Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Н. Я. Кругляк, Устойчивость аппроксимации под действием сингулярных интегральных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:45:37

УДК 517.9

Устойчивость аппроксимации под действием сингулярных интегральных операторов*

© 2006. С. В. Кисляков, Н. Я. Кругляк

Посвящается памяти Бориса Яковлевича Левина

Эта статья безнадежно вещественна, однако у нее есть комплексные истоки. О них нельзя не сказать, учитывая повод, по которому статья написана. Эти истоки лежат в теории интерполяции аналитических пространств Харди и им подобных.

Интерполяция (мы обсуждаем лишь вещественный метод) — это, по существу, наука о разбиении функций в сумму двух слагаемых, величина которых оценивается в разных нормах. Пусть этим нормам соответствуют (квази) банаховы пространства X и Y , и предположим, что все рассматриваемые функции заданы на границе плоской области. Для простоты пусть даже эта область — круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Тогда ее граница — это окружность $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Довольно часто удается корректно ввести «аналитические подпространства» X_A и Y_A в X и Y , состоящие (мы намеренно избегаем точных деталей) из сужений на окружность функций, аналитических в круге. Например, $(L^p(\mathbb{T}))_A$ — это обычный класс Харди $H^p(\mathbb{T})$.

Предположим, что функция f на окружности разбита в сумму, $f = g + h$, где $g \in X$, $h \in Y$. Всегда ли можно заставить слагаемые лежать в пространствах X_A и Y_A , не слишком испортив их нормы, если заранее известно, что f — сужение на границу некоторой функции, аналитической в круге? Иными словами, всегда ли при разложении в сумму можно сохранить аналитичность, не проиграв в оценках?

Дадим точную постановку, относящуюся к более общей ситуации. Пусть (E_0, E_1) — интерполяционная пара, а F_0 и F_1 — замкнутые подпространства в E_0 и E_1 . Пусть $f \in F_0 + F_1$ и имеется разбиение $f = g + h$, где $g \in E_0$, $h \in E_1$. Всегда ли можно найти другое разбиение $f = \tilde{g} + \tilde{h}$, где $\tilde{g} \in F_0$, $\tilde{h} \in F_1$ и $\|\tilde{g}\|_{E_0} \leq C\|g\|_{E_0}$, $\|\tilde{h}\|_{E_1} \leq C\|h\|_{E_1}$ (C не зависит от участвующих векторов)? Если так можно сделать всегда, то пара (F_0, F_1) называется K -замкнутой в паре (E_0, E_1) .

Для пространств аналитических функций K -замкнутость изучалась подробно, начиная с работ Пизье [1], [2]. Как выяснилось, она — явление скорее обычное, чем исключительное (см. [3]–[6] и обзоры [7], [8]). Рассмотрим, например, весовые пространства $L^p_w(\mathbb{T}) = \{f : fw \in L^p(\mathbb{T})\}$, $0 < p \leq \infty$, и соответствующие им аналитические подпространства $(L^p_w(\mathbb{T}))_A = H^p_w(\mathbb{T})$ (от веса требуется лишь суммируемость логарифма; заметим, что вес появляется сам собой при

*Работа поддержана Королевской Шведской академией наук. Исследования первого автора поддержаны РФФИ, грант 05-01-0924.

конформной пересадке в круг невесовых классов H^p из области со спрямляемой границей). В [3] показано, что пара $(H_{w_0}^{p_0}(\mathbb{T}), H_{w_1}^{p_1}(\mathbb{T}))$ K -замкнута тогда и только тогда, когда $\log w_0 w_1^{-1} \in \text{ВМО}$. Последнее условие, кстати, заведомо выполнено при $w_0 = w_1 \equiv 1$, т. е. для обычных пространств $H^p(\mathbb{T})$. Этим дело не ограничивается — если не выдумывать экзотических норм, пара (X_A, Y_A) оказывается K -замкнутой для большинства стандартных пространств Кёте X и Y . Методы, позволяющие все это доказать, разнообразны и относительно просты (см. указанные выше ссылки), однако по своей природе комплексны.

В статье [4] Бургейн предложил чисто вещественный метод доказательства K -замкнутости. Для пространств типа Харди этот метод не дает столь общих результатов — в сущности, он ориентирован лишь на классические пространства $H^p(\mathbb{T})$. Однако он имеет далеко идущие обобщения за пределы теории классов Харди. Остановимся на этом подробнее.

Обозначим через $\mathbb{P}$ проектор Рисса, т. е. ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{P}f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)z^n$, где через $\hat{f}(n)$ обозначен n -й коэффициент Фурье функции f . Общеизвестно, что этот оператор проектирует $L^p(\mathbb{T})$ на $H^p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$, но разрывен при $p = 1$ или $p = \infty$. Поэтому K -замкнутость пары (H^{p_0}, H^{p_1}) в (L^{p_0}, L^{p_1}) очевидна при $1 < p_0 < p_1 < \infty$ (если $f \in H^{p_0} + H^{p_1} = H^{p_0}$ и $f = g + h$, где $g \in L^{p_0}$, $h \in L^{p_1}$, то нужное разложение в сумму аналитических слагаемых дается формулой $f = \mathbb{P}f = \mathbb{P}g + \mathbb{P}h$). Трудности возникают, если $p_0 = 1$, или $p_1 = \infty$, или, тем более, если выполнено и то, и другое. Выясняется, однако, что здесь достаточно рассматривать пары индексов вида $(1, p)$, где $p < \infty$ (бесконечный индекс затем включается в игру с помощью двойственности и других соображений общего характера; см. [5], [7]). Бургейн нашел способ доказать K -замкнутость пары (H^1, H^p) , использующий лишь то обстоятельство, что $\mathbb{P}$ — сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда.

Операторы Кальдерона–Зигмунда встречаются часто, и метод Бургейна применим во всех таких ситуациях. Приведем иллюстративный пример. Прежде, однако, изменим слегка точку зрения. Вопрос о K -замкнутости пары (H^1, H^p) эквивалентен следующему. Пусть $f \in H^1 + H^p = H^1(\mathbb{T})$ (т. е. $f \in L^1(\mathbb{T})$ и $\mathbb{P}f = f$), и пусть $t > 0$. Верно ли, что расстояние (измеренное в L^1) от f до шара радиуса t в L^p реализуется (с точностью до мультипликативной константы) на аналитической функции? Именно в такой форме мы будем ставить задачу в дальнейшем.

Теперь опишем обещанный пример. На пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим суммируемые градиентные векторные поля $F = (f_1, \dots, f_n)$ ($F = \nabla u$ для некоторого распределения u и $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Пусть $t > 0$. Рассмотрим векторные поля G , почти реализующие L^1 -расстояние от F до шара радиуса t в L^p :

$$G \in B_{L^p}(ct), \quad \|F - G\|_{L^1} \leq C \operatorname{dist}_{L^1}(F, B_{L^p}(t)).$$

(Здесь и далее через $B_X(\tau)$ обозначается шар радиуса τ с центром в нуле в банаховом пространстве X .) Найдется ли среди таких полей градиентное?

