие теоремы 1.4 (см. [3], где $\text{Adm}(B)$ для мероморфного произведения Бляшке связывается с расположением его нулей).

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Пусть Θ_1, Θ_2 — мероморфные внутренние функции, а φ_1, φ_2 — их непрерывные аргументы. Если функция $\varphi_1 - \varphi_2$ почти возрастает, то $\text{Adm}(\Theta_2) \subset \text{Adm}(\Theta_1)$.*

Еще одно следствие теоремы 1.4 показывает, что если две внутренние (не обязательно мероморфные) функции близки (в известном смысле), то соответствующие классы допустимых мажорант совпадают (см. также предложение 4.2 и следующий за ним пример).

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть Θ_1, Θ_2 — внутренние функции, а ψ_1, ψ_2 — какие-либо ветви их аргументов. Если $\psi_1 - \psi_2 \in L^1(\Pi)$ и

$$(\psi_1 - \psi_2)^\sim \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

то $\text{Adm}(\Theta_1) = \text{Adm}(\Theta_2)$.

В [8], [9] класс $\text{Adm}(\Theta)$ изучался, главным образом, для мероморфных Θ . Структура этого класса хорошо понята в двух ситуациях. В первой аргумент φ растет почти линейно, т. е. $\varphi'(t) \asymp 1$, $t \in \mathbb{R}$ (см. [9]). В этом случае класс $\text{Adm}(\Theta)$ почти совпадает с классом допустимых мажорант для некоторого пространства Пэли–Винера: из следствия 1.5 вытекает, что $\text{Adm}(e^{iaz}) \subset \text{Adm}(\Theta) \subset \text{Adm}(e^{ibz})$ для некоторых a, b , где $b > a > 0$ (см. §4). Второй случай относится к произведениям Бляшке, нули которых расположены достаточно редко у оси $\mathbb{R}$ (например, все нули чисто мнимые). В этом случае существует непрерывная и положительная минимальная мажоранта, причем она единственна (в некотором смысле); см. обсуждение в §5.

В последнем, шестом, параграфе мы устанавливаем двойственную связь между проблемами допустимости мажорант и некоторыми проблемами весовой аппроксимации (см. предложение 6.1).

§2. Параметризация допустимых мажорант

Нам понадобится следующее эквивалентное определение пространства K_Θ : функция f принадлежит пространству K_Θ тогда и только тогда, когда f и Θf принадлежат H^2 (здесь мы рассматриваем Θf как функцию на $\mathbb{R}$ и отождествляем H^2 -функции и их некасательные граничные значения на $\mathbb{R}$).

Напомним, что функция

$$\mathcal{K}_z(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1 - \overline{\Theta(z)}\Theta(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}$$

есть воспроизводящее ядро пространства K_Θ , отвечающее точке $z \in \mathbb{C}^+$, т. е.

$$f(z) = \langle f, \mathcal{K}_z \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f \in K_\Theta.$$

Приведенное выше равенство остается верным для $z = x \in \mathbb{R}$, если функция Θ аналитична в окрестности точки x .

Для неотрицательной функции h , такой, что $\log h \in L^1(\Pi)$, мы определим внешнюю функцию O_h с модулем, равным h п. в. на $\mathbb{R}$, формулой

$$O_h(z) = \exp \left(\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) \log h(t) dt \right), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Заметим, что $O_h = h \exp(i \widetilde{\log h})$ п. в. на $\mathbb{R}$.

Теорема 1.2 немедленно вытекает из следующего результата об аргументах внутренних функций.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Θ — произвольная внутренняя функция. Тогда найдется функция $m \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, такая, что $m \geq 0$ и $\log m \in L^1(\Pi)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и принимающая целые значения функция k , для которых

$$\arg \Theta = 2 \widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Представление (6) равносильно равенству

$$\Theta = e^{i\gamma} \frac{O_m}{\overline{O_m}} \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}. \quad (7)$$

Представления вида (7) возникают во многих задачах теории функций (см. [15]–[17]; в [15] правая часть равенства (7) даже названа вездесущей). Известно следующее стандартное представление внутренней функции Θ в виде отношения внешних функций:

$$\Theta = -\bar{\alpha} \frac{\alpha - \Theta}{\bar{\alpha} - \bar{\Theta}} \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}$$

для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Однако ограниченная внешняя функция $\alpha - \Theta$ не обязательно попадает в H^2 , а нам понадобится, чтобы функция m была ограниченной и квадратично суммируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Достаточно построить такую ограниченную внешнюю функцию f из K_Θ , что функция $\bar{f}\Theta$ тоже внешняя. Тогда $\bar{f}\Theta = e^{i\gamma} O_{|f|}$, откуда

$$\arg \Theta = 2 \widetilde{\log |f|} + 2\pi k + \gamma. \quad (8)$$

Остается положить $m = |f|$.

Построим функцию f с нужными свойствами. Предположим, что найдется число $x_0 \in \mathbb{R}$, такое, что Θ аналитична в круге $|z - x_0| < 1$. Положим

$$f(z) = -2\pi i \mathcal{H}_{x_0}(z) = \frac{1 - \overline{\Theta(x_0)}\Theta(z)}{z - x_0}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Тогда $f \in K_\Theta \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Заметим, что $\operatorname{Re}(1 - \overline{\Theta(x_0)}\Theta) > 0$ в $\mathbb{C}^+$. Как известно, отсюда вытекает, что функция $1 - \overline{\Theta(x_0)}\Theta$ внешняя и, следовательно, функция f также внешняя. Наконец,

$$\overline{f(t)}\Theta(t) = \frac{1 - \Theta(x_0)\overline{\Theta(t)}}{t - x_0} \Theta(t) = -\Theta(x_0)f(t)$$

п. в. на $\mathbb{R}$. Следовательно, $\bar{f}\Theta$ — внешняя функция. Таким образом, в том случае, когда найдется вещественная точка x_0 с указанным выше свойством, теорема доказана.

