Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 83–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:34:28

УДК 517.9

Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*

© 2006. М. С. АГРАНОВИЧ

Памяти Бориса Яковлевича Левина

§1. Тема и содержание работы

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Γ , $n \geq 2$. Предположим, что в Ω задана линейная система уравнений в частных производных 2-го порядка со старшей частью в дивергентной форме. Для простоты изложения будем считать, что система имеет вид

$$Lu = L_0u + \tau u = f, \quad (1.1)$$

где

$$L_0u = - \sum_{j,k=1}^n \partial_j a_{jk}(x) \partial_k \quad (1.2)$$

и τ — положительное число. Здесь $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $a_{jk}(x)$ — вещественные $(m \times m)$ -матрицы с элементами для простоты из $C^{1+\gamma}(\overline{\Omega})$ при некотором $\gamma > 0$ (см., однако, п. 9 в §8). Будем предполагать, что главный символ симметричен и удовлетворяет условию сильной эллиптичности:

$$\sum_{j,k} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq C |\xi|^2 E \quad (x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n) \quad (1.3)$$

с постоянной $C > 0$. Граничное условие в задаче Дирихле имеет вид

$$u^+(x) = g(x) \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.4)$$

здесь и дальше значком $^+$ обозначаются граничные значения функций на внутренней стороне поверхности Γ . В классической вариационной (или слабой) постановке задачи решение и правые части рассматриваются в соболевских L_2 -пространствах. Хорошо известно, что эта задача однозначно разрешима. Граничное условие в задаче Неймана записывается в виде

$$\partial_{\nu_a} u^+(x) = h(x), \quad (1.5)$$

где

$$\partial_{\nu_a} = \sum_{j,k} a_{jk}(x) \nu_j(x) \partial_k \quad (1.6)$$

— кономальная производная ($\nu_j(x)$ — координаты единичной внешней нормали в точке границы; нормаль, как известно, существует на липшицевой поверхности почти всюду). Формулой (1.6) на самом деле можно пользоваться только

---

*Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00914.

при (небольших) добавочных предположениях о гладкости; в общем же случае для ∂_{ν_a} дается вариационное определение, оно напоминается ниже в §3. В матричном случае задача Неймана однозначно разрешима, если выполнено добавочное предположение о коэрцитивности, оно тоже напоминается в §3.

Настоящая работа посвящена главным образом вопросу о гладкости вариационных решений. Мы предлагаем обобщение классического вариационного определения решений с использованием пространств Лебега и Бесова (более общих, чем L_2 -пространства Соболева) и получаем результаты о существовании, единственности и гладкости обобщенных вариационных решений в этих пространствах. Для этого мы обобщаем результаты Саваре [43], относящиеся к L_2 -пространствам Соболева, используя средства теории интерполяции. В §3 это делается для задачи Неймана. В §4 мы сравниваем наш подход с глубоким невариационным подходом в многочисленных работах современной теории граничных задач в липшицевых областях и объясняем мотивировку нашего подхода. Она состоит в том, что нам удастся охватить задачу Неймана в матричном случае, т. е. в случае систем. В скалярном случае (а также в матричном случае для задачи Дирихле) результаты этой теории богаче. Противоречий не возникает, так как решения, которые в ней строятся, оказываются обобщенными вариационными решениями в нашем смысле.

В §6 мы кратко обсудим в том же плане задачу Дирихле. В §§5, 6 и 7 мы продвинемся в описании гладкости собственных функций основных спектральных задач — соответственно Неймана, Дирихле и Пуанкаре–Стеклова (именно это было первоначальной целью автора). В §8 мы перечислим некоторые возможные обобщения. В §2 собран вспомогательный материал из теории интерполяции, играющий существенную роль в наших доказательствах.

Мне не довелось писать работы под руководством Бориса Яковлевича Левина или в соавторстве с ним. Но я тщательно изучал его замечательную книгу о распределении корней целых функций и неоднократно применял теоремы из нее к задачам из спектральной теории. Кроме того, мы около 20 лет сотрудничали в одной редколлегии. Беру на себя смелость посвятить эту работу его памяти.

§2. Комплексная интерполяция

В п. 2.1 мы напомним некоторые исходные определения и утверждения. Доказательства и подробности можно найти в статье [8] и книгах [6] и [46]. Затем в пп. 2.2–2.4 мы приведем некоторые дальнейшие результаты, нужные для нас; они были получены после выхода в свет этих двух монографий.

2.1. Пусть $X = (X_0, X_1)$ — пара банаховых пространств. Она называется *интерполяционной* (говорят также, что эти пространства *сравнимы*), если они непрерывно вложены в некоторое хаусдорфово топологическое векторное пространство. При этом условии определено пространство $\Sigma(X) = X_0 + X_1$, состоящее из сумм элементов из X_0 и X_1 . В нем вводится норма

$$\|x\|_{\Sigma} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x = x_0 + x_1\}, \quad (2.1)$$

и это банахово пространство. Через $\Delta(X)$ обозначается пересечение $X_0 \cap X_1$; в нем вводится норма

$$\|x\|_{\Delta(X)} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}. \quad (2.2)$$

Это тоже банахово пространство, и оно непрерывно вложено в X_0 и X_1 . Избегая не нужной нам общности и возможной патологии, мы *предположим*, как в

[40], что $\Delta(X)$ плотно в X_0 и X_1 . Эквивалентное условие состоит в том, что пространства X_0 и X_1 содержат некоторый плотный в них линейал Z .

Через S_0 обозначается открытая вертикальная полоса на комплексной плоскости, определяемая неравенствами $0 < \operatorname{Re} z < 1$, и через S ее замыкание. Через $F(X)$ обозначается пространство функций $\varphi(z)$ на S со значениями в $\Sigma(X)$, которые голоморфны в S_0 (см. определение в [15, гл. III, п. 14]), непрерывны и ограничены в S и удовлетворяют следующим условиям: на левой границе полосы значения функции $\varphi(z) = \varphi(it)$ принадлежат X_0 , на правой границе значения $\varphi(z) = \varphi(1 + it)$ принадлежат X_1 , и соответствующие нормы стремятся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Пример: $\varphi(z) = xe^{z^2}$, где x берется из $\Delta(X)$. В $F(X)$ вводится норма

$$\|\varphi\|_{F(X)} = \max\{\sup \|\varphi(it)\|_{X_0}, \sup \|\varphi(1 + it)\|_{X_1}\}; \quad (2.3)$$

это тоже банахово пространство.

Пространство X_θ при $0 \leq \theta \leq 1$ определяется как состоящее из всех $x \in \Sigma(X)$, таких, что $x = \varphi(\theta)$ при некоторой $\varphi \in F(X)$; в нем вводится норма

$$\|x\|_{X_\theta} = \inf\{\|\varphi\|_{F(X)} : \varphi(\theta) = x, \varphi \in F(X)\}. \quad (2.4)$$

Это тоже банахово пространство, и $\Delta(X)$ в нем плотно. Только что определенные пространства X_0 и X_1 совпадают с исходными пространствами при нашем предположении о плотности $\Delta(X)$ в них. Пространство $\Delta(X)$ плотно во всех X_θ .

В методе комплексной интерполяции, предложенном и разработанном Кальдероном [8], интерполяционной паре X сопоставляется только что указанным образом интерполяционная шкала $\{X_\theta\}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Рассмотрим две интерполяционные пары $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$. Пусть T_j — линейные ограниченные операторы из X_j в Y_j ($j = 0, 1$). Мы будем предполагать, что $T_0x = T_1x$ для всех $x \in \Delta(X)$; это условие назовем *условием согласованности* операторов T_0 и T_1 . Эквивалентное условие состоит в том, что операторы T_0 и T_1 совпадают на некотором линейале Z , плотном в X_0 и X_1 . Тогда формулой

$$T(x_0 + x_1) = T_0x_0 + T_1x_1 \quad (x_0 \in X_0, x_1 \in X_1) \quad (2.5)$$

корректно определяется оператор $T: \Sigma(X) \rightarrow \Sigma(Y)$, и он оказывается ограниченным оператором из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$.

Теперь рассмотрим сужение T_θ оператора T на X_θ .