Ответ положителен и получается так. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ всех квадратично-суммируемых векторных полей на $\mathbb{R}^n$, а в нем — подпространство G градиентных векторных полей. Ортогональный проектор пространства $\mathcal{H}$ на G нетрудно выписать явно в терминах преобразований Фурье. Из этого

явного представления видно, что он — оператор типа Кальдерона–Зигмунда. Остается применить конструкцию Бургейна. $\square$

В этой статье мы будем заниматься следующей задачей. Пусть X — пространство (векторных) функций на $\mathbb{R}^n$ (считаем, что их значения лежат в фиксированном евклидовом пространстве H). В качестве X могут выступать пространства $L^p(\mathbb{R}^n; H)$, $p > 1$ (как было только что), однако в большей степени нас интересуют классы гладких функций — например, однородные пространства Лишица и Соболева, пространство ВМО и т. п.

Предположим, что T — сингулярный интегральный оператор на H -значных функциях (точные условия на T будут приведены ниже). Мы отказываемся от требования, чтобы оператор T был проектором. Пусть f — такая H -значная функция, что $f, Tf \in L^1(\mathbb{R}^n; H)$. Мы хотим приблизить (в метрике пространства L^1) функцию f функцией g из шара $B_X(ct)$ почти оптимальным образом, но так, чтобы при этом и функция Tg была почти оптимальным L^1 -приближением для Tf . Схематически результаты будут выглядеть так.

Предположим, что $f, Tf \in L^1(\mathbb{R}^n, H)$. Тогда при каждом $t > 0$ существует такая функция $f_t \in B_X(ct)$, что

$$\begin{aligned} \|f - f_t\|_{L^1} &\leq C \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_X(t)), \\ \|Tf - Tf_t\|_{L^1} &\leq C(\|f - f_t\|_{L^1} + \operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_X(t))). \end{aligned} \quad (1)$$

Оператор T во всех наших рассмотрениях окажется ограниченным в пространстве X , так что автоматически $Tf_t \in B_X(ct)$. Если T — проектор и $Tf = f$, то второе неравенство в (1) принимает особенно простой вид — как в обсуждавшихся выше примерах.

Заслуживает немедленного упоминания следующая деталь: функция f_t не зависит от оператора T и находится практически конструктивно — с помощью специального алгоритма, обобщающего классическое разложение Кальдерона–Зигмунда. Алгоритм этот зависит от пространства X и при $X = L^p$, в сущности, выступает в изначальной форме, впервые появившейся в [9]. Подходящие обобщения процедуры Кальдерона–Зигмунда для ситуации, когда X — то или иное пространство гладких функций, были построены в [10], [11]. В приложении в конце статьи мы помещаем конструкцию для $X = \operatorname{Lip}_\alpha$, публиковавшуюся ранее лишь в препринте [12].

В этой работе мы ограничимся двумя случаями: $X = L^p(\mathbb{R}^n, H)$, $1 < p < \infty$ (§1), и $X = \operatorname{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n, H)$ (§2). Материал §1 можно рассматривать как серию замечаний о методе Бургейна — среди прочего, мы придадим этому методу обещанный выше «алгоритмический» вид. Мы извлечем также следствия, которые потребуются в §2. Они, на наш взгляд, интересны и сами по себе (см. следствие 2 об одновременной аппроксимации и лемму 1 о двойственности).

§2 — главная часть статьи. В техническом плане самое важное здесь — это новая оценка для сингулярных интегралов (см. п. 2.3.1).

Имеются два препринта [12], [13], к которым можно обратиться за дополнительной информацией (например, о соболевских классах или о классе ВМО в роли пространства X). Там же можно прочитать некоторые доказательства, не вошедшие в эту статью из-за недостатка места. При этом содержание статьи препринтами не покрывается. Новы, например, замечания из §3 о тригонометрической системе и о базисах из вейвлетов. Не говорится в [12], [13] и о векторных функциях. Однако дополнительных осложнений в векторном случае

почти не возникает; поэтому в дальнейшем мы будем приводить для простоты лишь скалярные формулировки. Чтобы включить векторный случай, достаточно *всюду* (в том числе и в [12], [13]) воспринимать символ $|f(x)|$ не как модуль, а как поточечно вычисленную норму в пространстве H .

§1. Пространство $L^p(\mathbb{R})$

1.1. Алгоритм Кальдерона–Зигмунда для пары (L^1, L^∞) . Под «кубом» мы понимаем куб со сторонами, параллельными координатным осям. В классической статье [9] для каждой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и каждого $t > 0$ было построено семейство кубов Q_j с попарно не пересекающимися внутренностями, обладающее следующими свойствами:

$$(a) \quad t < |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} |f| \leq 2^n t;$$

$$(b) \quad |f| \leq t \text{ п.в. вне множества } \bigcup_j Q_j.$$

(Случай, когда такое семейство оказывается пустым, не исключен.) Конструкция с тех пор неоднократно воспроизводилась в учебниках, и мы не приводим ее.

С семейством $\{Q_j\}$ мы следующим образом свяжем усредняющий оператор $P_t = P_t^f$:

$$P_t^f h = \sum_j \frac{1}{\int \psi_j} \left(\int h \psi_j \right) \psi_j + h \psi_\infty,$$

где ψ_j — характеристическая функция куба Q_j , а ψ_∞ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$. Коэффициенты в первой сумме — это просто средние $|Q_j|^{-1} \int_{Q_j} h$; мы записали их в иной форме для большего сходства с формулами §2.

Положим $f_t = P_t^f f = \sum c_j \psi_j + \psi_\infty f$, где $c_j = |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} f$ — соответствующие средние функции f . Тогда $f - f_t = \sum (f - c_j) \psi_j$; j -е слагаемое в этой сумме сосредоточено на кубе Q_j и имеет нулевой интеграл.

Нетрудно усмотреть, что

$$\|f - f_t\|_{L^1} \leq 2^{n+2} \text{dist}_{L^1}(f, B_{L^\infty}(t/2)). \quad (2)$$

Действительно, прежде всего,

$$\|f - f_t\|_{L^1} \leq \sum \|(f - c_j) \psi_j\|_{L^1} \leq 2 \sum_j \int_{Q_j} |f| \leq 2^{n+1} t \sum_j |Q_j|$$

в силу свойства (а). Далее, если $g \in B_{L^\infty}(t/2)$, то

$$\|f - g\|_{L^1} \geq \int_{\bigcup Q_j} |f| - \int_{\bigcup Q_j} |g| \geq t \sum |Q_j| - \frac{t}{2} \sum |Q_j| = \frac{t}{2} \sum |Q_j|,$$

так что неравенство (2) выполняется ввиду предыдущей оценки.

Так как $|f_t| \leq 2^n t$ п.в., мы видим, что конструкция Кальдерона–Зигмунда действительно дает элемент почти оптимального приближения в смысле первой формулы в (1), если взять там $X = L^\infty$.

1.2. Почти оптимальное приближение в паре (L^1, L^p) , $1 < p < \infty$. Оказывается, здесь тоже годится классическая процедура Кальдерона–Зигмунда, надо только правильно выбрать параметр t . Похоже, это не было замечено

ранее. Чтобы сформулировать результат, напомним определение K -функционала.

