Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности решений уравнения минимальных поверхностей, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 62–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:50:44

УДК 517.956

Устранимые особенности решений уравнения минимальных поверхностей*

© 2005. А. В. Покровский

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о «стирании» особенностей для решений уравнения минимальных поверхностей

$$\operatorname{div}((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f) = 0, \quad (1)$$

$\nabla f = (D_1 f, \dots, D_n f) = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$. Решением такого уравнения на непустом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) называется, как обычно, функция $f \in C^2(G)$, для которой всюду в G выполнено равенство (1). Множество всех таких f мы обозначаем через $M(G)$.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, которая в дальнейшем всегда предполагается ограниченной, E — замкнутое множество в G , $E \neq G$, и $\alpha \in (0, 1)$, и пусть $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(G)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых функций в G , все частные производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α на каждом компактном подмножестве области G . Множество E называется устранимым для решений уравнения минимальных поверхностей в классе $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(G)$, если для каждой функции $f \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(G)$, дважды непрерывно дифференцируемой на $G \setminus E$ и удовлетворяющей там равенству (1), существует такая функция $g \in M(G)$, что $f \equiv g$ на $G \setminus E$.

В принятых выше обозначениях сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы множество E было устранимым для решений уравнения минимальных поверхностей в классе $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело нулевую хаусдорфову меру порядка $n - 1 + \alpha$, т. е. $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$.*

Остановимся на истории вопроса. Хорошо известно, что условие $\operatorname{mes}^{n-1} E = 0$ является достаточным для того, чтобы всякая функция $f \in M(G \setminus E)$ продолжалась на E до функции из класса $M(G)$. Подчеркнем, что здесь не требуется никаких условий на поведение f вблизи E . Для случая, когда множество E состоит только из изолированных точек, этот результат был установлен Берсом [1], при $n = 2$ — Ниче [2], для компактных множеств E — Де Джорджи и Стампаккья [3], а в общем случае — Мирандой [4] (см. также [5, теорема 16.9]; другие доказательства даны в работах [6, 7]). Заметим, что аналогичный результат имеет место для голоморфных функций нескольких комплексных переменных: если G — область в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) и E — замкнутое множество в G

*Эта работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы Украины №0102U000917.

с $\text{mes}^{2n-2} E = 0$, то любая функция f , голоморфная в $G \setminus E$, допускает продолжение на E до функции, голоморфной в G (см. [8]). С другой стороны, для гармонических функций теоремы подобного типа, очевидно, не справедливы: нужна дополнительная информация о поведении функции f вблизи множества E . Приведем один из таких результатов, принадлежащий Е. П. Долженко (см. [9,10]): для того чтобы любая функция $f \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(G)$, гармоническая на множестве $G \setminus E$, продолжалась с $G \setminus E$ до функции, гармонической в G , необходимо и достаточно, чтобы E имело нулевую хаусдорфову меру порядка $n - 1 + \alpha$. Заметим, что для голоморфных функций более чем одного комплексного переменного результаты подобного типа не имеют места — ввиду теоремы Хартогса об устранимости компактных особенностей (см. [8]). Таким образом, теорема 1 является аналогом сформулированной теоремы Долженко об устранимых особенностях гармонических функций для решений уравнения минимальных поверхностей; в сочетании с другими приведенными выше результатами она показывает, что особые множества решений уравнения (1) наследуют свойства особых множеств как голоморфных функций нескольких комплексных переменных, так и гармонических функций.

Работа организована следующим образом. В первом параграфе напоминаются необходимые определения и приводится один вспомогательный результат, второй параграф посвящен доказательству теоремы 1.

§1. Определения и вспомогательные результаты

Всюду ниже выражения вида $C(\beta, \gamma, \dots)$ обозначают неотрицательные величины, зависящие лишь от $\beta, \gamma, \dots$; при этом в разных формулах величины с одним и тем же обозначением, вообще говоря, различаются между собой.

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, то $|x|$ обозначает евклидову норму вектора x , $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ и $B(0, r) =: B_r$.