Предложение 2.1. Оператор T_θ действует ограниченным образом из X_θ в Y_θ . Более того,

$$\|T_\theta\| \leq \|T_0\|^{1-\theta} \|T_1\|^\theta. \quad (2.6)$$

Это классическая теорема об интерполяции [8], обобщение теоремы Рисса–Торина об операторах в пространствах L_p .

2.2. Нам понадобится *устойчивость обратимости при интерполяции*. (Автор узнал о ней из работ [21] и [25].) Рассмотрим снова две интерполяционные пары (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) и предположим, что ограниченные операторы T_j из X_j в Y_j ($j = 0, 1$) удовлетворяют условию согласованности. Справедливо следующее утверждение (см. [44], [49]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть оператор T_θ имеет ограниченный обратный при некотором $\theta_0 \in (0, 1)$. Тогда то же самое верно для операторов T_θ при всех θ из некоторой окрестности точки θ_0 .

2.3. Обратимость не всегда сохраняется при интерполяции. Но она сохраняется при сделанном выше предположении о плотности $\Delta(X)$ в X_0 и X_1 . Приведенное ниже предложение является несложным обобщением леммы 8.4 из [21], в которой $Y_j = X_j$ ($j = 0, 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$ — две интерполяционные пары и $T_j: X_j \rightarrow Y_j$ ($j = 0, 1$) — ограниченные операторы, удовлетворяющие условию согласованности. Предположим, что операторы T_0 и T_1 имеют ограниченные обратные, также удовлетворяющие условию согласованности. Тогда все операторы T_θ ($0 < \theta < 1$) также имеют ограниченные обратные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор

$$U(y_0 + y_1) = T_0^{-1}y_0 + T_1^{-1}y_1 \quad (y_0 \in Y_0, y_1 \in Y_1)$$

корректно определен на $Y_0 + Y_1$ и действует из этого пространства ограниченным образом в $X_0 + X_1$. Легко проверяется, что он является двусторонним обратным к T . Например,

$$TU(y_0 + y_1) = T_0(T_0^{-1}y_0) + T_1(T_1^{-1}y_1) = y_0 + y_1.$$

Если $\varphi(z)$ — функция из $F(X)$, то $\psi(z) = T\varphi(z)$ — функция из $F(Y)$. И наоборот, если $\psi(z) \in F(Y)$, то $\varphi(z) = U\psi(z) \in F(X)$. В частности, значения $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$, $0 < \theta < 1$, одновременно принадлежат соответственно X_θ и Y_θ и их нормы там оцениваются одна через другую. Отсюда видно, что сужение U_θ оператора U на Y_θ — обратный оператор к T_θ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие согласованности обратных операторов заведомо выполнено, если, скажем, $X_0 \supset X_1$ и $Y_0 \supset Y_1$ и вложения непрерывны. Действительно, тогда оператор T_1^{-1} оказывается сужением оператора T_0^{-1} на Y_1 . Добавим, что в этом случае все операторы T_θ совпадают на X_1 и все операторы T_θ^{-1} совпадают на Y_1 . Ср. [40, п. 2] в случае $X_j = Y_j$.

2.4. Пусть $X = (X_0, X_1)$ — интерполяционная пара и T_j — ограниченные операторы в X_j , удовлетворяющие условию согласованности. В общем случае спектр оператора T_θ может зависеть от индекса интерполяции. Но в нужных нам ситуациях это не так, и для наших целей достаточно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Предположим, что все T_θ — компактные операторы. Тогда спектр оператора T_θ не зависит от θ ($0 \leq \theta \leq 1$), и если λ лежит вне этого спектра, то все резольвенты $R_\theta = (T_\theta - \lambda I)^{-1}$ совпадают на $\Delta(X)$ при всех $\theta \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совпадение на $\Delta(X)$ резольвент операторов T_{θ_1} и T_{θ_2} в точке λ , лежащей вне объединения их спектров, вытекает из предложения 2.3 в [40]. Совпадение спектров вытекает теперь из следствия 2.9 там же. $\square$

Утверждения, аналогичные приведенным в пп. 2.2–2.4, верны и для вещественной интерполяции (это отмечается в нескольких работах), но она не вполне удобна для пространств, которые мы собираемся рассматривать. Вещественная

интерполяция понадобится нам только в одном месте в §6, где мы воспользуемся готовым результатом.

§3. Задача Неймана

3.1. Напомним, что формальное интегрирование скалярного произведения $(Lu, v)_{0,\Omega}$ по частям приводит к *вариационному тождеству*, или формуле Грина

$$(f, v)_{0,\Omega} = \Phi_\tau(u, v) - (h, v^+)_{0,\Gamma}, \quad (3.1)$$

где $f = Lu$, $h = \partial_{\nu_a} u^+$, v — произвольная («пробная») функция и

$$\Phi_\tau(u, v) = \int_\Omega \sum a_{jk}(x) \partial_k u(x) \partial_j \bar{v}(x) dx + \tau(u, v)_{0,\Omega}. \quad (3.2)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ и $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$ — стандартные скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$. На самом деле интегрирование по частям возможно лишь при некоторых дополнительных предположениях о гладкости (см., например, лемму 4.8 в [29]); в общем же случае формула (3.1) используется для определений. Из нее следует, что $Lu = f$ в слабом смысле внутри Ω .

В вариационной постановке (вошедшей в случае простейших уравнений во многие учебники, см. также [29], [38], [39]) обычно

$$u, v \in H^1(\Omega), \quad f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega), \quad h \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (3.3)$$

Здесь $H^1(\Omega)$ — соболевское L_2 -пространство порядка 1 (сужений на Ω функций $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|u\|_{1,\Omega} = \inf \|w\|_{1,\mathbb{R}^n}$). Далее, $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ — это подпространство в $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из принадлежащих последнему пространству (обобщенных) функций с носителями в $\bar{\Omega}$, с нормой из $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Пространства $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ сопряжены относительно продолжения формы $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ на их прямое произведение. Через $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ обозначаются соболевские L_2 -пространства на Γ порядка $\pm 1/2$. Они сопряжены относительно продолжения формы $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$ на их прямое произведение. Пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ состоит из следов функций из $H^1(\Omega)$. При заданных f , u и произвольной v формула (3.1) *однозначно определяет конормальную производную* $h = \partial_{\nu_a} u^+$ функции u как сопряженно-линейный функционал над $H^{1/2}(\Gamma)$, именно поэтому она принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma)$. (См. лемму 4.1 в [29].) При заданных f и h (3.1) — *уравнение для u* .

Относительно формы (3.2) мы предположим, что она *коэрцитивна на $H^1(\Omega)$* — определяет новое скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, такое, что соответствующая норма эквивалентна обычной норме $\|u\|_{1,\Omega}$. Достаточные для этого условия обсуждаются, в частности, в [37, гл. 3, §7] и [3, §1]. Особенно важный пример — уравнения анизотропной упругости, см., например, [38, п. 3.4].

Из этого условия следует, что при заданных f и h формула (3.1) определяет решение u задачи Неймана, называемое *вариационным решением*, по теореме Рисса о линейных непрерывных функционалах в гильбертовом пространстве. В силу положительности формы $\Phi_\tau(u, u)$ оно единственно. Добавим, что можно избавиться от h и сделать граничное условие Неймана однородным: функционал $(h, v^+)_{0,\Gamma}$ с $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$ допускает запись в виде $(f_1, v)_{0,\Omega}$ с $f_1 \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ (и $\text{supp } f_1 \subset \Gamma$). Ср. [29, стр. 117] и [3, п. 2.2].

3.2. Теперь нам понадобятся более общие и хорошо известные пространства для наших функций:

$$u \in H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega), \quad v \in H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega), \quad f \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega), \quad h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma). \quad (3.4)$$

Здесь $H_p^\sigma(\Omega)$ — это пространство Лебега, или Лиувилля, или бесселевых потенциалов в Ω (индекс p опускается в случае $p = 2$); $\tilde{H}_p^{-\sigma}(\Omega)$ — подпространство в $H_p^{-\sigma}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из принадлежащих последнему пространству (обобщенных) функций с носителями в $\bar{\Omega}$; $B_p^r(\Gamma) = B_{r,p}^r(\Gamma)$ — пространство Бесова на Γ . Индексы подчиним условиям

$$1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad |s| < \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Для подробных справок по теории этих пространств приходится отослать читателя к книгам [6] и [46] и статьям [41], [47], [35], а также к соответствующим пунктам в [24], [43], [21] и [51].¹⁾

Мы ограничимся здесь следующими напоминаниями и указаниями.