Пусть (X_0, X_1) — банахова пара. K -функционал $K(x, \sigma; X_0, X_1)$ этой пары задается для $x \in X_0 + X_1$ и $\sigma > 0$ формулой

$$K(x, \sigma; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + \sigma \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x_0 + x_1 = x \}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $f \notin B_{L^p(\mathbb{R}^n)}(s)$. Положим

$$t(s) = 2\lambda(s)^{-1} K(f, \lambda(s); L^1, L^\infty), \quad (3)$$

где $\lambda(s) = (s^{-1} \text{dist}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f, B_{L^p(\mathbb{R}^n)}(s)))^q$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Тогда

$$\|f_{t(s)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Cs \quad \text{и} \quad \|f - f_{t(s)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{dist}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f, B_{L^p(\mathbb{R}^n)}(s)),$$

где C не зависит от s и f . Более того, для кубов Q_i Кальдерона–Зигмунда, входящих в определение функции $f_{t(s)}$, верна оценка

$$\sum |Q_i| \leq C\lambda(s). \quad (4)$$

Доказательство довольно громоздко, хоть и элементарно; его можно найти в препринте [12].

1.3. Сингулярные интегральные операторы. Известно несколько похожих, но не вполне одинаковых определений этого понятия. Мы не воспроизводим ни одно из них, а просто перечислим свойства операторов, нужные в доказательствах (в §2 список этих свойств будет несколько расширен).

Пусть $p \in (1, \infty)$. Обозначим через S_p класс линейных операторов T , удовлетворяющих следующим условиям:

(А) T непрерывно отображает пространство $L^p(\mathbb{R}^n)$ в себя;

(В) T непрерывно отображает пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$ в пространство измеримых функций со сходимостью по мере;

(С) если Q — куб, а функция $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет нулевое среднее и сосредоточена на Q , то $\int_{\mathbb{R}^n \setminus (2Q)} |Tg| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g|$ (αQ всюду означает куб диаметра $\alpha \text{diam } Q$ с тем же центром; постоянная C не зависит от g и Q).

Хорошо известно, что всякий сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда лежит в S_p при $1 < p < \infty$, см., например, [14], [15]. Заметим, однако, что если $T \in S_p$ и $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то оператор T_1 , $T_1 f = hTf$, тоже лежит в S_p . Мы будем пользоваться этим наблюдением в случае, когда h — характеристическая функция измеримого множества.

1.4. Результаты. Все, наконец, готово, и мы приводим формулировку.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in (1, \infty)$ и $T \in S_p$. Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ и $Tf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдется функция $g \in B_{L^p}(cs)$, такая, что

$$\|f - g\|_{L^1} \leq C \text{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)),$$

$$\|Tf - Tg\|_{L^1} \leq C(\text{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) + \text{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s))).$$

При этом функцию g можно указать явно с помощью процедуры Кальдерона–Зигмунда: если $f \notin B_{L^p}(s)$, то достаточно положить $g = f_{t(s)}$, где число $t(s)$ определено формулой (3). Постоянные c и C не зависят от участвующих функций и от s .

Разумеется, если $f \in B_{L^p}(s)$, достаточно просто взять $g = f$.

Из последнего абзаца предыдущего раздела немедленно вытекает следующий «локальный» вариант теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p \in (1, \infty)$ и $T \in S_p$. Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, а измеримое множество E таково, что $\chi_E T f \in L^1(E)$. Тогда функция g , указанная в теореме 2, удовлетворяет соотношениям $\|f - g\|_{L^1} \leq C \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))$ и

$$\int_E |Tf - Tg| \leq C(\operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) + \operatorname{dist}_{L^1(E)}(\chi_E T f, B_{L^p(E)}(s))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вычисления навеяны статьей [4], однако имеется отличие, о котором мы скажем ниже.

Можно считать, что $f \notin B_{L^p}(s)$. Тогда положим $g = f_{t(s)}$ и выберем функцию $u \in B_{L^p}(s)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|Tf - u\|_{L^1} \leq 2 \operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s)). \quad (5)$$

Имеем

$$\|Tf - Tg\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\cup 2Q_i)} |Tf - Tg| + \int_{\cup (2Q_i)} |Tf - u| + \int_{\cup (2Q_i)} |Tg - u|, \quad (6)$$

где $\{Q_i\}$ — кубы, возникающие при разбиении функции f по Кальдерону и Зигмунду с параметром $t = t(s)$ (см. разд. 1.1–1.2). Средний член справа оценивается с помощью неравенства (5). Так как $f - g = f - f_{t(s)} = \sum (f - c_i) \chi_{Q_i}$ и слагаемые имеют нулевые средние, то, благодаря свойству (С) операторов класса S_p , мы можем оценить первый член так:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\cup 2Q_i)} |Tf - Tg| &\leq \sum_i \int_{\mathbb{R}^n \setminus (2Q_i)} |T((f - c_i) \chi_{Q_i})| \leq C \sum_i \int_{Q_i} |f - c_i| \\ &\leq C \|f - g\|_{L^1} \leq C' \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что g совпадает с c_i на Q_i , при третьем переходе и теоремой 1 при четвертом. К последнему слагаемому справа в (6) применим неравенство Гёльдера ($q^{-1} + p^{-1} = 1$):

$$\int_{\cup (2Q_i)} |Tg - u| \leq \left| \bigcup 2Q_i \right|^{1/q} (\|Tg\|_{L^p} + \|u\|_{L^p}) \leq Cs \left(\sum |Q_i| \right)^{1/q}.$$

Мы воспользовались здесь тем, что $u \in B_{L^p}(s)$, а также тем, что $\|Tg\|_{L^p} \leq C \|g\|_{L^p} \leq C's$ по теореме 1. В силу неравенства (4) получаем окончательно $\int_{\cup (2Q_i)} |Tg - u| \leq C'' \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))$. Осталось собрать оценки вместе. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассуждения Бургейна [4] диктуют иной выбор функции g , а именно $g = h + P_t^{(f-h)}(f-h)$, где h — произвольная функция, удовлетворяющая условиям $h \in B_{L^p}(s)$, $\|f - h\|_{L^1} \leq 2 \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))$ (последнее расстояние снова предполагается положительным). Параметр t на сей раз определяется из уравнения $t^{1/q} \|f - h\|_{L^1}^{1/q} = s$. Вычисление, показывающее, что и такая функция g годится, слегка отличается от приведенного выше.

На этом пути не нужна довольно громоздкая теорема 1, однако некоторым недостатком (психологическим?) является то, что разложению Кальдерона–Зигмунда подвергается «неизвестная» функция $f - h$ вместо «известной» функции f .