Как обычно, $L_2(G)$ — пространство всех функций f , суммируемых с квадратом в области G (здесь и далее рассматриваются измеримые в G функции, принимающие только вещественные значения), с нормой $\|f\|_{L_2(G)} := (\int_G |f(x)|^2 dx)^{1/2}$, $W^{1,2}(G)$ — соболевское пространство всех функций $f \in L_2(G)$, имеющих обобщенные производные $D_i f \in L_2(G)$, $i = 1, \dots, n$, с нормой $\|f\|_{W^{1,2}(G)} := \|f\|_{L_2(G)} + \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{L_2(G)}$, $W_0^{1,2}(G)$ — замыкание по этой норме пространства $C_0^\infty(G)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в G , $C^1(G)$ и $C^1(\bar{G})$ — соответственно пространство всех функций f , непрерывно дифференцируемых в G , и его подпространство, состоящее из тех f , для которых f и ∇f непрерывно продолжаются на замкнутую область $\bar{G}$ (норма функции f в этих пространствах определяется формулой $\|f\|_{C^1(\bar{G})} := \|f\|_{C^1(G)} := \sup_G |f| + \sum_{i=1}^n \sup_G |D_i f|$). Если $0 < \alpha < 1$, то $C^\alpha(G)$ — пространство всех $f \in C(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^\alpha(G)} := \sup_G |f| + \sup_{x, y \in G, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

а $C^{1,\alpha}(G)$ — пространство всех $f \in C^1(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^{1,\alpha}(G)} := \sup_G |f| + \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{C^\alpha(G)}.$$

Каждая функция $f \in C^{1,\alpha}(G)$ по непрерывности продолжается вместе со своим градиентом на $\overline{G}$; множество всех таких продолженных функций обозначается через $C^{1,\alpha}(\overline{G})$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$. Напомним, что (внешней) мерой Хаусдорфа $\text{mes}^\gamma E$ множества E порядка γ называется конечный или равный $+\infty$ предел при $t \rightarrow 0$ величины $\inf(\sum_i r_i^\gamma)$, где инфимум берется по всем не более чем счетным множествам открытых шаров $\{B(x_i, r_i)\}_i$ с $r_i \leq t$, образующим покрытие множества E .

В доказательстве теоремы 1 будет использовано следующее вспомогательное утверждение. Для его формулировки напомним, что двоичным кубом в $\mathbb{R}^n$ называется всякий куб вида $[s_1 2^{-k}, (s_1 + 1) 2^{-k}] \times \cdots \times [s_n 2^{-k}, (s_n + 1) 2^{-k}]$, где $s_1, \dots, s_n$ — целые числа, а k — натуральное число. Если $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, то $Q(x, r)$ обозначает замкнутый куб с центром в x , ребра которого параллельны координатным осям, а их длина равна $2r$. При $t > 0$ мы полагаем $tQ(x, r) := Q(x, tr)$.

ЛЕММА 1 (см. [11; 12, с. 20–22]). Пусть $\{Q_l\}_{l=1}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) — конечное множество двоичных кубов, внутренности которых попарно не пересекаются, $Q_l = Q(x_l, r_l)$, $l = 1, \dots, m$. Тогда существует такое множество функций $\{\varphi_l\}_{l=1}^m \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, принимающих значения в интервале $[0, 1]$, что носитель функции φ_l содержится в кубе $\frac{3}{2}Q_l$, $\sup_{\frac{3}{2}Q_l} |\nabla \varphi_l| \leq C(n) r_l^{-1}$ ($l = 1, \dots, m$) и на множестве $\bigcup_{l=1}^m Q_l$ выполняется равенство $\sum_{l=1}^m \varphi_l(x) = 1$.

§2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\text{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$, а f — функция из класса $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $G \setminus E$ и удовлетворяющая там равенству (1). Покажем, что $f \in M(G)$. Это равносильно тому (см., например, [5]), что f является слабым решением уравнения (1) в G , т.е. для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$M_f(\varphi) := \int_G (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi \, dx = 0,$$

где $\nabla f \cdot \nabla \varphi = \sum_{i=1}^n D_i f D_i \varphi$. Не ограничивая общности, можно, очевидно, считать, что $f \in C^{1,\alpha}(G)$.

Зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$ и функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Поскольку $E \cap \text{supp } \varphi$ — компакт, то из определения хаусдорфовой меры и того, что каждый шар содержится в объединении не более чем 5^n двоичных кубов, длина ребра которых не превосходит радиуса этого шара, вытекает существование такого конечного множества двоичных кубов $\{Q_l\}_{l=1}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), $Q_l = Q(x_l, r_l)$, $l = 1, \dots, m$, внутренности которых попарно не пересекаются, что $E \cap \text{supp } \varphi \subset \bigcup_{l=1}^m Q_l \subset \bigcup_{l=1}^m \frac{3}{2}Q_l \subset G$ и $\sum_{l=1}^m r_l^{n-1+\alpha} \leq \varepsilon$. Пусть $\{\varphi_l\}_{l=1}^m$ — множество функций из леммы 1, образующих разбиение единицы для системы кубов $\{Q_l\}_{l=1}^m$. Из включения $f \in C^{1,\alpha}(G)$ следует, что $(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \in C^\alpha(G)$, откуда, пользуясь оценкой производных функций φ_l из леммы 1 и тем, что носитель функции $\varphi(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l)$ содержится в $G \setminus E$ (и, следовательно, $M_f(\varphi(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l)) = 0$),

получаем

$$\begin{aligned}
|M_f(\varphi)| &= \left| \sum_{l=1}^m M_f(\varphi\varphi_l) + M_f(\varphi(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l)) \right| \leq \sum_{l=1}^m |M_f(\varphi\varphi_l)| \\
&= \sum_{l=1}^m \left| \int_G (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla(\varphi\varphi_l) dx \right| \\
&= \sum_{l=1}^m \left| \int_{\frac{3}{2}Q_l} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla(\varphi\varphi_l) dx \right| \\
&= \sum_{l=1}^m \left| \int_{\frac{3}{2}Q_l} ((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f - (1 + |\nabla f(x_l)|^2)^{-1/2} \nabla f(x_l)) \cdot \nabla(\varphi\varphi_l) dx \right| \\
&\leq \sum_{l=1}^m C(f, \varphi, G, n, \alpha) r_l^\alpha r_l^{-1} r_l^n = C(f, \varphi, G, n, \alpha) \sum_{l=1}^m r_l^\alpha r_l^{-1} r_l^n \\
&\leq C(f, \varphi, G, n, \alpha) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Поскольку ε и φ выбирались произвольным образом, это означает, что $M_f(\varphi) = 0$ и, следовательно, $f \in M(G)$.

Достаточность условия теоремы 1 установлена.

Докажем необходимость.

Пусть $\text{mes}^{n-1+\alpha} E > 0$. Поскольку область G ограничена, то, не умаляя общности, можно считать, что $G = B_R$ при некотором $R > 0$, а выделяя в случае необходимости подмножество, — что $E \subseteq B_R$. По лемме Фростмана (см. [13]) существует такая борелевская мера μ с носителем на E , что $\mu(E) > 0$ и $\mu(B(x, r)) \leq r^{n-1+\alpha}$ для каждого шара $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $B_R^{1,\alpha}$ единичный шар в пространстве $C^{1,\alpha}(\overline{B_R})$.

Пусть $t > 0$ и $f \in B_R^{1,\alpha}$. Рассмотрим функцию $g_t \in W_0^{1,2}(B_R)$, которая является решением неоднородного уравнения

$$\text{div}((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla g_t) = t\mu. \quad (2)$$

Равенство (2) понимается в обобщенном смысле, оно означает, что для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ выполняется тождество

$$- \int_{B_R} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla g_t \cdot \nabla \varphi dx = t \int \varphi d\mu. \quad (3)$$