В общем случае представим функцию Θ как произведение внутренних функций Θ_1 и Θ_2 с сингулярными спектрами в $(-\infty, 0]$ и в $[0, \infty)$ и нулями в $\{\operatorname{Re} z \leq 0\}$ и в $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ соответственно. Следовательно, Θ_1 аналитична в $\{\operatorname{Re} z < 0\}$, в то время как Θ_2 аналитична в $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Применяя приведенные выше рассуждения к Θ_1 и Θ_2 , мы получим

$$\arg \Theta_j = 2 \widetilde{\log m_j} + 2\pi k_j + \gamma_j,$$

где $m_j \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $m_j \geq 0$, $\log m_j \in L^1(\Pi)$, $j = 1, 2$. Сложив эти равенства, мы получаем (6). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. По теореме 1.1 из представления (2) следует включение $w \in \operatorname{Adm}(\Theta)$. Чтобы доказать необходимость, заметим, что, также по теореме 1.1, всякая мажоранта $w \in \operatorname{Adm}(\Theta)$ удовлетворяет равенству

$$\arg \Theta + 2\tilde{\Omega} = 2 \widetilde{\log m} + \arg I + 2\pi k$$

для некоторых m , k и I . По теореме 2.1

$$\arg I = 2 \widetilde{\log m_1} + 2\pi k_1 + \gamma,$$

где $m_1 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\log m_1 \in L^1(\Pi)$, k_1 — целочисленная функция, а $\gamma \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\arg \Theta + 2\tilde{\Omega} = 2 \widetilde{\log(mm_1)} + 2\pi(k + k_1) + \gamma,$$

где $mm_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $mm_1 w \in L^2(\mathbb{R})$, $\log mm_1 \in L^1(\Pi)$. $\square$

§3. Почти возрастающие функции. Доказательство теоремы 1.4

3.1. Мы начнем доказательство теоремы 1.4 со следующей элементарной леммы (дающей несколько иное определение почти возрастающих функций). Мы не приводим доказательство.

ЛЕММА 3.1. Пусть f — почти возрастающая функция. Тогда найдется возрастающая последовательность $\{d_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям (4), (5) и такая, что $f(d_n) \equiv 2\pi n$.

В дальнейшем мы считаем, не умаляя общности, что $d_1 > 0$, а $d_0 < 0$. Положим $I_n = (d_n, d_{n+1})$, $l_n = (d_{n+1} - d_n)/2$ и $c_n = (d_n + d_{n+1})/2$, $n \in \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{N}$, для односторонних последовательностей.

Прежде всего, заметим, что если функция $g \in L^1(\Pi)$ достаточно гладкая в окрестности нуля и $g(0) = 0$, то ее преобразование Гильберта $\tilde{g}$ отличается на постоянную от модифицированного преобразования Гильберта $\check{g}$,

$$\check{g}(x) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t} \right) g(t) dt.$$

Если к тому же g тождественно равна нулю вне некоторого ограниченного промежутка, то $\check{g}$ совпадает с точностью до постоянного слагаемого с $\mathcal{C}(g)$,

$$\mathcal{C}(g)(x) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{x-t} dt.$$

В доказательстве теоремы 1.4 нам понадобится вспомогательная пилообразная функция U со скачками в точках d_n . Рассмотрим сначала отдельный «зуб» u , т. е. положим $u(x) = \pi x \chi_{(-1,1)}(x)$ (χ_E — характеристическая функция множества E). Определим функцию F как $\mathcal{C}(u)$; непосредственное вычисление дает

$$F(x) = \mathcal{C}(u)(x) = -2 + x \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|, \quad x \neq \pm 1.$$

Легко видеть, что функция F четна, ограничена снизу константой -2 и $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)x^{2k}}$ для $|x| > 1$, так что функция $F|_{(1,+\infty)}$ убывает, а функция $F|_{(-\infty,-1)}$ возрастает.

Очевидно, что $\mathcal{C}$ коммутирует со сдвигами независимой переменной и умножением ее на положительные константы. Таким образом, положив

$$u_n(x) = u\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right) = \frac{x - c_n}{l_n} \chi_{I_n}(x),$$

мы получим

$$\mathcal{C}(u_n)(x) = F\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right)$$

и

$$\check{u}_n(x) = \mathcal{C}(u_n)(x) - \mathcal{C}(u_n)(0) = F\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right) - F\left(\frac{c_n}{l_n}\right).$$

Теперь мы положим

$$U = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + U_1.$$

Для односторонней последовательности $\{d_n\}$ мы положим $U(x) = 0$, $x < d_1$. Очевидно, что функция U ограничена на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\tilde{U}$ существует и

$$\tilde{U} = \check{u}_0 + \tilde{U}_1 = \check{u}_0 + \check{U}_1 + C_1 = \mathcal{C}(u_0) + \check{U}_1 + C_2 = \mathcal{C}(u_0) + \sum_{n \neq 0} \check{u}_n + C_2 \quad (9)$$

(последнее равенство вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости).

3.2. Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.4.

ЛЕММА 3.2. *Существуют такие положительные константы A и B , что*

$$\tilde{U}(x) \geq -A - B \log(|x| + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы подробно рассмотрим случай двусторонней последовательности. Для односторонних последовательностей доказательство аналогично. Не умаляя общности, мы считаем, что $x > 0$.

Ряд в формуле (9) сходится равномерно на каждом компактном промежутке в I_n , $n \in \mathbb{Z}$, откуда следует, что функция $\tilde{U}$ непрерывна на $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ и $\lim_{x \rightarrow d_n} \tilde{U}(x) = +\infty$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, функция $\tilde{U}(x)$ ограничена снизу на любом компактном промежутке, и нам остается оценить $\tilde{U}(x)$ для достаточно больших x . Зафиксируем $x > d_1$, $x \neq d_n$, $n \in \mathbb{N}$, и предположим, что $x \in I_k$. Мы можем также считать, что $d_k > e$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= \check{u}_k(x) + \sum_{n: c_n \geq x/2} \check{u}_n(x) + \sum_{n: c_1 \leq c_n < x/2} \check{u}_n(x) + \left(\mathcal{C}(u_0)(x) + \sum_{n \leq -1} \check{u}_n(x) \right) + C_2 \\ &= \check{u}_k(x) + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + C_2. \end{aligned}$$

Оценим отдельно $\check{u}_k(x)$ и σ_j , $j = 1, 2, 3$; мы начнем, однако, с оценки величины $F(c_n/l_n)$. Заметим, что $|c_n| > l_n$, $n \neq 0$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{c_n}{l_n}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{l_n}{c_n}\right)^{2j} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{l_n}{c_n}\right)^{2j} \\ &= -\log\left(1 - \frac{l_n^2}{c_n^2}\right) = \log \frac{c_n^2}{d_n d_{n+1}} < \log \frac{d_{n+1}}{d_n}, \end{aligned} \quad (11)$$

так как $c_n < d_{n+1}$.