1.5. Приложения.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что $T \in S_p$, $f \in L^1$ и функция Tf интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует последовательность $f_k \in L^1 \cap L^p$, такая, что $f_k \rightarrow f$ в L^1 , все функции Tf_k интегрируемы на E и $\int_E |Tf_k - Tf| \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция f лежит в замыкании пространства $L^1 \cap L^p$, а функция $\chi_E Tf$ — в замыкании пространства $L^1(E) \cap L^p(E)$, после чего применим следствие 1. $\square$

Следующая лемма будет использоваться в §2.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $T \in S_p$, а E — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $\psi \in L^\infty \cap L^q$ ($q^{-1} + p^{-1} = 1$) сосредоточена на E и такова, что $T^*\psi \in L^\infty$. Если функция Tf суммируема на E , то $\int_E \psi Tf = \int_{\mathbb{R}^n} (T^*\psi)f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функции f_k , как в следствии 2, и напомним

$$\int_E \psi Tf = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \psi Tf_k = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} (T^*\psi)f_k = \int_{\mathbb{R}^n} (T^*\psi)f.$$

Переход к сопряженному оператору во втором равенстве — законная операция, так как оператор T ограничен в L^p , $f_k \in L^p$, а $\psi \in L^q$. $\square$

§2. Классы Липшица

2.1. Аналог разложения Кальдерона–Зигмунда. Мы работаем с однородными липшицевыми классами $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, снабженными нормой (в действительности полунормой, обращающейся в нуль на константах) $\|f\|_{\text{Lip}_\alpha} = \sup_{x \neq y} |x - y|^{-\alpha} |f(x) - f(y)|$. Аналог разложения Кальдерона–Зигмунда для пары $(L^1(\mathbb{R}^n), \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n))$ был построен в диссертации [10]. Сформулируем этот результат. Его доказательство мы обсудим в приложении в конце статьи. Под *укладкой* понимается набор кубов с непересекающимися внутренностями.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ и $f \notin B_{\text{Lip}_\alpha}(t)$ (последнее условие наложено для того, чтобы избежать вырождений). Процедура, о которой только что говорилось, приводит к набору кубов $\{Q_i\}$ и набору неотрицательных C^∞ -функций $\{\psi_i\}$, $\text{supp } \psi_i \subset \frac{1}{2}Q_i$, обладающих следующими свойствами.

Кубы. (I) $\bigcup (\frac{1}{2}Q_i) = \mathbb{R}^n$.

(II) Набор $\{Q_i\}$ разбивается на не более, чем B_n , укладок, где число B_n зависит лишь от размерности n .

(III) Если $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, то $|Q_i \cap Q_j| \geq \varepsilon(n) \max\{|Q_i|, |Q_j|\}$, где число $\varepsilon(n)$ опять зависит только от n .

Из II и III легко вывести еще одно условие:

(IV) $\text{card}\{i : Q_i \cap Q_j \neq \emptyset\} \leq \gamma(n)$ при всех j , где $\gamma(n)$ зависит только от n .

Действительно, в силу (III) в любой укладке, составленной из кубов набора $\{Q_i\}$, не более $\varepsilon(n)^{-1}$ кубов, отличных от Q_j , пересекают Q_j .

Функции ψ_i . Набор функций $\{\psi_i\}$ представляет собой разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$. Уже упоминалось, что $\text{supp } \psi_i \subset \frac{1}{2}Q_i$. Кроме того, на размер этих функций накладывается следующее условие:

$$|\nabla \psi_i| \leq C|Q_i|^{-1/n}, \quad \int \psi_i \geq c|Q_i|. \quad (\text{CZ1})$$

Определим на локально интегрируемых функциях h усредняющий (или, скорее, сглаживающий) оператор $P_t = P_t^f$ следующим образом (ср. с разд. 1.1):

$$P_t^f h = \sum \left(\frac{1}{\int \psi_i} \int h \psi_i \right) \psi_i.$$

Из построения функций ψ_i и кубов Q_i вытекают следующие свойства:

$$\|P_t^f f\|_{\text{Lip}_\alpha} \leq ct, \quad (\text{CZ2})$$

$$\sum |Q_i|^{1+\alpha/n} \leq \frac{c}{t} \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)). \quad (\text{CZ3})$$

Далее, положим $c_i = (\int \psi_i)^{-1} \int f \psi_i$ (так что $P_t^f f = \sum c_i \psi_i$). Выполнено еще одно условие:

$$|Q_i|^{-1-\alpha/n} \int_{Q_i} |f - c_i| \leq ct. \quad (\text{CZ4})$$

Из (CZ3) и (CZ4) легко вытекает, что

$$\|f - P_t^f f\|_{L^1} \leq C \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)). \quad (\text{CZ5})$$

Действительно,

$$\|f - P_t^f f\|_{L^1} \leq \sum \int_{Q_i} |f - c_i| \leq Ct \sum |Q_i|^{1+\alpha/n} \leq C \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)).$$

Все оценочные постоянные зависят лишь от размерности n .

2.2. Оператор T . Мы по-прежнему считаем, что «сингулярный» оператор T лежит в S_p хотя бы при одном $p \in (1, \infty)$. Еще нам понадобится, чтобы T и T^* переводили пространство Lip_α в себя. Последнее действительно так, если T — сингулярный интегральный оператор сверточного типа. По поводу не обязательно сверточных сингулярных интегралов и условий их действия в липшицевых классах см. [15, v. II].

Ограниченность оператора T^* в Lip_α будет нужна лишь для доказательства следующей леммы, которое мы отложим до разд. 2.4. В нем хватило бы ограниченности оператора T^* в Lip_β при β , не обязательно совпадающем с α .

ЛЕММА 2. Пусть T — оператор, подчиненный описанным условиям, и пусть ψ есть C^∞ -функция, сосредоточенная на кубе Q и такая, что $|\psi| \leq A$, $|\nabla \psi| \leq A|Q|^{-1/n}$. Тогда $|T^* \psi| \leq C(A, T, n)$.

2.3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор T такой, как в разд. 2.2, и пусть f и Tf лежат в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда для каждого $t > 0$ существует функция $g \in B_{\text{Lip}_\alpha}(ct)$, такая, что $\|f - g\|_{L^1} \leq \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))$ и

$$\|Tf - Tg\|_{L^1} \leq C(\text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)) + \text{dist}_{L^1}(Tf, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))).$$

Более того, если $f \in B_{\text{Lip}_\alpha}(t)$, можно положить $g = f$, а в противном случае $g = P_t^f f$. Заметим также, что при сделанных предположениях $Tg \in B_{\text{Lip}_\alpha}(c't)$. Постоянные c и c' не зависят от участвующих функций и от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $f \notin B_{\text{Lip}_\alpha}(t)$, и положим $g = P_t^f f$. Выберем функцию u из шара $B_{\text{Lip}_\alpha}(t)$, приблизительно реализующую L^1 -расстояние от функции Tf до этого шара, и запишем

$$\begin{aligned} \|Tf - Tg\|_{L^1} &\leq \|P_t^f T(f - g)\|_{L^1} + \|(I - P_t^f)T(f - g)\|_{L^1} \\ &\leq \|P_t^f T(I - P_t^f)f\|_{L^1} + \|(I - P_t^f)(Tf - u)\|_{L^1} \\ &\quad + \|(I - P_t^f)u\|_{L^1} + \|(I - P_t^f)TP_t^f f\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (7)$$

2.3.1. Оценка первого слагаемого. Мы проверим, что $\|P_t^f T(I - P_t^f)f\|_{L^1} \leq C \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))$. Именно в этом рассуждении содержатся главные технические нововведения. Поскольку функция f не будет меняться, для краткости будем писать P_t вместо P_t^f . Напомним также обозначение $c_i = (\int \psi_i)^{-1} \int f \psi_i$ из разд. 2.1.