Норма в $H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|u\|_{H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda_\sigma u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.6)$$

где $\Lambda_\sigma = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}F$, F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций.

Пространство $H_p^\sigma(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений u на Ω функций или обобщенных функций w из $H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|u\|_{H_p^\sigma(\Omega)} = \inf \|w\|_{H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)} : w|_\Omega = u$.

Имеется универсальный оператор продолжения функций из $H_p^\sigma(\Omega)$ до функций из $H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$, действующий ограниченным образом *при всех σ и p* . См. [41], а также [35].

Норма в $\tilde{H}_p^{-\sigma}(\Omega)$ берется из $H_p^{-\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Линеал $C^\infty(\bar{\Omega})$ содержится и плотен во всех $H_p^\sigma(\Omega)$. Линеал $C_0^\infty(\Omega)$ содержится и плотен во всех $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$.²⁾

Пространства $\tilde{H}_{p'}^{-\sigma}(\Omega)$ и $H_p^\sigma(\Omega)$ сопряжены относительно продолжения формы $(f, v)_{0,\Omega}$ на их прямое произведение при всех σ . Это продолжение определяется равенством

$$(f, v)_{0,\Omega} = \lim (f_k, v_k)_{0,\Omega},$$

где функции $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ аппроксимируют f в первом пространстве, а функции $v_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — функцию v во втором пространстве.

Приведем некоторые пояснения. Нам нужны две шкалы пространств, $H_p^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ (а не одна объединенная шкала, как в [47]). Мы определили пространства $H_p^\sigma(\Omega)$ при всех σ , следуя [41] и [47]. В [24] проверена плотность линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в пространствах $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$. Приведенная нами теорема о двойственности

¹⁾ Наши обозначения в основном близки к использованным в [46]. Но наиболее важные для нас теоремы содержатся в работах [41] и [47], в которых используются несколько иные обозначения.

²⁾ Здесь и дальше подразумевается, что функции из $C_0^\infty(\Omega)$ продолжаются нулем вне Ω .

доказана в [47] при $\sigma < 1/p$, но доказательство проходит (с использованием универсального оператора продолжения) при всех σ . Ср. [35] и [24].

Пространства $H_p^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ можно отождествить при $-1/p' < \sigma < 1/p$.

В пространстве $B_p^r(\mathbb{R}^n)$ норма при $0 < r < 1$ определяется равенством

$$\|u\|_{B_p^r(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\iint \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+pr}} dx dy \right)^{1/p}, \quad (3.7)$$

а при остальных r — формулой

$$\|u\|_{B_p^r(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda_{r-\sigma} u\|_{B_p^\sigma(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (3.8)$$

Норму в $B_p^r(\Gamma)$ ($|r| \leq 1$) определим при помощи разбиения единицы и локальных координат на Γ . Оператор перехода от функции u в Ω к ее следу на Γ действует ограниченным образом из $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$ в $B_p^\sigma(\Gamma)$ при $0 < \sigma < 1$ (первое неравенство необходимо и в случае гладкой поверхности, а второе — в случае липшицевой (и даже класса C^1) поверхности, см. [24] и приведенные там ссылки) и имеет правый обратный. Именно этими неравенствами для σ определяются ограничения на s в (3.5). Пространства $B_p^r(\Gamma)$ и $B_{p'}^{-r}(\Gamma)$ сопряжены относительно продолжения формы $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$ на их прямое произведение.

Для $\sigma \geq 0$ пространства H_p^σ и B_p^σ близки к пространствам Соболева–Слободянского W_p^σ , определенным для этих σ . В частности, $H_p^\sigma = W_p^\sigma$ при целых $\sigma \geq 0$ и $B_p^\sigma = W_p^\sigma$ при нецелых $\sigma > 0$.

При комплексной интерполяции, если верхние индексы неотрицательны или неположительны,

$$[H_{p_0}^{\sigma_0}, H_{p_1}^{\sigma_1}]_\theta = H_{p_\theta}^{\sigma_\theta}, \quad \text{где } \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ и } \sigma_\theta = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1 \quad (3.9)$$

($0 < \theta < 1$). То же верно для пространств $\tilde{H}$. По аналогичному правилу интерполируются и пространства Бесова. См. [47], [24] и [21]. В частности, все эти классы пространств инвариантны относительно комплексной интерполяции (в отличие от вещественной интерполяции).

На плоскости с осями s и $t = 1/p$ неравенства в (3.5) определяют квадрат со сторонами длины 1, параллельными координатным осям, и центром в точке $(0, 1/2)$, который мы обозначим через Q . Он получился благодаря специальной записи верхних индексов в (3.4). Сделаем очевидное

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первые и третьи пространства в (3.4) расширяются, если точка (s, t) движется в Q по горизонтальному отрезку влево или по отрезку прямой $s + t = \text{const}$ вверх налево.

Поэтому любые две точки в Q можно соединить отрезком или ломаной, состоящей из не более чем трех отрезков, таких, что при движении вдоль отрезка в определенную сторону эти пространства или расширяются, или сжимаются.

3.3. Снова отметим, что в силу (3.1) $Lu = f$ в Ω в слабом смысле внутри Ω и что h определяется по u и f однозначно. Далее, в задаче Неймана, изменив f , можно предположить, что $h = 0$. Действительно, функционал $(h, v^+)_{0,\Gamma}$ над

$B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)$ можно переписать в виде функционала $(f_1, v)_{0,\Omega}$ над $H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)$ с $f_1 \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$.

Итак, пусть $h = 0$. Теперь вариационное тождество имеет вид

$$(f, v)_{0,\Omega} = \Phi_\tau(u, v). \quad (3.10)$$

Отметим, что $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$ принадлежат соответственно

$$H_p^{-1/2+1/p+s}(\Omega) = \tilde{H}_p^{-1/2+1/p+s}(\Omega) \text{ и } H_{p'}^{-1/2+1/p'-s}(\Omega) = \tilde{H}_{p'}^{-1/2+1/p'-s}(\Omega)$$

(см. лемму 9.1 в [21]). Эти пространства сопряжены относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, поэтому правая часть в (3.10) — непрерывный сопряженно-линейный функционал над пространством функций v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Формула (3.10) при всех $(s, t) \in Q$ определяет линейный оператор $\mathcal{N}(s, t)$, переводящий u в f и действующий ограниченным образом из $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ в $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$.*

Действительно, если задать u , то f определяется формулой (3.10) как сопряженно-линейный функционал над $H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)$. При этом

$$\|f\| \leq \sup \frac{|(f, v)_{0,\Omega}|}{\|v\|} = \sup \frac{|\Phi_\tau(u, v)|}{\|v\|} \leq C \frac{\|u\| \|v\|}{\|v\|} = C \|u\|$$

с очевидными индексами у всех норм. □

Задача Неймана теперь записывается уравнением $\mathcal{N}(s, t)u = f$. Если u — решение этого уравнения, то назовем его *обобщенным вариационным решением* задачи Неймана в $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$. Это ключевое определение в настоящей работе.

Конечно, при $p \neq 2$ или $p = 2, s \neq 0$ выяснить, когда этот оператор обратим, и тем самым получить теорему об однозначной разрешимости непосредственно не удастся. Однако, согласно теореме Саваре [43] о решениях вариационных задач, если u — решение задачи из $H^1(\Omega)$, но $f \in \tilde{H}^{-1+s}(\Omega)$ и $h \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$, где $0 < s < 1/2$, то $u \in H^{1+s}(\Omega)$. Точнее, в [43] доказана такая теорема для скалярного уравнения, но в обзоре [3] показано, что доказательство проходит и в случае систем (удовлетворяющих условию коэрцитивности на $H^1(\Omega)$); при этом уточнено утверждение о пространстве для f (только что указанным образом). Ниже в §4 будет объяснено, почему это существенно. Из этого утверждения о гладкости, как указывает Саваре, следует однозначная разрешимость задачи при $p = 2, |s| < 1/2$. Более точно, разрешимость при $0 < s < 1/2$ следует из утверждения о гладкости; при тех же s единственность следует из единственности при $s = 0$; при $-1/2 < s < 0$ существование и единственность получаются «по дуальности». Сейчас мы это поясним.