Оценка функции $\check{u}_k(x)$. Согласно неравенству (11),

$$F\left(\frac{c_k}{l_k}\right) < \log \frac{d_{k+1}}{d_k} < \log d_{k+1} < \log 2x,$$

если x лежит в правой половине интервала I_k , т.е. $x \geq c_k$. В этом случае

$$\check{y}_k(x) = F\left(\frac{x - c_k}{l_k}\right) - F\left(\frac{c_k}{l_k}\right) > -2 - \log 2 - \log x,$$

так как $F > -2$ всюду. Предположим, что $x \in I_k$ находится слева от c_k , т.е. $d_k < x < c_k$. В этом случае имеются две возможности: (а) $c_k/l_k > 2$; (б) $c_k/l_k \leq 2$. Напомним, что функция F убывает на $(1, +\infty)$; поэтому из (а) вытекает неравенство $F(c_k/l_k) < F(2)$ и

$$\check{y}_k(x) = F\left(\frac{x - c_k}{l_k}\right) - F\left(\frac{c_k}{l_k}\right) > -2 - F(2).$$

Случай (б) требует более аккуратной оценки. Если неравенство (б) выполнено, то $c_k \asymp l_k \asymp d_{k+1}$ или, точнее, $l_k < c_k < 2l_k$, $2l_k < d_{k+1} = c_k + l_k < 3l_k$. Теперь непосредственные вычисления (см. формулу для F) дают

$$\begin{aligned} \check{y}_k(x) &= F\left(\frac{x - c_k}{l_k}\right) - F\left(\frac{c_k}{l_k}\right) \\ &= \frac{c_k}{l_k} \log \frac{d_{k+1} - x}{d_{k+1}} + \frac{c_k}{l_k} \log d_k - \frac{x}{l_k} \log(d_{k+1} - x) - \frac{c_k - x}{l_k} \log(x - d_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим последовательно слагаемые в выражении (12). Поскольку $d_{k+1} - x > l_k$ и $d_{k+1} < 3l_k$, первое слагаемое не меньше, чем $-2 \log 3$; второе слагаемое положительно; третье слагаемое больше, чем

$$-\frac{x}{l_k} \log d_{k+1} > -\frac{x}{3d_{k+1}} \log d_{k+1} > -\frac{x}{3x} \log x = -\frac{\log x}{3}$$

(напомним, что функция $t \mapsto t^{-1} \log t$ убывает на $[e, +\infty)$); наконец, четвертое слагаемое не меньше, чем $-\log x$. Сбрав вместе эти оценки, мы получаем, что в случае (б)

$$\check{y}_k(x) > -A - B \log x \quad (13)$$

для некоторых абсолютных положительных констант A и B .

Оценка суммы σ_1 . Мы покажем, что все слагаемые в сумме σ_1 просто положительны. В самом деле, если $n \neq k$ (что верно для суммы σ_1), то $x \notin I_n$ и $|x - c_n| > l_n$. Если к тому же $c_n \geq x/2$ и $c_n \leq x$, то $1 < c_n/l_n \leq (x - c_n)/l_n$; функция F убывает на $(1, +\infty)$ и, значит,

$$\check{y}_n(x) = F\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right) - F\left(\frac{c_n}{l_n}\right) > 0.$$

Если $c_n > x$, то $-c_n/l_n < (x - c_n)/l_n < -1$, функция $F|_{(-\infty, -1)}$ возрастает и, следовательно,

$$\check{y}_n(x) = F\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right) - F\left(-\frac{c_n}{l_n}\right) > 0$$

(напомним, что F четная).

Оценка суммы σ_2 . Если $x/2 > c_n$, то $x - c_n > c_n > l_n$ и $F((x - c_n)/l_n) > 0$. Мы видим, что

$$\sigma_2 = \sum_{n: c_1 \leq c_n < x/2} \left(F\left(\frac{x - c_n}{l_n}\right) - F\left(\frac{c_n}{l_n}\right) \right) > - \sum_{n: c_1 \leq c_n < x/2} F\left(\frac{c_n}{l_n}\right).$$

Используя неравенство (11) и положив $m = \max\{n : c_n < x/2\}$, мы получим

$$\sigma_2 \geq - \sum_{n: c_1 \leq c_n < x/2} (\log d_{n+1} - \log d_n) = -(\log d_{m+1} - \log d_1) > -\log x + \log d_1, \quad (14)$$

так как $2c_m = d_m + d_{m+1} < x$.

Оценка суммы σ_3 . Мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \mathcal{C}(u_0)(x) + \sum_{n \leq -1} \check{u}_n(x) = \mathcal{C}(u_0)(x) + \sum_{n \leq -1} \frac{x}{\pi} \int_{I_n} \frac{U(t)}{t(x-t)} dt \\ &= F\left(\frac{x - c_0}{l_0}\right) + \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{d_0} \frac{U(t)}{t(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое не меньше, чем -2 , а второе допускает двустороннюю оценку (напомним, что $|U| \leq \pi$): его модуль не превосходит

$$x \int_{-\infty}^{d_0} \frac{dt}{|t|(x-t)} \leq \log x + C, \quad (15)$$

где C зависит только от d_0 .

Сложив вместе оценки (13), (14) и (15), мы получаем искомое утверждение. $\square$

3.3. Теперь мы в состоянии доказать теорему 1.4. Очевидно, что из равенства (9) вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. $\tilde{U}(x) = -2 \log |x - d_n| + \psi_n(x)$, где функция ψ_n непрерывна в окрестности точки d_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пусть f — почти возрастающая функция. По лемме 3.1 найдется последовательность $\{d_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{N}$, такая, что $f(d_n) = 2\pi n$.

Как и выше, мы свяжем с последовательностью $\{d_n\}$ функцию U . Положим

$$g = f - \sum_n (2n+1)\pi \chi_{I_n} \quad \text{и} \quad \tau = g - U.$$

В точках d_n положим $\tau(d_n) = 0$. Тогда τ будет ограниченной непрерывной функцией на $\mathbb{R}$. Более того, по лемме 2.7 из [9] она липшицева на $\mathbb{R}$. Следовательно, согласно хорошо известным свойствам преобразования Гильберта, функция $\tilde{\tau}$ непрерывна и

$$\tilde{\tau}(x) = O(\log |x|), \quad |x| \rightarrow \infty$$

(см., например, [9, Lemma 2.8]).

Из последнего неравенства и леммы 3.2 следует существование положительных констант A и B , таких, что

$$\tilde{g}(x) \geq -A - B \log(|x| + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$m(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\tilde{g}(x))}{\prod_{j=1}^{2K+1} |x - d_{n_j}|}, \quad (16)$$

где $K \in \mathbb{N}$, а d_{n_j} — различные элементы последовательности $\{d_n\}$. Покажем, что для достаточно больших K функция m обладает нужными нам свойствами.