Оператор T , если рассматривать его на L^p , $1 \leq p \leq \infty$, переводит функции в функции, а если рассматривать его на Lip_α , — функции по модулю констант в функции по модулю констант, так что всякий раз в формулах нужна правильная интерпретация. Функция $\rho = Tf - Tg = Tf - TP_t f$ локально суммируема, ибо функция $P_t f$ липшицева (см. (CZ2)), а значит, такова же и функция $TP_t f$. С другой стороны, ρ действительно можно понимать как функцию, а не как класс по модулю констант, ибо $f - g \in L^1$ (см. (CZ5)). Таким образом, выражение $P_t \rho$ (L^1 -норму которого мы оцениваем) действительно имеет смысл.

Приступим к оценке. Имеем

$$P_t(T(f - P_t f)) = \sum_j \left(\frac{1}{\int \psi_j} \int \psi_j T(f - P_t f) \right) \psi_j.$$

Зафиксируем j и оценим отдельно j -е слагаемое в последней сумме. Для этого запишем функцию $f - P_t f$ следующим образом:

$$f - P_t f = \sum_{i: Q_i \cap Q_j \neq \emptyset} (f - c_i) \psi_i + \sum_{i: Q_i \cap Q_j = \emptyset} (f - c_i) \psi_i \stackrel{\text{def}}{=} u_j + v_j.$$

Сумма, определяющая функцию u_j , конечна в силу свойства (IV) из разд. 2.1, а ряд, определяющий функцию v_j , сходится в L^1 ; поэтому

$$Tv_j = \sum_{i: Q_i \cap Q_j = \emptyset} T((f - c_i) \psi_i)$$

в смысле сходимости по мере (разд. 1.3, условие (B)). Рассмотрим измеримую функцию

$$V_j = \sum_{i: Q_i \cap Q_j = \emptyset} |T((f - c_i) \psi_i)|$$

(возможно, она не является п.в. конечной). Тогда

$$\sum_j \int_{Q_j} V_j = \sum_i \sum_{j: Q_i \cap Q_j = \emptyset} \int_{Q_j} |T((f - c_i) \psi_i)| \leq C \sum_i \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_i} |T((f - c_i) \psi_i)|,$$

поскольку покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ кубами Q_l конечнократно (см. разд. 2.1, свойство (II)). Так как $\text{supp } \psi_i \subset \frac{1}{2}Q_i$ (разд. 2.1), из условия (C) в разд. 1.3

вытекает, что

$$\sum_j \int_{Q_j} V_j \leq C \sum_i \int_{Q_i} |f - c_i|.$$

Так как $|Tv_j| \leq V_j$, отсюда следует, что функция Tv_j интегрируема на кубе Q_j и что

$$\sum_j \int_{Q_j} |Tv_j| \leq C \sum_i \int_{Q_i} |f - c_i|. \quad (8)$$

Далее, функция $Tu_j = T(f - P_t f) - Tv_j$ тоже интегрируема на кубе Q_j (уже отмечалось, что функция $T(f - P_t f)$ локально интегрируема). По лемме 2 функции $T^* \psi_j$ равномерно ограничены. Применив лемму 1, получим

$$\int_{Q_j} \psi_j Tu_j = \int (T^* \psi_j) u_j = \sum_{i: Q_i \cap Q_j \neq \emptyset} \int (T^* \psi_j)(f - c_i) \psi_i,$$

откуда

$$\sum_j \left| \int_{Q_j} \psi_j Tu_j \right| \leq C \sum_i \sum_{j: Q_i \cap Q_j \neq \emptyset} \int_{Q_i} |f - c_i| \leq C \gamma(n) \sum_i \int_{Q_i} |f - c_i| \quad (9)$$

(см. разд. 2.1, свойство (IV)). Теперь напомним

$$\begin{aligned} |P_t T(f - P_t f)| &= \left| \sum_j \left[\frac{1}{\int \psi_j} \int (Tu_j + Tv_j) \psi_j \right] \psi_j \right| \\ &\leq \sum_j \frac{\psi_j}{\int \psi_j} \left(\left| \int_{Q_j} \psi_j Tu_j \right| + \int_{Q_j} |Tv_j| \right). \end{aligned}$$

Проинтегрировав по $\mathbb{R}^n$ и учтя неравенства (8) и (9), получим

$$\int |P_t T(I - P_t)f| \leq C \sum_i \int_{Q_i} |f - c_i| \leq C' \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))$$

(см. строку, доказывающую свойство (CZ5) в разд. 2.1). □

2.3.2. Оценки остальных трех слагаемых в последней части неравенства (7) вполне рутинны.

1°. Разумеется, $\|P_t\|_{L^1 \rightarrow L^1} \leq C$ (получается непосредственно с использованием конечной кратности покрытия кубами Q_i). Поэтому второе слагаемое оценивается так:

$$\|(I - P_t)(Tf - u)\|_{L^1} \leq C \|Tf - u\|_{L^1} \leq C' \text{dist}_{L^1}(Tf, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))$$

в силу выбора функции u .

2°. Проверим, что

$$\|I - P_t\|_{\text{Lip}_\alpha \rightarrow L^1} \leq C \frac{\text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t))}{t} \quad (10)$$

(оператор $I - P_t$ обращается в нуль на константах; поэтому он переводит классы по модулю констант в настоящие функции, и все корректно). Если это неравенство доказано, то, заметив, что функции u (см. третье слагаемое в (7)) и $TP_t f$ (четвертое слагаемое) обе лежат в шаре радиуса примерно t в Lip_α (см., среди

прочего, неравенство (CZ2) в разд. 2.1), получаем, что оба слагаемых не превосходят величины $C \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{\operatorname{Lip}_\alpha}(t))$. Чтобы завершить доказательство теоремы 3, остается собрать оценки всех четырех слагаемых вместе и вспомнить о (CZ5).

Итак, осталось доказать неравенство (10). Пусть $h \in \operatorname{Lip}_\alpha$. Надо оценить L^1 -норму функции $(I - P_t)h$. Обозначив через h_Q среднее функции h по кубу Q , заметим, что

$$\int_Q |h - h_Q| \leq C \|h\|_{\operatorname{Lip}_\alpha} |Q|^{1+\alpha/n}. \quad (11)$$

Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} \|(I - P_t)h\|_{L^1} &= \int \left| h(x) - \sum_i \frac{1}{\int \psi_i} \int h(y) \psi_i(y) dy \psi_i(x) \right| dx \\ &\leq \sum_i \frac{1}{\int \psi_i} \iint |h(x) - h(y)| \psi_i(x) \psi_i(y) dx dy \\ &\leq \sum_i \frac{1}{\int \psi_i} \iint |h(x) - h_{Q_i}| \psi_i(x) \psi_i(y) dx dy \\ &\quad + \sum_i \frac{1}{\int \psi_i} \iint |h(y) - h_{Q_i}| \psi_i(x) \psi_i(y) dx dy \\ &\leq C \|h\|_{\operatorname{Lip}_\alpha} \sum |Q_i|^{1+\alpha/n} \leq \frac{C'}{t} \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{\operatorname{Lip}_\alpha}(t)) \|h\|_{\operatorname{Lip}_\alpha} \end{aligned}$$