Дело в том, что операторы $\mathcal{N}$ в пространствах (для u), отвечающих точкам $(s, 1/p)$ и $(-s, 1/p')$, сопряжены. Это следует из «второй формулы Грина» вида

$$(Lu, v)_{0,\Omega} = (u, Lv)_{0,\Omega} \quad (3.11)$$

на функциях $u \in H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$, $v \in H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)$, подчиненных однородным условиям Неймана (как следствие двух формул вида (3.10)). Эти точки симметричны относительно центра квадрата Q , так как $|1/p - 1/2| = |1/2 - 1/p'|$.

Саваре воспользовался этой сопряженностью при $p = 2$. Он исходил из классического определения вариационного решения, но пользовался шкалой пространств с $p = 2$, $|s| < 1/2$. Еще раньше это сделал Костабель [12], к этой работе мы еще вернемся.

3.4. Теперь мы получим следующее усиление теоремы из [43].

ТЕОРЕМА 3.2. *Для заданной области Ω при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что оператор $\mathcal{N}(s, t)$ обратим, т.е. задача Неймана имеет одно и только одно обобщенное вариационное решение в $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ при любом $f \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$, если $|s| \leq 1/2 - \varepsilon$, $|1/p - 1/2| \leq \delta$.*

Эти неравенства определяют лежащий внутри Q прямоугольник, который мы обозначим через $Q_{\varepsilon, \delta}$.

Мы в дальнейшем позволим себе говорить о пространствах и об однозначной разрешимости задачи в точке (s, t) .

В доказательстве будет использована интерполяция, и для удобства мы сначала сделаем

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Операторы $\mathcal{N}(s, t)$ действуют одинаково на плотном во всех пространствах для и линейале $C^\infty(\bar{\Omega})$. Они инвариантны относительно комплексной интерполяции вдоль любого отрезка в квадрате Q .*

Здесь первое утверждение очевидно. Во втором утверждении имеется в виду следующее. Пусть точка (s_θ, t_θ) при росте θ от 0 до 1 пробегает отрезок между точками (s_0, t_0) и (s_1, t_1) . Обозначим через X_θ и Y_θ пространства соответственно функций u и f , отвечающие этим точкам. Это интерполяционные шкалы. Операторы $\mathcal{N}(s_0, t_0)$ и $\mathcal{N}(s_1, t_1)$ удовлетворяют условию согласованности в силу первого утверждения. Поэтому корректно определен оператор $\mathcal{N}$ на $X_0 + X_1$, действующий ограниченным образом из этого пространства в пространство $Y_0 + Y_1$. Рассмотрим его сужение $\mathcal{N}_\theta$ на X_θ . Из вариационного тождества видно, что если $\varphi(z)$ — функция из $F(X_0, X_1)$, то $\psi(z) = \mathcal{N}\varphi(z)$ — функция из $F(Y_0, Y_1)$. При вещественных $z = \theta$ получаем

$$\mathcal{N}_\theta = \mathcal{N}(s_\theta, t_\theta). \quad (3.12)$$

Это и есть нужная инвариантность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Мы сначала воспользуемся устойчивостью обратимости при интерполяции (см. предложение 2.2) в применении к пространствам

$$X_\theta = H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega) \quad \text{и} \quad Y_\theta = \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega) = \tilde{H}_p^{-3/2+1/p+s}(\Omega) \quad (3.13)$$

при $s = s_- = -1/2 + \varepsilon$ и $s = s_+ = 1/2 - \varepsilon$, приняв за крайние значения p_0 и p_1 точки с $t_0 = 1/p_0$ и $t_1 = 1/p_1$, близкие к 0 и 1 соответственно. Мы получим, что обратимость имеет место вдоль вертикальных отрезков с абсциссами $s_\pm$ некоторой длины $2\delta > 0$ с серединой в точке с $t = 1/2$.

Теперь рассмотрим горизонтальный отрезок с концами $(s_\pm, t)$, где $|t - 1/2| \leq \delta$, и проведем интерполяцию вдоль него. Пространства, отвечающие правому концу, непрерывно вложены в соответствующие пространства, отвечающие левому концу. В силу замечания в конце п. 2.3 можно воспользоваться предложением 2.3, и теперь однозначная разрешимость проверена для всех точек прямоугольника $Q_{\varepsilon, \delta}$. $\square$

Для $(s, 1/p) \in Q_{\varepsilon, \delta}$ получается двусторонняя оценка

$$\|u\|_{H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)}. \quad (3.14)$$

Следующее замечание вытекает из интерполяционного тождества.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все операторы $\mathcal{N}^{-1}(s, t)$ при $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$ совпадают на плотном в пространствах для f линейале $C_0^\infty(\Omega)$.

Получается и теорема о регулярности (или о повышении гладкости) решения, обобщающая теорему из [43] на p , близкие к 2. Для удобства ее формулировки положим

$$H_j = H_{p_j}^{1/2+1/p_j+s_j}(\Omega), \quad \tilde{H}_j = \tilde{H}_{p_j}^{-1/2-1/p'_j+s_j}(\Omega) \quad (j = 1, 2).$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть (s_j, t_j) , $j = 1, 2$, — две точки из $Q_{\varepsilon, \delta}$, и пусть $H_1 \supset H_2$. Тогда если $u \in H_1$, но $\mathcal{N}(s_1, t_1)u = f \in \tilde{H}_2$, то $u \in H_2$.

Это следует из того, что оператор $\mathcal{N}(s_2, t_2)$ является сужением оператора $\mathcal{N}(s_1, t_1)$ на H_2 и аналогичное утверждение верно для обратных операторов. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 3.2 вытекает однозначная разрешимость задачи Неймана с неоднородным граничным условием, в частности, задачи с $f = 0$ и $h \neq 0$, при $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$. При этом справедлива соответствующая априорная оценка для решения.

§4. Современная теория граничных задач в липшицевых областях: невариационный подход

Хорошо известны теоремы о регулярности решений при дополнительных предположениях о гладкости, см., например, [23] и [10], а также результаты для уравнений в области с границей, гладкой вне стратифицированных особенностей, см. работу [27], книги [28], [36], препринт [45] и приведенную там литературу. Но эти результаты находятся вне рамок настоящей статьи.

Здесь мы кратко остановимся на теории граничных задач в липшицевых областях, начало которой положили работы Кальдерона и Дальберга по задачам для уравнения Лапласа в 70-е–80-е годы и которая затем была продолжена в работах Фейбса, Джерисона, Кёнига, Веркоты и многих других математиков: см., в частности, работы [9], [48], [24], монографию [26] и приведенную там обширную литературу. У нас, к сожалению, нет места на описание того, как менялись подходы, мы лишь наметим общие черты теории в том виде, в котором она сложилась в работах Д. Митреа, М. Митреа и М. Тейлора с наиболее общими результатами, см. [30]–[34] и приведенные там ссылки.

В наших обозначениях это исследование задач в пространствах, отвечающих точкам границы квадрата Q , и в первую очередь точкам $(\pm 1/2, 1/2)$. При нашем подходе эти точки недоступны из-за отсутствия обычных теорем о следах функций из соболевских пространств $H^\sigma(\Omega)$ при $\sigma = 1/2$ и $3/2$. Граничные условия понимаются в смысле *некасательной сходимости*. А именно, фиксируются лежащие в Ω конусы $K(x)$, грубо говоря, одинаковых размеров с вершинами во всех точках $x \in \Gamma$. Граничное условие Дирихле $u^+(x) = g(x) \in L_2(\Gamma)$ понимается как сходимость $u(y) \rightarrow g(x)$ при $K(x) \ni y \rightarrow x$ почти всюду по лебеговой мере на Γ , но при этом требуется, чтобы максимальная функция решения $u^*(x) = \max_{K(x)} |u(y)|$ принадлежала $L_2(\Gamma)$. Для решений однородного

уравнения $Lu = 0$ это условие равносильно их принадлежности к $H^{1/2}(\Omega)$.¹⁾ При $g \in H^1(\Gamma)$ дополнительно требуется квадратичная интегрируемость максимальной функции градиента решения, что равносильно его принадлежности к $H^{3/2}(\Omega)$ в случае однородного уравнения. Граничное условие Неймана $\partial_{\nu_a} u^+(x) = h(x) \in L_2(\Gamma)$ понимается в смысле стремления $\nabla u(y) \cdot \nu_a(x)$ к h при $K(x) \ni y \rightarrow x$ почти всюду, при этом снова требуется квадратичная интегрируемость максимальной функции градиента решения.