По лемме 3.3 она непрерывна. Более того, если $2K > B/2$, то $m(x) = O(|x|^{-1})$, $x \rightarrow \infty$. Таким образом, $m \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $\log m \in L^1(\Pi)$, так как $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Вычислим преобразование Гильберта функции $\log m$. Легко видеть, что $(\widetilde{\log |t|})(x) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x + \operatorname{const}$, и, следовательно,

$$(\log |t - d_{n_j}|)^\sim(x) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(x - d_{n_j}) + \gamma_j$$

для некоторой вещественной постоянной γ_j . Имеем

$$2\widetilde{\log m}(x) = -\tilde{g}(x) + \pi \sum_{j=1}^{2K+1} \operatorname{sign}(x - d_{n_j}) - 2 \sum_{j=1}^{2K+1} \gamma_j.$$

Из включения $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ вытекает, что $\tilde{g} = -g + \gamma_0$ для некоторой константы γ_0 . Следовательно,

$$2\widetilde{\log m}(x) = g(x) + \pi \sum_{j=1}^{2K+1} (1 + \operatorname{sign}(x - d_{n_j})) - (2K+1)\pi + \gamma,$$

где $\gamma = -\gamma_0 - 2 \sum_{j=1}^{2K+1} \gamma_j$. Поэтому для $x \neq d_n$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - \pi \sum_n (2n+1) \chi_{I_n}(x) = 2\widetilde{\log m}(x) - \pi \sum_{j=1}^{2K+1} (1 + \operatorname{sign}(x - d_{n_j})) \\ &\quad + \pi \left(\sum_n (2n+1) \chi_{I_n}(x) - (2K+1) \right) + \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, $f = 2\widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma$, где k — целочисленная функция. $\square$

§4. Следствия теоремы 1.4. Мажорирование в среднем

4.1. В этом параграфе мы докажем следствия 1.5 и 1.6. Мы также рассмотрим несколько иную задачу о мажорировании, а именно, допустимость относительно L^p -норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.5. Пусть $w \in \operatorname{Adm}(\Theta_2)$. По теореме 1.2

$$\varphi_2 + 2\tilde{\Omega} = 2\widetilde{\log m_1} + 2\pi k_1 + \gamma_1,$$

где $m_1 \geq 0$, $m_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\log m_1 \in L^1(\Pi)$ и $m_1 w \in L^2(\mathbb{R})$, функция k_1 принимает целые значения, а $\gamma_1 \in \mathbb{R}$. В то же время, согласно теореме 1.4, почти возрастающая функция $\varphi_1 - \varphi_2$ допускает представление

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\widetilde{\log m_2} + 2\pi k_2 + \gamma_2.$$

Сложив эти два равенства, мы получим требуемое представление функции $\varphi_1 + 2\tilde{\Omega}$ (отметим, что $m_1 m_2 w \in L^2(\mathbb{R})$). $\square$

Отсюда немедленно вытекает следствие о внутренних функциях с «почти линейным» ростом аргумента.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть Θ — мероморфная внутренняя функция, такая, что $\varphi' \asymp 1$. Тогда найдутся положительные числа a , b , такие, что $\operatorname{Adm}(e^{iaz}) \subset \operatorname{Adm}(\Theta) \subset \operatorname{Adm}(e^{ibz})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что функция $\psi(t) = bt$ будет непрерывным аргументом внутренней функции e^{ibz} . Пусть $c \leq \varphi'(t) \leq C$, $t \in \mathbb{R}$, для некоторых положительных констант c, C . Если $b > C$, то $bt - \varphi(t)$ — возрастающая липшицева, и, следовательно, почти возрастающая функция. Согласно следствию 1.5, $\text{Adm}(\Theta) \subset \text{Adm}(e^{ibz})$. Доказательство второго включения аналогично. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.6. Мы воспользуемся следующим свойством преобразования Гильберта: если g и $\tilde{g}$ принадлежат $L^1(\Pi)$, то $\tilde{\tilde{g}} = -g + \text{const}$. Положим теперь $g = (\psi_2 - \psi_1)^\sim / 2$ и $m_1 = e^{-g}$. Мы имеем

$$\psi_2 - \psi_1 = 2 \widetilde{\log m_1} + \gamma_1,$$

и $m_1 \asymp 1$, так как по условию $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $w \in \text{Adm}(\Theta_1)$. Тогда по теореме 1.2

$$\psi_1 + 2\tilde{\Omega} = 2 \widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma,$$

где $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $m \geq 0$, $mw \in L^2(\mathbb{R})$ и $\log m \in L^1(\Pi)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, а функция k целочисленная. Следовательно,

$$\psi_2 + 2\tilde{\Omega} = 2 \widetilde{\log(mm_1)} + 2\pi k + \gamma + \gamma_1$$

и, таким образом, $w \in \text{Adm}(\Theta_2)$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Следующее предложение объясняет, почему классы допустимых мажорант в следствии 1.6 совпадают (доказательство см. в [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть Θ_1, Θ_2 — мероморфные внутренние функции с непрерывными ветвями аргументов φ_1 и φ_2 . Предположим, что $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^1(\Pi)$ и $(\varphi_1 - \varphi_2)^\sim \in L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда существуют целые функции $E_1, E_2 \in HB$, такие, что $\Theta_1 = E_1^*/E_1$, $\Theta_2 = E_2^*/E_2$ и $|E_1(z)| \asymp |E_2(z)|$, $z \in \overline{\mathbb{C}^+}$. В частности, $\mathcal{H}(E_1) = \mathcal{H}(E_2)$ и соответствующие нормы эквивалентны.

ПРИМЕРЫ. 1. Пусть $\Theta_1(z) = e^{2\pi iz}$, и пусть Θ_2 — произведение Бляшке с нулями $z_n = n + i$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\Theta_l = E_l^*/E_l$, $l = 1, 2$, где $E_1(z) = \exp(-i\pi z)$ и $E_2(z) = \sin \pi(z + i)$. Очевидно, что $|E_1(z)| \asymp |E_2(z)|$, $z \in \overline{\mathbb{C}^+}$, и, значит, $\text{Adm}(\Theta_1) = \text{Adm}(\Theta_2)$.

2. Для внутренней функции Θ_1 и $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < 1$, можно рассмотреть сдвиг по Фростману Θ_2 функции Θ_1 ,

$$\Theta_2 = \frac{\Theta_1 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}\Theta_1}.$$

Тогда п. в. на $\mathbb{R}$ мы имеем

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{1 - \bar{\zeta}\Theta_1}{1 - \bar{\zeta}\Theta_1} = \frac{\bar{h}}{h},$$

где $\widetilde{h} = 1 - \bar{\zeta}\Theta_1$ — внешняя функция из H^∞ и $|h| \asymp 1$. Таким образом, $\psi_1 - \psi_2 = 2 \widetilde{\log |h|}$ при некотором выборе аргументов ψ_1 и ψ_2 функций Θ_1 и Θ_2 . По следствию 1.6 $\text{Adm}(\Theta_1) = \text{Adm}(\Theta_2)$.