в силу (CZ3). $\square$

2.4. Осталось еще привести пропущенное доказательство леммы 2. Докажем сначала неравенство

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C_{n,\alpha} \|g\|_{L^q}^{\alpha q/(n+\alpha q)} \|g\|_{\operatorname{Lip}_\alpha}^{n/(n+\alpha q)}, \quad (12)$$

где $\alpha \in (0, 1]$, $q \in [1, \infty)$, а функция g такова, что правая часть имеет смысл. Пусть $\tau > 0$, и предположим, что $|g(x)| > \tau$ для некоторого x . Из неравенства $|g(y)| \geq |g(x)| - b|x - y|^\alpha$, верного при всех y , видно, что множество $e = \{y : |g(y)| > \tau/2\}$ содержит шар $B = \{y : |x - y| \leq 2^{-1/\alpha}(\tau/b)^{1/\alpha}\}$. Следовательно, $|e| \geq |B| \geq C(\tau/b)^{n/\alpha}$. Так как $|e| \leq (2/\tau)^{qa^q}$, получаем $(2/\tau)^{qa^q} \geq C(\tau/b)^{n/\alpha}$, откуда $\tau \leq C'a^{\alpha q/(n+\alpha q)} b^{n/(n+\alpha q)}$, а это и есть (12).

Теперь возьмем функцию ψ , как в лемме. Упомянутый в лемме оператор T принадлежит классу S_p , в частности, ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому оператор T^* ограничен в $L^q(\mathbb{R}^n)$ при $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Ограничен он и в $\operatorname{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ по условию. Неравенство (12) показывает, что

$$\|T^*\psi\|_{L^\infty} \leq C \|T^*\psi\|_{L^q}^{\alpha q/(n+\alpha q)} \|T^*\psi\|_{\operatorname{Lip}_\alpha}^{n/(n+\alpha q)} \leq C' \|\psi\|_{L^q}^{\alpha q/(n+\alpha q)} \|\psi\|_{\operatorname{Lip}_\alpha}^{n/(n+\alpha q)}.$$

Однако $\|\psi\|_{L^q} \leq A|Q|^{1/q}$, а для всяких $x, y \in Q$ верны оценки

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq A|Q|^{-1/n}|x - y| \leq A'|Q|^{-1/n}|Q|^{(1-\alpha)/n}|x - y|^\alpha,$$

т. е. $\|\psi\|_{\operatorname{Lip}_\alpha} \leq A'|Q|^{-\alpha/n}$. Подставив это в полученную выше оценку, придем к нужному неравенству $\|T^*\psi\|_{L^\infty} \leq \text{const}$. $\square$

§3. Заключительные замечания

Методы этой статьи вряд ли можно назвать простыми (в особенности это касается §2), и естественно спросить (что многие и делали), нельзя ли прийти к тем же результатам как-то иначе. В частности, нас спрашивали, нельзя ли использовать свертки и нельзя ли использовать разложения по вейвлетам. Обсудим эти два вопроса.

3.1. Из сказанного ниже следует, что при попытке прибегнуть к сверткам мы встретим большие препятствия. Для простоты ограничимся случаем окружности $\mathbb{T}$ с мерой Лебега. Пусть X_0, X_1 — два трансляционно инвариантных пространства функций на окружности, причем для определенности пусть $X_1 \subset X_0 \subset L^1$. Для всяких ли $f \in X_0$ и $t > 0$ функцию g , такую, что

$$\|f - g\|_{X_0} \leq C \operatorname{dist}_{X_0}(f, B_{X_1}(t)), \quad g \in B_{X_1}(ct),$$

можно выбрать в виде $g = f * \tau$, где τ — некоторое распределение? (Разумеется, константы не должны зависеть от f и t , а распределению τ это позволено.)

Заметим, что если $\hat{f}(n) = 0$, то $\hat{g}(n) = 0$ для функции g указанного вида. В частности, если ответ положителен, то пара $(X_0^\Lambda, X_1^\Lambda)$ K -замкнута в (X_0, X_1) для *любого* множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ ($X^\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X : \hat{f}(n) = 0 \text{ при } n \notin \Lambda\}$). Интуиция подсказывает, что, в общем, так быть не должно. Простейший пример, когда все и вправду не так, дается парой $X_0 = L^1, X_1 = L^\infty$. В качестве Λ можно взять множество степеней двойки. Классические результаты о лакунарных рядах говорят, что после перехода к коэффициентам Фурье пространство $(L^p)^\Lambda$ отождествляется с l^2 при $p < \infty$ и с l^1 при $p = \infty$. До сих пор мы избегали интерполяционной теории, но здесь она позволяет объяснить, в чем противоречие, очень коротко: если бы K -замкнутость присутствовала, имело бы место равенство $((L^1)^\Lambda, (L^\infty)^\Lambda)_{1/2,2} = (L^2)^\Lambda$. Однако $(l^2, l^1)_{1/2,2} \neq l^2$.

На эту тему возможны вариации. Пространство L^∞ можно заменить пространством L^s с $s < \infty$, воспользовавшись существованием множеств типа Λ_p , но не $\Lambda_{p+\varepsilon}$ при $p > 2$, см. [16]. Далее, пространства L^1, L^s можно заменить классами Харди H^1, H^s (что более или менее равносильно введению в игру сингулярного интеграла — проектора Рисса). Мы опускаем детали.

3.2. Вейвлеты. Для простоты пусть в этом разделе все происходит на прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\{h_{k,j}\}$ — какая-нибудь ортогональная система вейвлетов с достаточно гладкой порождающей функцией (из которой все $\{h_{k,j}\}$ получаются сдвигами и растяжениями). Известно (см. [15]), что тогда эта система — безусловный базис в $L^p(\mathbb{R})$ при $p > 1$ и базис в $L^1(\mathbb{R})$ (не безусловный, ибо таковых в этом пространстве нет вообще). В пространстве $\operatorname{Lip}_\alpha$ базисов нет из-за несепарабельности, однако система $\{h_{n,j}\}$ ведет себя почти как безусловный базис при $0 < \alpha < 1$: операторы $f \mapsto \sum a_{ij}(f, h_{k,j})h_{k,j} \|h_{k,j}\|_{L^2}^{-2}$ ограничены равномерно при $|a_{ij}| \leq 1$.

Пусть теперь X — это либо L^p ($1 < p < \infty$), либо $\operatorname{Lip}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), и пусть $f \in L^1$. Нет ли процедуры, позволяющей получить почти оптимальное L^1 -приближение g функции f шаром пространства X с помощью ее разложения по системе $\{h_{k,j}\}$?