Решение при этом строится при помощи потенциалов — ньютоновского, простого слоя и двойного слоя. При этом решающую роль играют теорема об ограниченности сингулярного интегрального оператора на липшицевой поверхности [11] и так называемые тождества Реллиха, см., в частности, [37]. Последние позволяют провести нелегкое доказательство однозначной разрешимости соответствующих уравнений теории потенциала, возникающих на Γ .

Далее результаты распространяются на точки $(\pm 1/2, 1/p)$ с p , близким к 2. Теперь это делается с использованием устойчивости обратимости при интерполяции — см. наше предложение 2.2. Затем проводятся очень тонкие рассуждения при $p = 1$ и $p = \infty$, после чего используется интерполяция для расширения множества точек, в которых уравнения теории потенциала однозначно разрешимы. Ср. [48] в случае уравнения Лапласа.

Точки внутри квадрата Q рассмотрены в литературе, насколько известно автору, только в скалярном случае [24], [21], [51], [33], [34]. Полученные результаты намного богаче наших: однозначная разрешимость задач Дирихле и Неймана доказана для точек открытого шестиугольника R_δ , отсекаемого от квадрата Q полосой между прямыми с угловым коэффициентом $1/2$, проходящими через точки $(-1/2, 1/2 + \delta)$ и $(1/2, 1/2 - \delta)$. Здесь положительное δ зависит от области Ω и не может быть равным $1/2$: есть подпирющие примеры даже для сколь угодно малого δ . Но если граница — класса C^1 , то однозначная разрешимость имеет место для всех точек квадрата Q . Решение при этом понимается как построенное при помощи потенциалов.

В этой теории есть, однако, «узкое место» — тождества Реллиха. Известные тождества Реллиха позволяют обобщить некоторые результаты для задачи Дирихле на системы 2-го порядка [31] (см. п. 6.3 ниже), но они недостаточны для рассмотрения задачи Неймана для общих систем. Нужные тождества найдены для задачи Неймана в случае системы Ламе теории упругости [14], [13]²⁾, а также для некоторых задач для лапласиана Ходжа на дифференциальных формах [31]. В общем случае, насколько известно автору, рассмотрена лишь задача с кривой производной вдоль достаточно регулярного скалярного поля, трансверсального к границе (в [9] и [22] поле непрерывно, в [32] оно имеет ограниченные компоненты, принадлежащие классу VMO).

Подход в настоящей работе, при котором за исходное принимается обобщенное определение вариационных решений и используются только теорема Саваре и интерполяция, примитивнее, но он не использует тождества Реллиха и позволяет беспрепятственно рассматривать матричную задачу Неймана, а вслед за ней спектральную задачу Неймана и задачу Пуанкаре–Стеклова в полной общности. В этом мы видим мотивировку нашего подхода.

¹⁾Для оператора Лапласа это, как и упоминаемое немного ниже утверждение об $H^{3/2}(\Omega)$, результат из [24]. По поводу общего случая см. [33, предложение 4.9] и [3, теорема 5.4].

²⁾В [14] $p = 2$. В [13] результат для $p \neq 2$ получен только при $n \leq 3$.

Как уже упоминалось, исследование вариационных решений при $p = 2$, $|s| < 1/2$ провел Костабель [12]. Он опирался на результаты Нечаса [37] для граничных задач, полученные при помощи тождеств Реллиха, и использовал двойственность и интерполяцию. Но в случае задачи Неймана для систем это получается только на основе результата Саваре. Наша работа примыкает к этим двум работам — [12] и [43].

Следует отметить, что в литературе традиционно особое внимание привлекает случай задачи Неймана с $u \in H_p^1(\Omega)$, $f \in \tilde{H}_p^{-1}(\Omega)$ и аналогичный случай задачи Дирихле с $u \in \tilde{H}_p^1(\Omega)$, $f \in H_p^{-1}(\Omega)$. Если здесь $n = 2$ или 3 и $p > 2$, то решения удовлетворяют условию Гёльдера. См., в частности, [18], [19] и указанную там литературу, а также следствие 12.2 в [33]. В наших обозначениях это случаи точек на диагонали $s+t = 1/2$. Ее точки правее и ниже центра квадрата как раз отвечают пространствам $H_p^s(\Omega)$ и $\tilde{H}_p^s(\Omega)$ с $p > 2$, и такие точки есть как в R_δ , так и в $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Следующее предложение говорит о согласованности определений.

Предложение 4.1. Пусть $(s, 1/p) \in R_\delta$ и $u \in H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ — решение скалярной задачи Неймана (1.2), (1.5) с $f \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$, $h \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, построенное при помощи потенциалов. Тогда оно является обобщенным вариационным решением.

Доказательство. Если решение построено при помощи потенциалов, то оно представимо через данные задачи классической интегральной формулой. В [29] для $p = 2$, $s = 0$ показано в теоремах 7.5 и 7.7, что оно является вариационным решением. Рассуждение обобщается на $p \in (1, \infty)$, $|s| < 1/2$. Ср. [33, п. 12] и [51]. Суть дела заключается в том, что классические формулы для граничных значений поверхностных потенциалов и их кономальных производных можно использовать в вариационных тождествах для этих потенциалов в слабой форме — в виде скалярных произведений на Γ и их продолжений. $\square$

Следствие 4.2. В скалярном случае теоремы 3.2 и 3.3 остаются справедливыми при $(s, t) \in R_\delta$ вместо $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Здесь и дальше мы предполагаем, что δ в индексах одно и то же. Для доказательства заметим, что в силу предложения 4.1 мы имеем существование обобщенного вариационного решения при всех $(s, t) \in R_\delta$ и любых правых частях в нужных пространствах. Единственность в любой точке (s, t) из R_δ следует из существования в точке, симметричной (s, t) относительно центра квадрата Q . $\square$

§5. Спектральная задача Неймана

Рассмотрим задачу

$$\lambda Lu = u \text{ в } \Omega, \quad \partial_{\nu_a} u^+ = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (5.1)$$

где λ — спектральный параметр.

Оператор $\mathcal{N}^{-1}(s, t)$ существует при $(s, t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$. Он действует ограниченным образом из $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ в $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ и поэтому как оператор в $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ компактен, а $\mathcal{N}(s, t)$ — оператор с дискретным спектром. Для

этих (s, t) в рамках наших пространств задача (5.1) эквивалентна уравнению

$$\mathcal{N}^{-1}(s, t)f = \lambda f. \quad (5.2)$$

Из вариационного тождества (3.10) видно, что собственные значения этого оператора положительны. При $p = 2$, $s = 0$ введем в $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ форму

$$[f_1, f_2]_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} = (\mathcal{N}^{-1}(0, 1/2)f_1, f_2)_{0, \Omega}, \quad (5.3)$$

где форма справа считается продолженной на прямое произведение пространств $H^1(\Omega)$ и $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (ср. [39] и [2]). *Форма (5.3) определяет скалярное произведение в $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$; соответствующая норма эквивалентна обычной норме в этом пространстве.*

Действительно, оценка нормы $[f] = [f, f]_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}^{1/2}$ через обычную норму $\|f\| = \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}$ получается при помощи обобщенного неравенства Шварца для формы справа в (5.3) с учетом ограниченности оператора $\mathcal{N}^{-1} = \mathcal{N}^{-1}(0, 1/2)$. В обратную сторону неравенство проверяется так:

$$\begin{aligned} \|f_1\| &\leq C_1 \|\mathcal{N}^{-1}f_1\|_{H^1(\Omega)} = C_1 \sup |(\mathcal{N}^{-1}f_1, f_2)_{0, \Omega}| / \|f_2\| \\ &= C_1 \sup |[f_1, f_2]_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}| / \|f_2\| \leq C_1 \sup [f_1][f_2] / \|f_2\| \leq C_2 [f_1]. \end{aligned} \quad \square$$

Оператор $\mathcal{N}^{-1}(0, 1/2)$ является самосопряженным в пространстве $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ относительно этого нового скалярного произведения и имеет в нем ортонормированный базис $\{n_j(x)\}_1^\infty$ из собственных функций.