4.2. Теперь мы рассмотрим новую задачу о мажорировании, которую можно было бы назвать «мажорирование в среднем». Будем говорить, что мажоранта w L^p -допустима для K_Θ , $p > 0$, если найдется ненулевая функция $f \in K_\Theta$,

такая, что $f/w \in L^p(\mathbb{R})$. В этих терминах наши «старые» допустимые мажоранты (см. разд. 1.2) становятся L^∞ -допустимыми. Из построения функции m в доказательстве теоремы 1.4 (см. формулу (16)) вытекает, что для достаточно большого K мы имеем $m \in L^p(\mathbb{R})$ для всякого данного $p > 0$. Таким образом, верна

ТЕОРЕМА 4.3. *Если функция f почти возрастает, то для всякого $p > 0$ найдутся функция $m \geq 0$, такая, что $\log m \in L^1(\Pi)$ и $m \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и целочисленная функция k , для которых*

$$f = 2 \widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть Θ — мероморфная внутренняя функция. Если $w \in L^\infty(\mathbb{R})$ и функция $\varphi + 2\tilde{\Omega}$ почти возрастает, то w есть L^p -допустимая мажоранта для K_Θ и для всякого $p > 0$.*

§5. Минимальные мажоранты

5.1. Как следствие теоремы 2.1 мы докажем в этом параграфе существование минимальных допустимых мажорант. Напомним, что мажоранта $w \in \text{Adm}(\Theta)$ называется *минимальной*, если $w_1 \asymp w$ п. в. на $\mathbb{R}$ для всякой функции $w_1 \in \text{Adm}(\Theta)$, такой, что $w_1 \leq Cw$.

Мы будем говорить, что внутренняя функция Θ есть *круговая часть* функции g из класса Харди H^1 , если $g = \Theta|g|$ п. в. на $\mathbb{R}$. Нам понадобится следующий результат из [8].

ТЕОРЕМА 5.1. *Если Θ — круговая часть внешней функции $g \in H^1$, то $w = |g|^{1/2}$ — минимальная мажоранта для K_Θ .*

В [8] теорема 5.1 была получена как следствие более сильного результата о минимальности: если g — внешняя функция (не обязательно из H^1), а внутренняя функция Θ есть ее круговая часть, то всякая мажоранта $w_1 \in \text{Adm}(\Theta)$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} w_1 |g|^{-1/2} d\Pi < \infty,$$

п. в. удовлетворяет неравенству $|g|^{1/2} \leq Cw_1$ для некоторой константы $C > 0$ [8, Theorem 5.2]. Здесь мы дадим новое и прямое доказательство теоремы 5.1, основанное на следующей лемме.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $m \geq 0$, $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\log m \in L^1(\Pi)$. Если*

$$2 \widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma = 0 \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}, \quad (17)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, а k — целочисленная функция, то $\text{ess inf}_{\mathbb{R}} m > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (17) и параметрической формулы (2) вытекает, что $mw \in \text{Adm}(\Theta)$ для всякой внутренней функции Θ и всякой функции $w \in \text{Adm}(\Theta)$. В самом деле, если

$$\arg \Theta - 2 \widetilde{\log w} = 2 \widetilde{\log m_1} + 2\pi k_1 + \gamma_1,$$

то

$$\arg \Theta - 2 \widetilde{\log mw} = 2 \widetilde{\log m_1} + 2\pi(k + k_1) + \gamma + \gamma_1$$

и, значит, $mw \in \text{Adm}(\Theta)$.

Положим $\Theta(z) = (z-i)/(z+i)$. В этом случае K_Θ — одномерное пространство, порожденное функцией $f(z) = (z+i)^{-1}$. Таким образом, мажоранта $w(t) = |t+i|^{-1}$ допустима. Поскольку $mw \in \text{Adm}(\Theta)$, мы имеем $m(t)/|t+i| \geq \delta/|t+i|$ п. в. для некоторого $\delta > 0$, откуда следует, что $\text{ess inf}_{\mathbb{R}} m \geq \delta$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть g — внешняя функция из H^1 , такая, что $\Theta|g| = g$ и поэтому $\arg \Theta = \widetilde{\log |g|} + 2\pi k + \gamma$ для некоторой целочисленной функции k . Положим $h = |g|^{1/2}$ и рассмотрим внешнюю функцию O_h с модулем h на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\Theta \overline{O_h} = h \exp(i(\arg \Theta - \widetilde{\log h})) = h \exp(i(\widetilde{\log h} + 2\pi k + \gamma)) = e^{i\gamma} O_h \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}$$

и, таким образом, $O_h \in K_\Theta$. В частности, $h \in \text{Adm}(\Theta)$.

Теперь пусть $mh \in \text{Adm}(\Theta)$, где $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $m \geq 0$ и $\log m \in L^1(\Pi)$. Тогда, согласно формуле (2),

$$\arg \Theta - 2\widetilde{\log mh} = 2\widetilde{\log m_1} + 2\pi k_1 + \gamma_1.$$

Учитывая, что $\arg \Theta = 2\widetilde{\log h} + 2\pi k + \gamma$, мы имеем

$$2\widetilde{\log m} + 2\widetilde{\log m_1} + 2\pi(k + k_1) + \gamma + \gamma_1 = 0.$$

Согласно лемме 5.2, $mm_1 \geq \delta$ п. в. для некоторого $\delta > 0$. Отсюда следует, что $m \geq \delta_1 > 0$ п. в. на $\mathbb{R}$ для некоторого $\delta_1 > 0$, поскольку $m_1 \in L^\infty$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Теперь мы покажем, что всякая внутренняя функция Θ есть круговая часть некоторой внешней H^1 -функции. Поэтому класс $\text{Adm}(\Theta)$ содержит минимальные мажоранты для произвольной функции Θ .

По теореме 2.1 найдется неотрицательная функция $m \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, такая, что $\log m \in L^1(\Pi)$ и

$$\arg \Theta = 2\widetilde{\log m} + 2\pi k + \gamma.$$

Положим $g = e^{i\gamma} O_{m^2}$. Тогда g — внешняя функция из H^1 и $\Theta|g| = g$. Таким образом, условия теоремы 5.1 выполнены. $\square$

ПРИМЕР. Пусть $\Theta(z) = \exp(2iaz)$, $a > 0$, и пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $w(t) = \pi |\mathcal{H}_{x_0}(t)| = \left| \frac{\sin a(t-x_0)}{t-x_0} \right|$ — минимальная мажоранта для K_Θ (см. доказательство теоремы 2.1).