Ответа мы не знаем. Если эта гипотетическая процедура зависит лишь от модулей коэффициентов разложения функции f по вейвлетам, то неясно, как

оценивать норму $\|f - g\|_{L^1}$, поскольку в L^1 базис $\{h_{k,j}\}$ — не безусловный. У нас возникло впечатление, что если это препятствие и можно обойти, то примерно на том же уровне сложности, что встречался в §§1, 2. Тем не менее справедлив следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\{h_{k,j}\}$ — система достаточно гладких вейвлетов, а X — это либо L^p , $1 < p < \infty$, либо Lip_α , $0 < \alpha < 1$. Пусть $f \in L^1$ и $t > 0$. Тогда существует функция g из шара $B_X(ct)$, такая, что $\|f - g\|_{L^1} \leq C \text{dist}_{L^1}(f, B_X(t))$, со следующим дополнительным условием: коэффициенты разложения функции g по системе $\{h_{k,j}\}$ могут быть отличны от нуля лишь на тех местах, на которых отличны от нуля коэффициенты разложения функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E — множество тех пар (k, j) , для которых $(f, h_{k,j}) \neq 0$. Рассмотрим оператор T ,

$$T\varphi = \sum_{(k,j) \in E} (\varphi, h_{k,j}) \|h_{k,j}\|_{L^2}^{-2} h_{k,j}.$$

Это проектор, оставляющий функцию f на месте. С другой стороны, хорошо известно, что T — сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда, см. [15], [17]. Осталось применить к этому оператору T теорему 2 при $X = L^p$ или теорему 3 при $X = \text{Lip}_\alpha$. $\square$

Таким образом, система вейвлетов обладает тем самым свойством, которое оказалось невозможным для тригонометрической системы (разд. 3.1), однако мы не видим иного способа убедиться в этом, кроме как прибегнуть к теоремам §§1, 2. В качестве X в предложении 1 можно еще взять иные пространства гладких функций, рассмотренные в [12], [13].

Приложение. Как построить разбиение Кальдерона–Зигмунда для пары (L^1, Lip_α) ?

Похожее разбиение для соболевских классов вместо липшицевых было построено в [11]. Здесь мы остановимся на основных моментах конструкции для классов Липшица. Больше подробностей читатель найдет в приложении 2 к препринту [12].

Пусть $\{Q_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ — семейство кубов, причем для каждого x куб Q_x имеет своим центром x и не исключено вырождение (когда $Q_x = \{x\}$). Определим β -емкость ($\beta > 0$) этого семейства (обозначение: $\{\{Q_x\}\}_\beta$) как наименьшее число C , такое, что $\sum |Q_{x_i}|^\beta \leq C$ для всех упадок $\{Q_{x_i}\}$, составленных из кубов семейства.

Радиус $r(Q)$ куба Q — это половина длины его стороны. Куб радиуса r с центром в x обозначается через $Q(x, r)$. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим (ср. (11)) непрерывную по r функцию $\varphi_x(r) = |Q(x, r)|^{-1-\alpha/n} \int_{Q(x, r)} |f - f_{Q(x, r)}|$. Ясно, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_x(r) = 0$. Пусть $t > 0$, а b — постоянная, которая будет зафиксирована чуть позже. Введем семейство $\{Q_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ предельных кубов следующим образом: $Q_x = \{x\}$, если $\sup_{r>0} \varphi_x(r) \leq bt$, а в противном случае $Q_x = Q(x, r_x)$, где $r_x = \sup\{r : \varphi_x(t) > bt\}$. Оценим $(1+\alpha/n)$ -емкость этого семейства. Возьмем произвольную функцию g из $B_{\text{Lip}_\alpha}(t)$. Пусть $\{K_j\}$ — укладка, составленная из предельных кубов. Учитывая неравенство $\int_Q |f - c| \geq 2^{-1} \int_Q |f - f_Q|$ (верное для

любой константы c), определение предельного куба и формулу (11), получим

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^1} &\geq \sum_j \int_{K_j} |f - g| \geq \sum_j \int_{K_j} |f - g_{K_j}| - \sum_j \int_{K_j} |g - g_{K_j}| \\ &\geq \sum_j 2^{-1} \int_{K_j} |f - f_{K_j}| - \sum_j \int_{K_j} |g - g_{K_j}| \\ &\geq \frac{b}{2} t \sum_j |K_j|^{1+\alpha/n} - Ct \sum_j |K_j|^{1+\alpha/n} = \frac{b}{4} t \sum_j |K_j|^{1+\alpha/n}, \end{aligned}$$

если с самого начала $b = 4C$. Таким образом,

$$|\{Q_x\}|_{1+\alpha/n} \leq \frac{4}{b} t^{-1} \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)).$$

Последняя оценка позволяет сделать главный шаг — применить теорему о покрытии из статьи [11]. В результате получится семейство кубов $\{Q_i\}$ со следующими свойствами. Прежде всего,

$$\sum |Q_i|^{1+\alpha/n} \leq |\{Q_x\}|_{1+\alpha/n} \leq \frac{4}{b} t^{-1} \text{dist}_{L^1}(f, B_{\text{Lip}_\alpha}(t)).$$

(Это — свойство (CZ3) из разд. 2.1.) Далее, $Q_{x_i} \subset Q_i$, где x_i — центр куба Q_i , и для всякого x существует индекс $i(x)$, такой, что $Q_x \subset Q_{i(x)}$. Наконец, выполнены условия (II) и (III) из разд. 2.1, а условие (I) выполнено в усиленной форме: $\bigcup (\frac{1}{4}Q_i) = \mathbb{R}^n$.

Функции ψ_i , упомянутые в разд. 2.1, строятся обычным образом: возьмем C^∞ -функции φ_i , $0 \leq \varphi_i \leq 1$, равные 1 на $\frac{1}{4}Q_i$ и 0 вне $\frac{1}{2}Q_i$, и положим $\psi_i = \varphi_i [\sum_k \varphi_k]^{-1}$. Оценку градиента в (CZ1), разд. 2.1, проще всего обеспечить, считая, что все функции φ_i получаются растяжениями и сдвигами из одной. Из свойства (IV), разд. 2.1, видно, что $\psi_i \geq d(n)$ на $\frac{1}{4}Q_i$; поэтому $\int_{Q_i} \psi_i \geq d'(n)|Q_i|$ (второе неравенство в (CZ1)). Отсюда выводится условие (CZ4) из разд. 2.1:

$$\int_{Q_i} |f - c_i| \leq \int_{Q_i} \int_{Q_i} \frac{1}{\int \psi_i} |f(x) - f(y)| dx dy \leq C|Q_i|^{-1} \int_{Q_i} \int_{Q_i} |f(x) - f(y)| dx dy;$$

далее нужно написать $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{Q_i}| + |f(y) - f_{Q_i}|$ и воспользоваться тем, что Q_i содержит предельный куб с тем же центром.

Осталось проверить условие (CZ2) из разд. 2.1. Будем писать f_t вместо $P_t^f f$. Неравенство (11) в действительности характеризует класс Lip_α (см., например, [18]); поэтому достаточно показать, что $|Q|^{-1-\alpha/n} \int_Q |f_t - (f_t)_Q| \leq C(n)t$ для всех кубов Q . Рассмотрим два случая.