ТЕОРЕМА 5.2. *Спектр оператора $\mathcal{N}^{-1}(s, t)$ в пространстве $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ и его собственные функции не зависят от $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$, и собственные функции $n_j(x)$ принадлежат пересечению*

$$\bigcap H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega) \quad (5.4)$$

по этим (s, t) . Они образуют полную систему во всех этих пространствах. Присоединенных функций нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совпадение спектров имеет место в силу предложения 2.4. Рассмотрим собственные функции.

Проверим сначала их независимость от s при любом фиксированном t . Напомним, что собственные значения отличны от нуля. Пусть $n(x)$ — собственная функция из $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ при некотором s , $|s| < 1/2$: $\mathcal{N}^{-1}(s, t)n(x) = \lambda_0 n(x)$. Тогда $n(x) \in H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$, поэтому $n(x) \in H_p^{1/p}(\Omega)$ и тем более $n(x) \in H_p^0(\Omega) = \tilde{H}_p^0(\Omega)$. Следовательно, $n(x) \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ при всех s , $|s| < 1/2$. Но тогда $n(x) \in H^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ при всех s , $|s| < 1/2$.

Теперь рассмотрим две точки (s_j, t_j) ($j = 1, 2$) на прямой $s + t = 1/2$. Мы хотим показать, что отвечающие фиксированному собственному значению λ_0 корневые подпространства X_1 и X_2 в этих точках являются собственными и совпадают. Замечание 1 в §3 позволяет предположить, что эти точки симметричны относительно точки $(s_0, t_0) = (0, 1/2)$. Тогда соответствующие операторы сопряжены, так что X_1 и X_2 содержат биортогональные базисы (см., например, [5, п. 5.2] в гильбертовом случае). Отсюда следует совпадение их размерностей и

их совпадение с размерностью собственного подпространства X_0 в точке (s_0, t_0) . Пусть $s_1 < 0$. Тогда собственные функции в X_0 остаются собственными в X_1 . Значит, в X_1 нет присоединенных функций. Тогда их нет и в X_2 . Но собственные функции в X_2 остаются собственными функциями в X_0 . Мы заключаем, что X_1 и X_2 — собственные подпространства и собственные функции в X_1 лежат на самом деле в X_2 .

Предположим, что в некоторой точке (s^*, t^*) оператор $\mathcal{N}^{-1}$ имеет присоединенную функцию $m(x)$: $\mathcal{N}^{-1}m(x) = \lambda_0 m(x) + n(x)$, где $\mathcal{N}^{-1}n(x) = \lambda_0 n(x)$. Тогда $m(x)$ принадлежит пространствам, отвечающим (s, t^*) при всех s , $|s| < 1/2$ (это проверяется, как для собственных функций в начале доказательства). Но при $s = 1/2 - t^*$ нет присоединенных функций. Значит, их вообще нет при $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$. Это, впрочем, следует и из проверяемой ниже полноты собственных функций. Она получается одновременно в пространствах $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ и $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$.

Заметим, что если она есть в точке (s', t') , то она есть в точках из $Q_{\varepsilon, \delta}$ на прямой $s+t = s'+t'$ выше и левее точки (s', t') в силу вложенности пространств (см. снова замечание 1 в §3) с учетом плотности вложений, а также во всех точках (s, t') с $|s| < 1/2$. Действительно, для точек левее (s', t') это снова следует из плотной вложенности пространств. Рассмотрим точку (s, t') правее (s', t') . Мы имеем при $p = 1/t'$

$$\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega) \supset \tilde{H}_p^0(\Omega) = H_p^0(\Omega) \supset H_p^{1/2+1/p+s'}(\Omega),$$

и так как в последнем пространстве есть полнота собственных функций, то она есть и в первом.

В силу этого замечания, стартуя от точки $(0, 1/2)$, получаем полноту собственных функций во всех точках (s, t) с $t \geq 1/2$.

Остается рассмотреть точки в $Q_{\varepsilon, \delta}$ ниже прямой $t = 1/2$. Воспользуемся следующим фактом (см. [47]). Пусть $p_2 \geq p_1$, $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Тогда имеет место непрерывное вложение

$$H_{p_1}^{\sigma_1}(\Omega) \subset H_{p_2}^{\sigma_2}(\Omega), \quad \text{если} \quad \sigma_1 - \sigma_2 \geq n \left[\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right]. \quad (5.5)$$

Отсюда выводим, что если полнота есть в пространствах с $p = p_1$, то она есть в пространствах с $p = p_2$ при условии

$$\frac{1}{n-1} > \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}.$$

Нетрудно видеть, что в конечное число шагов полнота собственных функций получается в $Q_{\varepsilon, \delta}$ на любом горизонтальном отрезке ниже прямой $t = 1/2$. $\square$

Добавим к сказанному, что дополнительные точки в квадрате Q , такие, что собственные функции принадлежат к соответствующим пространствам, можно указать при помощи теорем вложения (см., например, [46], [47]). (В частности, это точки левее $Q_{\varepsilon, \delta}$ и точки на прямых $s+t = \text{const}$, пересекающих это продолжение прямоугольника $Q_{\varepsilon, \delta}$, выше этого продолжения.) Но это не дает дополнительной информации об их гладкости.

Полнота получается также в пространствах, «промежуточных» между $\tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ и $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$. На этом не будем останавливаться.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система собственных функций $\{n_j(x)\}$ является безусловным базисом в пространствах, отвечающих точкам $(s, 1/2)$ с $|s| < 1/2$.

Это проверяется следующим образом (ср. [2], [3]). Пространства $\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)$, $|s| < 1/2$, являются гильбертовыми и на любом отрезке из этого интервала образуют интерполяционную шкалу. Изоморфизмы между ними можно установить при помощи степеней самосопряженного оператора $\mathcal{N}^{-1}(0, 1/2)$. А именно, при $|\tau| < 1/4$ оператор $\mathcal{N}^{-\tau}(0, 1/2)$ изоморфно отображает пространство $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ на пространство $\tilde{H}^{-1+2\tau}(\Omega)$. При этом он переводит базис $\{n_j(x)\}$ в себя с точностью до числовых множителей, и этот базис остается ортогональным, следовательно, безусловным базисом. Автоматически результат переносится на пространства $H^{1+s}(\Omega)$. $\square$

В скалярном случае все сказанное распространяется на область R_δ вместо $Q_{\varepsilon, \delta}$.

§6. Задача Дирихле и спектральная задача Дирихле

Хотя невариационный подход дает в случае задачи Дирихле более сильные результаты, мы сначала проведем рассмотрение обобщенных вариационных решений (они понадобятся в следующем параграфе) с применением теоремы Саваре и интерполяции, т.е. укажем аналоги наших результатов из §§3 и 5, но опустим доказательства ввиду их полной аналогии с доказательствами в этих параграфах. Условие коэрцитивности в настоящем параграфе накладывать не нужно.

6.1. Задача Дирихле с неоднородным граничным условием (1.4), где $g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, стандартно сводится к задаче с однородным граничным условием вычитанием из решения функции $u_0 \in H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ с заданным граничным значением g . При этом из f вычитается функция $f_0 \in \tilde{H}_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$, определяемая тождеством

$$(f_0, v)_{0, \Omega} = \Phi_\tau(u_0, v), \quad v \in H_p^{1/2+1/p'-s}(\Omega),$$

где мы фактически принимаем, что $\partial_{\nu_a} u_0^+ = 0$.

Итак, пусть граничное условие (1.4) однородно. Теперь будем пользоваться вариационным тождеством (3.10) с

$$u \in \tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega), \quad v \in \tilde{H}_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega), \quad f \in H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega), \quad (6.1)$$

где индексы снова подчинены условиям (3.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Формула (3.10) при всех $(s, t) \in Q$ определяет линейный оператор $\mathcal{D}(s, t)$, переводящий u в f и действующий ограниченным образом из пространства $\tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ в пространство $H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$.

Эти операторы совпадают на линеале $C_0^\infty(\Omega)$ и инвариантны относительно комплексной интерполяции вдоль любого отрезка в Q . Задачу Дирихле запишем теперь в виде уравнения $\mathcal{D}(s, t)u = f$. Если оно имеет решение u , то назовем его обобщенным вариационным решением задачи Дирихле в $\tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Для заданной области Ω при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что оператор $\mathcal{D}(s, t)$ обратим, т.е. задача

Дирихле имеет одно и только одно обобщенное вариационное решение $u \in \tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ при любом $f \in H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$, если $|s| \leq 1/2 - \varepsilon$, $|1/p - 1/2| \leq \delta$.