Из следствия 1.3 вытекает, что для всякой внутренней функции Θ класс $\text{Adm}(\Theta)$ существенно меньше, чем класс всех H^2 -мажорант (т. е. неотрицательных L^2 -функций с конечным логарифмическим интегралом).

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть Θ — внутренняя функция. Тогда найдется функция $w \in L^2(\mathbb{R})$, такая, что $\mathcal{L}(w) < \infty$ и $w \notin \text{Adm}(\Theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1.3, у K_Θ есть минимальная мажоранта m_0 . Положим $w_0(t) = (|t|+1)^{-1}$ и $w = w_0 m_0$. Очевидно, что $\mathcal{L}(w) < \infty$, но $w \notin \text{Adm}(\Theta)$. В самом деле, $w \leq m_0$, но неравенство $m_0 \leq Cw$ не выполнено, хотя m_0 — минимальная мажоранта из $\text{Adm}(\Theta)$. $\square$

5.2. Следующее предложение даст нам формулу, параметризующую минимальные мажоранты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть $w \geq 0$ и $\log w \in L^1(\Pi)$. Тогда w — минимальная K_Θ -допустимая мажоранта в том и только в том случае, когда $w \in L^2(\mathbb{R})$

и найдутся функция $w_1 \asymp w$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\Theta = e^{i\gamma} \frac{O_{w_1}}{\overline{O_{w_1}}} \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что из равенства (18) следует равенство $O_{w_1}^2 = e^{-i\gamma} \Theta |O_{w_1}^2|$, и, значит, $e^{-i\gamma} \Theta$ — круговая часть H^1 -функции $O_{w_1}^2$. Теперь минимальность мажоранты w_1 (и w) вытекает из теоремы 5.1.

Обратно, предположим, что w — минимальная мажоранта для K_Θ . Тогда найдется ненулевая функция $f \in K_\Theta$, такая, что $|f| \leq w$ п. в. на $\mathbb{R}$. Мы имеем $w \asymp |f|$, так как w минимальна, и поэтому $w \in L^2(\mathbb{R})$. Согласно критерию допустимости,

$$\arg \Theta - 2 \widetilde{\log m w} = 2\pi k + \gamma$$

для некоторой функции $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $m \geq 0$, $\log m \in L^1(\Pi)$. Мы имеем $m \asymp 1$, так как $m w \leq C w$ и w минимальна. Положим $w_1 = m w$. Тогда

$$\arg \Theta = 2 \widetilde{\log w_1} + 2\pi k + \gamma,$$

что равносильно равенству (18). $\square$

Теорема 5.1 и предложение 5.4 приводят к следующей параметризации множества $\text{Adm}_*(\Theta)$ минимальных мажорант в $\text{Adm}(\Theta)$:

$$\text{Adm}_*(\Theta) = \{w \geq 0 \text{ на } \mathbb{R} : w \asymp w_1, \log w_1 \in L^1(\Pi) \text{ и } \widetilde{\log w_1} = \frac{1}{2} \arg \Theta + \pi k + \gamma\}, \quad (19)$$

где функция k целочисленная, а $\gamma \in \mathbb{R}$. Заметим, что для всего класса $\text{Adm}(\Theta)$ имеется аналогичное описание с дополнительным параметром $\widetilde{\log m}$. К сожалению, параметр k в (19) не вполне «свободный»: он должен иметь вид $\tilde{g}$ для некоторой функции $g \in L^1(\Pi)$, так как $\arg \Theta$ ограничен и, следовательно, имеет такую же форму. В частности, целочисленная функция k может появиться в (19), только если

$$\Pi(\{|k| > a\}) = o(1/a), \quad a \rightarrow \infty$$

(согласно теореме Колмогорова [11]).

5.3. Здесь мы обсудим другой подход к задаче о допустимых мажорантах, применимый в случае мероморфных произведений Бляшке с редкими нулями. В этом случае модельные подпространства тесно связаны с пространствами де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (см. введение).

По следствию 1.3 в классе $\text{Adm}(\Theta)$ всегда есть минимальные мажоранты. Однако такие мажоранты могут иметь вещественные нули (например, мажоранты, построенные в доказательстве теоремы 2.1, обращаются в нуль в вещественных точках, где $\Theta = 1$). Естественно задать следующий вопрос: у каких модельных подпространств есть «строго положительные» (т.е. отделенные от нуля на любом ограниченном промежутке) минимальные мажоранты? Условие $1 \in \mathcal{H}(E)$ оказывается важным для существования положительных минимальных мажорант. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть E — целая функция нулевого экспоненциального типа из класса Эрмита–Билера НВ, и пусть $\Theta = E^*/E$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $1/E \in L^2(\mathbb{R})$;

2) у подпространства K_Θ есть положительная и непрерывная минимальная мажоранта.

В этом случае функция $w = 1/|E|$ будет положительной минимальной мажорантой, причем w — единственная непрерывная положительная минимальная мажоранта для K_Θ с точностью до умножения на функцию $t \asymp 1$.

Эта теорема была доказана в [8] при дополнительном предположении о сходимости ряда $\sum_n |z_n|^{-1} \log |z_n|$ и в [1] при более слабом ограничении $\sum_n |z_n|^{-1} < \infty$. Здесь мы дадим новое и очень короткое доказательство импликации $1 \implies 2$ (доказательство импликации $2 \implies 1$ и единственности непрерывной положительной минимальной мажоранты см. в [8]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5. Пусть $1/E \in L^2(\mathbb{R})$. Поскольку E — функция из класса Эрмита–Билера порядка не выше 1, то она принадлежит классу Поля (см. [5, Chap. 1, Sec. 7]), т. е. $|E(x + iy)|$ возрастает как функция от $y \geq 0$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому из включения $1/E \in L^2(\mathbb{R})$ вытекает включение $1/E \in H^2$. Заметим также, что $\Theta/\overline{E} = 1/E$ на $\mathbb{R}$. Следовательно, $1/E \in K_\Theta$ (см. обсуждение в начале §2).

Мы можем представить функцию $1/E$ в $\mathbb{C}^+$ как $e^{i\gamma} e^{iaz} O_{1/|E|}$ для некоторых $\gamma \in \mathbb{R}$ и $a \geq 0$, так как функция $1/E$ аналитична на $\mathbb{R}$ и не обращается в нуль в $\mathbb{C}^+$. Функция E имеет минимальный тип, и потому

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |E(iy)|}{y} = 0.$$

Следовательно, $a = 0$, а значит, функции $1/E$ и $1/E^2$ внешние. Теперь тот факт, что $1/|E|$ — минимальная мажоранта, вытекает из теоремы 5.1, так как $\Theta/|E|^2 = 1/E^2$ на $\mathbb{R}$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В статьях [1], [10] найдены условия в терминах нулей функции E , обеспечивающие включение $1/E \in L^2(\mathbb{R})$.