Случай 1. $Q \subset Q_{i_0}$ для некоторого i_0 . Легко видеть, что $\int_Q |f_t - (f_t)_Q| \leq |Q|^{1+1/n} \max_Q |\nabla f_t|$. Поэтому достаточно проверить неравенство $\max_Q |\nabla f_t| \leq Ct|Q|^{-(1-\alpha)/n}$. Установим более сильное неравенство

$$\max_{Q_{i_0}} |\nabla f_t| \leq Ct|Q_{i_0}|^{-(1-\alpha)/n}.$$

Из равенства $\sum \psi_i \equiv 1$ получаем $\partial \psi_{i_0} / \partial x_k = -\sum_{i \neq i_0} \partial \psi_i / \partial x_k$. Так как $f_t = \sum c_i \psi_i$, откуда следует, что $\partial f_t / \partial x_k = \sum_i (c_i - c_{i_0}) \partial \psi_i / \partial x_k$. Лишь $\gamma(n)$ слагаемых в последней сумме могут быть отличны от нуля на Q_{i_0} (см. свойство (IV))

в разд. 2.1). Так как $|\nabla\psi_i| \leq C|Q_i|^{-1/n}$, мы видим, что

$$\max_{Q_{i_0}} |\nabla f_t| \leq C' \max_{i: Q_i \cap Q_{i_0} \neq \emptyset} |c_i - c_{i_0}| |Q_i|^{-1/n}.$$

Но если $Q_i \cap Q_{i_0} \neq \emptyset$, то объемы множеств Q_i , Q_{i_0} и $Q_i \cap Q_{i_0}$ сравнимы (см. свойство (III) в разд. 2.1). Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{Q_{i_0}} |\nabla f_t| &\leq C' \max_{i: Q_i \cap Q_{i_0} \neq \emptyset} |Q_{i_0} \cap Q_i|^{-1} \int_{Q_{i_0} \cap Q_i} |c_i - c_{i_0}| |Q_{i_0}|^{-1/n} \\ &\leq C'' \max_{i: Q_i \cap Q_{i_0} \neq \emptyset} |Q_{i_0}|^{-1-1/n} \left(\int_{Q_i} |f - c_i| + \int_{Q_{i_0}} |f - c_{i_0}| \right) \\ &\leq C''' \max_{i: Q_i \cap Q_{i_0} \neq \emptyset} |Q_{i_0}|^{-1-1/n} t (|Q_i|^{1+\alpha/n} + |Q_{i_0}|^{1+\alpha/n}) \\ &\leq C'''' t |Q_{i_0}|^{(1-\alpha)/n}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Случай 2. Куб Q не содержится ни в одном из Q_i . Пусть x — центр куба Q . Предельный куб Q_x содержится в одном из кубов Q_i ; поэтому $Q \not\subset Q_x$. А тогда $Q_x \subset Q$ и, следовательно, $|Q|^{-1-\alpha/n} \int_Q |f - f_Q| \leq bt$.

Докажем теперь, что $\sum_{Q_i \cap Q \neq \emptyset} |Q_i| \leq C(n)|Q|$. Так как набор $\{Q_i\}$ разбивается на $B(n)$ укладок, достаточно показать, что $Q_i \subset C(n)Q$, если $Q_i \cap Q \neq \emptyset$. Но кубы $\frac{1}{4}Q_i$ покрывают $\mathbb{R}^n$; поэтому всякая точка y из $Q_i \cap Q$ содержится в $\frac{1}{4}Q_{i_0}$ при некотором $i_0 = i_0(y)$. Однако $Q \not\subset Q_{i_0}$; поэтому $\frac{3}{4}r(Q_{i_0}) \leq 2r(Q)$, откуда $r(Q_{i_0}) \leq 3r(Q)$. Поскольку объемы кубов Q_{i_0} и Q_i сравнимы (разд. 2.1, свойство (III)), мы приходим к требуемому утверждению.

Остается написать

$$\begin{aligned} \int_Q |f_t - (f_t)_Q| &\leq 2 \int_Q |f_t - f_Q| \leq 2 \left(\int_Q |f - f_Q| + \int_Q |f - f_t| \right) \\ &\leq 2bt|Q|^{1+\alpha/n} + 2 \sum_{Q_i \cap Q \neq \emptyset} \int_{Q_i} |f - c_i| \\ &\leq 2bt|Q|^{1+\alpha/n} + Ct \sum_{Q_i \cap Q \neq \emptyset} |Q_i|^{1+\alpha/n} \end{aligned}$$

и оценить последнюю сумму величиной $(\sum_{Q_i \cap Q \neq \emptyset} |Q_i|)^{1+\alpha/n}$, которая, как мы только что видели, не превосходит $C|Q|^{1+\alpha/n}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Pisier, "Interpolation between H^p -spaces and noncommutative generalizations. I", *Pacific J. Math.*, **155**:2 (1992), 341–368.
- [2] G. Pisier, "Interpolation between H^p -spaces and noncommutative generalizations. II", *Rev. Mat. Iberoamericana*, **9**:2 (1993), 281–291.
- [3] S. V. Kislyakov, Quanhua Xu, "Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **343**:1 (1994), 1–34.
- [4] J. Bourgain, "Some consequences of Pisier's approach to interpolation", *Israel J. Math.*, **77**:1–2 (1992), 165–185.

- [5] С. В. Кисляков, Кванхуа Шу, “Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы”, *Алгебра и анализ*, **8:4** (1996), 75–109.
- [6] S. V. Kislyakov, Quanhua Xu, “Partial retractions for weighted Hardy spaces”, *Studia Math.*, **138:3** (2000), 251–264.
- [7] S. V. Kislyakov, “Interpolation of H^p -spaces: some recent developments”, in: *Function Spaces, Interpolation Spaces, and Related Topics (Haifa, 1995)*, Israel Math. Conf. Proc., vol. 13, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999, 102–140.
- [8] T. W. Gamelin, S. V. Kislyakov, “Uniform algebras as Banach spaces”, in: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 1*, Elsevier, 2001, 671–706.
- [9] A. P. Calderón, A. Zygmund, “On the existence of certain singular integrals”, *Acta Math.*, **88** (1952), 85–139.
- [10] Н. Я. Кругляк, *Исследование вещественного метода интерполяции*, Дисс. д.ф.-м.н., 1996.
- [11] Н. Я. Кругляк, “Гладкие аналоги разложения Кальдерона–Зигмунда, количественные теоремы о покрытиях и K -функционал для пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$ ”, *Алгебра и анализ*, **8:4** (1996), 110–160.
- [12] S. V. Kislyakov, N. Ya. Kruglyak, *Stability of approximation under singular integrals, and Calderón–Zygmund type decompositions*, PDMI Preprint No. 7, 2005; www.pdmi.ras.ru/preprint/2005/index.html.
- [13] S. V. Kislyakov, N. Ya. Kruglyak, *Stability of approximation under singular integrals and Calderón–Zygmund type decompositions. II*, Preprint of the Erwin Schrödinger Institute No. 1734, 2005; www.esi.ac.at/preprints/ESI-Preprints.html.
- [14] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Series, vol. 30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
- [15] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs, v. I, II*, Hermann, Paris, 1990.
- [16] J. Bourgain, “Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$ -set problem”, *Acta Math.*, **162** (1989), 227–245.
- [17] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Math., vol. 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [18] S. Campanato, “Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 175–188.

С.-Петербургское отделение Математического института

им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Luleå University of Technology, Luleå, Sweden

e-mail: natan@sm.luth.se

Поступило в редакцию

11 августа 2006 г.