Мы снова обозначим через $Q_{\varepsilon, \delta}$ прямоугольник, определяемый этими неравенствами.

Соответствующая двусторонняя оценка имеет вид

$$\|u\|_{\tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{\tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)}. \quad (6.2)$$

Операторы $\mathcal{D}^{-1}(s, t)$ совпадают на линейале $C^\infty(\bar{\Omega})$ при $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$. Справедлив также аналог теоремы 3.3 о гладкости решений.

Эти результаты распространяются на задачу с неоднородным условием Дирихле, в частности с $f = 0$, $g \neq 0$.

6.2. Теперь рассмотрим спектральную задачу

$$\lambda Lu = u \text{ в } \Omega, \quad u^+ = 0. \quad (6.3)$$

Она эквивалентна уравнению

$$\mathcal{D}^{-1}(s, t)f = \lambda f. \quad (6.4)$$

Оператор $\mathcal{D}^{-1}(s, t)$ определен при $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$ и компактен в $H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$. В пространстве $H^{-1}(\Omega)$ (т.е. при $p = 2$, $s = 0$) введем форму

$$[f_1, f_2]_{H^{-1}(\Omega)} = (\mathcal{D}^{-1}(0, 1/2)f_1, f_2)_{0, \Omega}, \quad (6.5)$$

где правая часть продолжена на прямое произведение пространств $\tilde{H}^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Форма (6.4) определяет скалярное произведение в $H^{-1}(\Omega)$; соответствующая норма эквивалентна обычной норме в этом пространстве.

Оператор $\mathcal{D}(0, 1/2)$ является самосопряженным в пространстве $H^{-1}(\Omega)$ относительно этого скалярного произведения и имеет в нем ортонормированный базис $\{d_j(x)\}$ из собственных функций.

ТЕОРЕМА 6.4. Спектр оператора $\mathcal{D}^{-1}(s, t)$ в пространстве $H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega)$ и его собственные функции не зависят от $(s, t) \in Q_{\varepsilon, \delta}$, и собственные функции $d_j(x)$ принадлежат пересечению

$$\bigcap \tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega) \quad (6.6)$$

по этим (s, t) . Собственные функции образуют полную систему во всех этих пространствах. Присоединенных функций нет.

Система $\{d_j(x)\}$ образует безусловный базис в пространствах с $p = 2$.

6.3. Теперь мы учтем результаты из [31]. Следующее предложение могло бы содержаться в этой работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. При достаточно малом δ , зависящем от области Ω , задача Дирихле (1.1), (1.4) имеет единственное решение во всех точках полосы $Q_{0, \delta}$, которое строится при помощи потенциалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S\varphi$ — сужение потенциала $\mathcal{S}\varphi$ простого слоя на границу. В [31, гл. 3] доказано, что это обратимый оператор из $H_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в

$H_p^{1/2+s}(\Gamma)$ при $s = \pm 1/2$ и p , достаточно близких к 2: $|t - 1/2| < \delta$, где δ зависит от Ω . *Вещественная интерполяция*

$$[H_p^{s_0}, H_p^{s_1}]_{p,\theta} = B_p^{s_\theta}, \quad s_\theta = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad (6.7)$$

см. [46], [43] и [24], показывает, что S — обратимый оператор из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ при $|s| < 1/2$ и тех же p . Теперь решение задачи Дирихле в точке (s, t) полосы $Q_{0,\delta}$ строится по формуле

$$u = \Pi_0(f) + \mathcal{S}S^{-1}[g - \Pi_0(f)^+], \quad (6.8)$$

где $\Pi_0(f)$ — ньютоновский потенциал. Единственность следует из существования в точке, симметричной относительно центра квадрата Q . $\square$

Далее, как в случае задачи Неймана, проверяется, что решение, построенное при помощи потенциалов, является обобщенным вариационным решением. В скалярном случае все это верно в области R_δ . Поэтому окончательный результат состоит в следующем.

СЛЕДСТВИЕ 6.6. *Все результаты этого параграфа распространяются в матричном случае на полосу $Q_{0,\delta}$ и в скалярном случае на область R_δ .*

§7. Спектральная задача Пуанкаре–Стеклова

Здесь мы рассмотрим задачу для однородной системы $Lu = 0$ с граничным условием

$$u^+ = \lambda \partial_{\nu_a} u^+ \quad \text{на } \Gamma, \quad (7.1)$$

предполагая выполненным условие коэрцитивности из §3. При $p = 2$, $s = 0$ определен оператор, переводящий данные Неймана решений u в данные Дирихле:

$$\mathbf{N}: \partial_{\nu_a} u^+ \mapsto u \mapsto u^+. \quad (7.2)$$

Этот оператор, действующий ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в пространство $H^{1/2}(\Gamma)$, удобно рассматривать как компактный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$, самосопряженный относительно скалярного произведения

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)} = (\mathbf{N}^{-1}\varphi, \psi)_{0,\Gamma}, \quad (7.3)$$

где правая часть продолжена на прямое произведение пространств $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$. См. [2, п. 7] и [3]. Из собственных функций можно составить ортонормированный базис $\{e_j(x)\}_1^\infty$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Но оператор $\mathbf{N}$ можно расширить до обратимого оператора, во-первых, из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1/2+s}(\Gamma)$, $|s| < 1/2$, в силу результатов Саваре, во-вторых, из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ при $(s, t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ в силу наших теорем 3.2 и 6.2, и этот оператор компактен в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Здесь мы принимаем, что $\delta = \delta(\varepsilon)$ одинаково в двух теоремах. Получается

ТЕОРЕМА 7.1. *Спектр оператора $\mathbf{N}(s, t)$ в пространстве $B_p^{-1/2+s}(\Omega)$ и его собственные функции не зависят от $(s, t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$, и собственные функции $e_j(x)$ принадлежат пересечению*

$$\bigcap B_p^{1/2+s}(\Gamma) \quad (7.4)$$

по этим (s, t) . Они образуют полную систему в каждом из этих пространств. Присоединенных функций нет.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2 с учетом того, что

$$B_p^{-1/2+s_1}(\Gamma) \subset B_p^0(\Gamma) \subset B_p^{1/2+s_2}(\Gamma) \quad (s_1, s_2 \in (-1/2, 1/2))$$

и при $p_2 \geq p_1$, $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$

$$B_{p_1}^{\sigma_1}(\Gamma) \subset B_{p_2}^{\sigma_2}(\Gamma), \quad \text{если } \sigma_1 - \sigma_2 \geq (n-1) \left[\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right]. \quad \square$$

Система $\{e_j(x)\}$ в пространствах с $p = 2$ образует безусловный базис. См. [3].

В скалярном случае все результаты верны в области R_δ вместо $Q_{\varepsilon, \delta}$.

§8. Возможные обобщения

1. Желательно получить максимально полную возможную информацию о множестве точек (s, t) однозначной разрешимости. Из наших обсуждений видно, что это открытое выпуклое множество, симметричное относительно центра квадрата Q . Желательно также в общем случае минимизировать предположения о гладкости границы, при которых получается, что это множество совпадает с Q .

2. Слагаемое τu в (1.1) можно заменить произвольными младшими членами, такими, что оператор L остается формально самосопряженным и имеет только положительные собственные значения при однородных условиях Неймана и условиях Дирихле.

3. Можно рассмотреть задачи и без предположения о положительности собственных значений и даже без предположения о самосопряженности, допуская более общие младшие члены. В граничном условии Неймана можно добавить слагаемое нулевого порядка. Имеется обширная литература по слабым возмущениям самосопряженных операторов, в том числе определяемых билинейными формами. См. обзор [1] и приведенные там ссылки.

4. Можно исследовать регулярность решений фредгольмовых задач вместо однозначно разрешимых задач. В литературе имеются работы по устойчивости фредгольмовости и индекса при интерполяции, см., в частности, [44] и [25].

5. Можно распространить неспектральные результаты и спектральные результаты для задачи Пуанкаре–Стеклова на внешние задачи и задачи сопряжения. Ср. [2], [3]. Отметим, что простейшие задачи сопряжения рассмотрены в [43]. Но пример Эльшнера (см. [19, п. 5] и [18]) показывает, что в задачах сопряжения нужны добавочные предположения.