5.4. В завершение параграфа мы рассмотрим еще одно описание минимальных мажорант в несколько иных терминах. Для $w \in \text{Adm}(\Theta)$ рассмотрим множество

$$E_w(\Theta) = \{f \in K_\Theta : |f| \leq Cw \text{ п. в. на } \mathbb{R}, \text{ для некоторого } C > 0\}.$$

Очевидно, $E_w(\Theta)$ — линейное подпространство в K_Θ (вообще говоря, незамкнутое).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть $w \in \text{Adm}(\Theta)$. Тогда w — минимальная мажоранта для K_Θ в том и только в том случае, когда пространство $E_w(\Theta)$ одномерно и $w \asymp |f|$ для ненулевой функции $f \in E_w(\Theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_w(\Theta)$ — одномерное подпространство пространства K_Θ и $w \asymp |f|$, где f — ненулевая функция из $E_w(\Theta)$. Если $w_1 \leq Cw$ п. в. и $w_1 \in \text{Adm}(\Theta)$, то найдется ненулевая функция $g \in E_w(\Theta)$, такая, что $|g| \leq w_1$. Следовательно, $w \asymp |g|$ и, таким образом, $w \leq C_1 w_1$ п. в. на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь мажоранта w минимальна. Тогда $w \asymp |f|$ для всякой ненулевой функции $f \in K_\Theta$, такой, что $|f| \leq Cw$ п. в. на $\mathbb{R}$. Предположим, что $\dim E_w(\Theta) \geq 2$. Тогда в пространстве K_Θ существуют такие линейно независимые элементы f_1, f_2 , что $|f_j| \leq w$ п. в., $j = 1, 2$. Выберем комплексные числа α_1, α_2 , $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, такие, что $\alpha_1 f_1(z_0) + \alpha_2 f_2(z_0) = 0$ в некоторой точке

$z_0 \in \mathbb{C}^+$. Легко видеть, что

$$f(z) = \frac{\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)}{z - z_0}$$

будет ненулевым элементом в K_Θ и $|f(t)| \leq C(1 + |t|)^{-1}w(t)$ п.в. на $\mathbb{R}$, а это противоречит минимальности w . $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Фактически мы доказали следующее утверждение о «точных» элементах класса $\text{Adm}(\Theta)$, т.е. о мажорантах вида $|f|$, где f — ненулевая функция из K_Θ : *мажоранта $|f|$ минимальна тогда и только тогда, когда $w \notin \text{Adm}(\Theta)$, где $w(t) = |f(t)|/(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$. Это вытекает из того факта, что либо мажоранта $|f|$ минимальна, либо $\dim E_{|f|}(\Theta) \geq 2$.*

2. Из предположений $w \in \text{Adm}(\Theta)$ и $\dim E_w(\Theta) = 1$ не следует минимальность w . Пусть, например, $\Theta(z) = E^*(z)/E(z)$, где $E(z) = (z + i)^2$. Тогда $1/E \in L^2(\mathbb{R})$, и по теореме 5.5 $w = 1/|E|$ будет минимальной мажорантой для K_Θ . Теперь положим $w_1(t) = \sqrt{|t| + 1}/|E(t)|$. Всякий элемент из K_Θ имеет вид P/E , где P — полином степени не выше 1. Следовательно, $E_w(\Theta) = E_{w_1}(\Theta) = \text{Span}\{1/E\}$. Однако мажоранта w_1 не минимальна.

Следующий критерий минимальности немедленно вытекает из предложения 5.6.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Мажоранта $w \in \text{Adm}(\Theta)$ минимальна для K_Θ тогда и только тогда, когда найдется функция $h_w \in K_\Theta$, такая, что $|h_w| \asymp w$ и для всякой $f \in K_\Theta$, удовлетворяющей неравенству $|f| \leq Cw$ п.в., мы имеем $f = \alpha h_w$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.*

ПРИМЕРЫ. 1. Пусть Θ — мероморфная внутренняя функция. В этом случае мы уже рассмотрели два примера минимальных мажорант. Если E — функция нулевого экспоненциального типа и $1/E \in K_\Theta$, то $|E|^{-1}$ — единственная положительная минимальная мажоранта. В то же время в доказательстве теоремы 2.1 мы видели, что $w(t) = |\mathcal{K}_s(t)|$, $s \in \mathbb{R}$, — минимальная мажоранта для K_Θ (это утверждение следует также из теории де Бранжа; см. [5, Theorem 22]).

Эти две ситуации в определенном смысле «экстремальны». Мажоранта $|E|^{-1}$ имеет наиболее быстрое убывание и не имеет вещественных нулей. С другой стороны, мажоранты вида $|\mathcal{K}_s|$ имеют много вещественных нулей и медленно убывают. Между этими двумя случаями есть широкий класс минимальных мажорант, у которых более медленное убывание компенсируется большим количеством вещественных нулей. В качестве иллюстрации мы приведем еще два примера.

2. Пусть $\Theta = \Theta_1 \Theta_2$. Если w_j — минимальная мажоранта для K_{Θ_j} , $j = 1, 2$, и $w_1 w_2 \in L^2(\mathbb{R})$, то из предложения 5.4 вытекает, что $w_1 w_2$ — минимальная мажоранта для K_Θ . Пусть теперь Θ_j — произведение Бляшке с мнимыми нулями, пусть E_j — соответствующая целая функция класса Эрмита–Билера, и пусть $\mathcal{K}_s^{(j)}$ обозначает воспроизводящее ядро пространства K_{Θ_j} . Тогда мажоранты $|E_1|^{-1}|\mathcal{K}_s^{(2)}|$ и $|E_2|^{-1}|\mathcal{K}_s^{(1)}|$ минимальны для K_Θ .

3. Пусть B — конечное произведение Бляшке степени N . Тогда мажоранта w минимальна для K_B в том и только в том случае, когда

$$w(t) \asymp |P(t)|(1 + |t|)^{-N},$$

где P — полином степени n , $0 \leq n \leq N - 1$, с вещественными нулями; таким образом, $w(t) \asymp |t|^{n-N}$, $|t| \rightarrow \infty$.