6. Результаты можно обобщать на смешанные задачи, если предположить, что граница Γ принадлежит классу $C^{1,1}$, см. теорему о гладкости в [42]. Вместо этого, возможно, достаточно предположить, что части границы с разными граничными условиями встречаются под углом, отделенным от 0 и π . Замечание об этом содержится в [42]; см. также [7].

7. Задачи «типа трещин» представляют специальный интерес. Это задачи с условиями сопряжения на незамкнутой поверхности. Ср. [4]. Отметим, что имеются глубокие результаты для таких задач при дополнительных предположениях о гладкости, полученные средствами теории эллиптических псевдодифференциальных операторов на поверхности с краем. См., в частности, [50], [20], [16], [17].

8. Мы упомянули в §4, что глубокие результаты для граничных задач были получены при помощи исследования операторов типа потенциала. Здесь мы добавим, что некоторые результаты об обратимости операторов типа потенциала в нашем контексте можно получить как следствия из однозначной разрешимости граничных задач. Ср. [12] и [4].

9. Во всех наших утверждениях, относящихся к Q и $Q_{\varepsilon, \delta}$, достаточно предполагать, что $a_{jk} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Вопрос о минимизации допустимой гладкости коэффициентов заслуживает дополнительного рассмотрения. Ср. [18], [19], [34] и цитируемые там работы.

Автор предполагает рассмотреть эти вопросы в отдельной подробной статье.

Результаты этой статьи докладывались автором на конференциях в Реховоте и Бедлево в июне 2006 г. Автор искренне благодарен Б. А. Амосову, В. А. Козлову, М. Митреа и Т. А. Суслиной за обсуждение работы и полезные замечания, позволившие улучшить изложение, а также Й. Рейбергу за интересные препринты [18] и [19].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. S. Agranovich, “Elliptic boundary problems”, in: *Encyclopaedia Math. Sci., Vol. 79, Partial Differential Equations IX*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 1–144.
- [2] М. С. Агранович, “Спектральные свойства операторов типа потенциала для класса сильно эллиптических систем на гладких и негладких поверхностях”, *Труды ММО*, **62** (2001), 3–53.
- [3] М. С. Агранович, “Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей”, *УМН*, **57**:5 (2002), 3–79.
- [4] M. S. Agranovich, “Strongly elliptic second order systems with spectral parameter in transmission conditions on a nonclosed surface”, in: *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol. 164, Birkhäuser, Basel, 2006, 1–21.
- [5] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley–VCH, Berlin, 1999.
- [6] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [7] R. Brown, “The mixed problem for Laplace’s equation in a class of Lipschitz domains”, *Comm. Partial Differential Equations*, **19**:7–8 (1994), 1217–1233.
- [8] A. P. Calderón, “Intermediate spaces and interpolation, the complex method”, *Studia Math.*, **24** (1964), 113–190.
- [9] A. P. Calderón, “Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitzian domains”, in: *Recent Progress in Fourier Analysis*, Elsevier, 1985, 33–48.
- [10] Y.-Z. Chen, L.-Ch. Wu, *Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems*, Transl. of Math. Monographs, vol. 174, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [11] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, “L’intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes”, *Ann. of Math.* (2), **116**:2 (1982), 361–387.
- [12] M. Costabel, “Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results”, *SIAM J. Math. Anal.*, **19**:3 (1988), 613–626.
- [13] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, “ L^p estimates for the three-dimensional systems of elastostatics in Lipschitz domains”, in: *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, vol. 122, M. Dekker, New York, 1990, 621–634.
- [14] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, “Boundary value problems for the system of elastostatics on Lipschitz domains”, *Duke Math. J.*, **57** (1988), 795–818.
- [15] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

- [16] R. Duduchava, F.-O. Speck, "Pseudodifferential operators on compact manifolds with Lipschitz boundary", *Math. Nachr.*, **160** (1993), 149–191.
- [17] R. Duduchava, W. L. Wendland, "The Wiener–Hopf method for systems of pseudodifferential equations with an application to crack problems", *Integral Equations Operator Theory*, **23**:3 (1995), 294–335.
- [18] J. Elschner, H.-K. Kaiser, J. Rehberg, G. Schmidt, $W^{1,q}$ regularity results for elliptic transmission problems on heterogeneous polyhedra, Preprint No. 1066, WIAS, Berlin, 2005.
- [19] J. Elschner, J. Rehberg, G. Schmidt, *Optimal regularity for elliptic transmission problems including C^1 interfaces*, Preprint No. 1994, WIAS, Berlin, 2006.
- [20] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [21] E. Fabes, O. Mendez, M. Mitrea, "Boundary layers on Sobolev–Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains", *J. Funct. Anal.*, **159**:2 (1998), 323–368.
- [22] W. Gao, "Layer potentials and boundary value problems for elliptic systems in Lipschitz domains", *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 377–399.
- [23] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [24] D. Jerison, C. E. Kenig, "The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains", *J. Funct. Anal.*, **130**:1 (1995), 161–219.
- [25] N. Kalton, M. Mitrea, "Stability results on interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:10 (1998), 3903–3922.
- [26] C. E. Kenig, *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [27] В. А. Кондратьев, "Граничные задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими точками", *Труды ММО*, **16** (1967), 209–292.
- [28] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, Math. Surveys Monographs, vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [29] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [30] D. Mitrea, M. Mitrea, "General second order strongly elliptic systems in low dimensional nonsmooth manifolds", in: *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems* (Fayetteville, AR, 2000), *Contemp. Math.*, vol. 227, 2001, 61–86.
- [31] D. Mitrea, M. Mitrea, M. Taylor, "Layer potentials, the Hodge Laplacian, and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **150**:713 (2001).
- [32] M. Mitrea, M. Taylor, "Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds", *J. Funct. Anal.*, **163**:2 (1999), 181–251.
- [33] M. Mitrea, M. Taylor, "Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem", *J. Funct. Anal.*, **176**:1 (2000), 1–79.
- [34] M. Mitrea, M. Taylor, "Sobolev and Besov space estimates for solutions to second order PDE on Lipschitz domains in manifolds with Dini or Hölder continuous metric tensors", *Comm. Partial Differential Equations*, **30**:1 (2005), 1–37.
- [35] T. Muramatu, "On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **9** (1974), 325–396.
- [36] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise-Smooth Boundaries*, De Gruyter Expositions in Math., vol. 13, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

- [37] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Paris; Academia, Prague, 1967.
- [38] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, Stud. Math. Appl., vol. 26, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [39] Б. В. Пальцев, “О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях”, *Матем. сб.*, **187**:4 (1996), 59–116.
- [40] T. J. Ransford, “The spectrum of an interpolated operator and analytic multivalued functions”, *Pacific J. Math.*, **121**:2 (1986), 445–466.
- [41] V. S. Rychkov, “On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains”, *J. London Math. Soc.* (2), **60**:1 (1999), 237–257.
- [42] G. Savaré, “Regularity and perturbation results for mixed second order elliptic problems”, *Comm. Partial Differential Equations*, **22**:5–6 (1997), 869–899.
- [43] G. Savaré, “Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains”, *J. Funct. Anal.*, **152**:1 (1998), 176–201.
- [44] И. Я. Шнейберг, “Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств”, *Матем. исслед.*, **9**:2 (1974), 214–227.
- [45] B.-W. Schulze, *The structure of operators on manifolds with polyhedral singularities*, Preprint 2005/05, Univ. Potsdam, Inst. für Mathematik, Potsdam, 2005.
- [46] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [47] H. Triebel, “Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers”, *Rev. Mat. Comput.*, **15**:2 (2002), 475–524.
- [48] G. Verchota, “Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equations in Lipschitz domains”, *J. Funct. Anal.*, **59**:2 (1984), 572–611.
- [49] A. Tabacco Vignati, M. Vignati, “Spectral theory and complex interpolation”, *J. Funct. Anal.*, **80**:2 (1988), 383–397.
- [50] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, “Уравнения в свертках в ограниченной области”, *УМН*, **20**:3 (1965), 89–152.
- [51] D. Z. Zanger, “The inhomogeneous Neumann problem in Lipschitz domains”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:9–10 (2000), 1771–1808.