§6. Допустимость и аппроксимация

В этом параграфе мы покажем, что допустимость эквивалентна некоторому аппроксимационному свойству мажоранты. Для неотрицательной функции u мы обозначаем через $L^q(u)$ пространство функций f на $\mathbb{R}$, для которых $\int_{\mathbb{R}} |f|^q u < \infty$. Положим $H_-^2 = L^2(\mathbb{R}) \ominus H^2$; заметим, что $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ представляет собой ортогональное дополнение подпространства K_{Θ} в $L^2(\mathbb{R})$.

Предложение 6.1. Пусть $2 \leq p \leq \infty$, пусть $q = p/(p-1)$, и пусть $w \in L^{2p/(p-2)}(\mathbb{R})$ ($w \in L^\infty(\mathbb{R})$ для $p = 2$ и $w \in L^2(\mathbb{R})$ для $p = \infty$). Тогда w будет L^p -допустимой мажорантой для K_{Θ} в том и только в том случае, когда пространство $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ не плотно в $L^q(w^q)$.

Мы выделим частный случай, отвечающий обычной (т. е. L^∞ -) допустимости: неотрицательная L^2 -функция w принадлежит $\text{Adm}(\Theta)$ тогда и только тогда, когда $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ не плотно в $L^1(w)$.

Условие $w \in L^2(\mathbb{R})$ не является существенным ограничением, так как, очевидно, для всякой мажоранты $w \in \text{Adm}(\Theta)$ найдется допустимая мажоранта $w_1 \leq w$ п. в. на $\mathbb{R}$, такая, что $w_1 \in L^2(\mathbb{R})$ (положим $w_1 = |f|$, где $f \in K_{\Theta}$ — ненулевая функция, удовлетворяющая условию $|f| \leq w$).

Доказательство. Рассмотрим пространства $X = L^2(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$ и $Y = L^2(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$. Тогда X можно отождествить с Y^* относительно стандартного спаривания

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_1 \bar{f}_2 + g_1 \bar{g}_2.$$

Положим

$$M = \{(f, f/w) : f \in K_{\Theta}, f/w \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

Очевидно, что мажоранта w не L^p -допустима тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.

Рассмотрим два подпространства пространства Y :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(\psi, -\psi w) : \psi \in L^2(\mathbb{R})\}, \\ S_2 &= (L^2(\mathbb{R}) \ominus K_{\Theta}) \times \{0\} = (H_-^2 \oplus \Theta H^2) \times \{0\}. \end{aligned}$$

Включение $S_1 \subset Y$ вытекает из включения $w\psi \in L^q(\mathbb{R})$ для всех $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, которое, в свою очередь, следует из неравенства Гёльдера с показателями $2/q$, $2/(2-q)$ и предположения $w \in L^{2p/(p-2)}(\mathbb{R})$. Теперь мы можем отождествить M с полярной (в Y^*) множества $S = S_1 + S_2$, и по теореме Хана–Банаха $M = \{0\}$ тогда и только тогда, когда S плотно в Y . Иными словами, w не будет L^p -допустимой мажорантой для K_{Θ} тогда и только тогда, когда для всяких $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ и $h \in H_-^2 \oplus \Theta H^2$, что

$$\|f - \psi - h\|_2 + \|g + w\psi\|_q < \varepsilon. \quad (20)$$

Предположим сначала, что w не L^p -допустима. Тогда, применяя (20) к $f = 0$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, мы видим, что $\|g + w\psi\|_q < \varepsilon$ для некоторой функции $\psi \in H_-^2 \oplus \Theta H^2$. Следовательно, $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ плотно в $L^q(w^q)$.

Чтобы показать обратное, предположим, что $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ плотно в $L^q(w^q)$. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$, и пусть $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in K_\Theta$ и $f_2 \in H_-^2 \oplus \Theta H^2$. Положим $\psi = f_1 + \xi$ и $h = f_2 - \xi$, где функция $\xi \in H_-^2 \oplus \Theta H^2$ будет выбрана позднее. Тогда первая норма в формуле (20) равна нулю. Поскольку $H_-^2 \oplus \Theta H^2$ плотно в $L^q(w^q)$, мы можем выбрать $\xi \in H_-^2 \oplus \Theta H^2$ так, чтобы

$$\|g + wf_1 + w\xi\|_q < \varepsilon$$

для данных $g \in L^q(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Следовательно, w не будет L^p -допустимой мажорантой. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. D. Baranov, “Polynomials in the de Branges spaces of entire functions”, *Ark. Mat.*, **44**:1 (2006), 16–38.
- [2] A. D. Baranov, “Completeness and Riesz bases of reproducing kernels in model subspaces”, *принято к печати в Internat. Math. Res. Notices*, 2006.
- [3] A. D. Baranov, A. A. Borichev, V. P. Havin, “Majorants of meromorphic functions with fixed poles”, *принято к печати в Indiana Univ. Math. J.*
- [4] A. Beurling, P. Malliavin, “On Fourier transforms of measures with compact support”, *Acta Math.*, **107** (1962), 291–309.
- [5] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [6] J. A. Cima, W. T. Ross, *The Backward Shift on the Hardy Space*, Math. Surveys Monographs, vol. 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [7] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Berlin, 1994.
- [8] V. P. Havin, J. Mashreghi, “Admissible majorants for model subspaces of H^2 . Part I: slow winding of the generating inner function”, *Canad. J. Math.*, **55**:6 (2003), 1231–1263.
- [9] V. P. Havin, J. Mashreghi, “Admissible majorants for model subspaces of H^2 . Part II: fast winding of the generating inner function”, *Canad. J. Math.*, **55**:6 (2003), 1264–1301.
- [10] M. Kaltenböck, H. Woracek, “Hermite–Biehler functions with zeros close to the imaginary axis”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:1 (2005), 245–255.
- [11] P. Koosis, *The Logarithmic Integral I*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 12, 1988.
- [12] P. Koosis, *The Logarithmic Integral II*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 21, 1992.
- [13] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Montréal, 1996.
- [14] Дж. Машреghi, Ф. Л. Назаров, В. П. Хавин, “Теорема Берлинга–Мальявена: седьмое доказательство”, *Алгебра и анализ*, **17**:5 (2005), 3–68.
- [15] H. P. McKean, “Some questions about Hardy functions”, in: *Linear and Complex Analysis, Problem Book 3, Part I*, Lecture Notes in Math., vol. 1573 (eds. V. P. Havin, N. K. Nikolski), 1994, 157–158.
- [16] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading*, vol. 1–2, Math. Surveys Monographs, vol. 92–93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [17] В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля и их приложения*, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2005.

Санкт-Петербургский государственный университет
email: havin@VN1621.spb.edu

Поступило в редакцию
15 марта 2006 г.

Санкт-Петербургский государственный университет
email: antonbaranov@netscape.net