Функция g_t всегда существует, единственна и представляется в виде $g_t(x) = t \int_{B_R} G_f(x, y) d\mu$, где $G_f(x, y)$ — функция Грина для равномерно эллиптического оператора $L_f u = \text{div}((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla u)$ в шаре B_R (см. [14]). Покажем, что при малых t отображение A_t , переводящее f в функцию $g_t =: A_t f$, будет отображением множества $B_R^{1,\alpha}$ в себя. Поскольку $A_t = tA$, где $A := A_1$, то достаточно установить, что $g := Af \in C^{1,\alpha}(B_R)$ и

$$\sup\{\|Af\|_{C^{1,\alpha}(B_R)} : f \in B_R^{1,\alpha}\} < \infty. \quad (4)$$

Для этого воспользуемся приемом, предложенным в [15]. Пусть h — образ функции, тождественно равной нулю, при отображении A и $u = \nabla h$. Тогда h гармо-

нича в $B_R \setminus E$, принадлежит классу $C^{1,\alpha}(\overline{B_R})$ (см. [10, 15]), и, следовательно, $u \in C^\alpha(B_R)$, а уравнение (2) при $t = 1$ равносильно уравнению

$$\operatorname{div}((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla g) = \operatorname{div} u.$$

Элементарно проверяется, что $(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \in C^\alpha(B_R)$ и

$$\|(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} |C^\alpha(B_R)\| \leq 1 + \|f|C^{1,\alpha}(B_R)\| \leq 2.$$

Отсюда следует (см. [16, теоремы 8.33, 8.34], что $g \in C^{1,\alpha}(\overline{B_R})$ и

$$\|g|C^{1,\alpha}(B_R)\| \leq C(n, R) \left(\sup_{B_R} |g| + \|u|C^\alpha(B_R)\| \right). \quad (5)$$

С другой стороны (см. [16, теорема 8.16]), имеет место оценка

$$\sup_{B_R} |g| \leq C(n, R) \sup_{B_R} |u|. \quad (6)$$

Объединяя (5) и (6), получаем

$$\|g|C^{1,\alpha}(B_R)\| \leq C(n, R) \|u|C^\alpha(B_R)\| \leq C(n, R) \|h|C^{1,\alpha}(B_R)\|,$$

откуда вытекает (4). Следовательно, существует такое $t > 0$, что A_t отображает шар $B_R^{1,\alpha}$ в себя. Зафиксируем такое t и покажем, что отображение A_t непрерывно по норме пространства $C^1(\overline{B_R})$.

Пусть последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ функций из $B_R^{1,\alpha}$ сходится при $i \rightarrow \infty$ к функции f по норме пространства $C^1(\overline{B_R})$. Очевидно, что $f \in B_R^{1,\alpha}$. Докажем, что $A_t f_i \rightarrow A_t f$ при $i \rightarrow \infty$. Поскольку $A_t = tA$, то для этого достаточно установить, что $\|A f_i - A f|C^1(\overline{B_R})\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Из определения функций $A f_i$ и $A f$ следует, что для каждой функции $\varphi \in W_0^{1,2}(B_R)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R} (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2} \nabla(A f_i) \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{B_R} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla(A f) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \int_{B_R} (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2} \nabla(A f_i - A f) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &\quad - \int_{B_R} [(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2}] \nabla(A f) \cdot \nabla \varphi \, dx, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2} \nabla(A f_i - A f) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \int_{B_R} [(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2}] \nabla(A f) \cdot \nabla \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\varphi = A f_i - A f$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2} |\nabla(A f_i - A f)|^2 \, dx \\ &= \int_{B_R} [(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2}] \nabla(A f) \cdot \nabla(A f_i - A f) \, dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством Гёльдера и тем, что $\sup_{B_R} |\nabla f| \leq 1$, получаем из (7) следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{B_R} |\nabla(Af_i - Af)|^2 dx &\leq \int_{B_R} (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2} |\nabla(Af_i - Af)|^2 dx \\ &\leq \left(\sup_{B_R} |(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2}| \right) \|\nabla(Af)\|_{L_2(B_R)} \| \\ &\quad \times \|\nabla(Af_i - Af)\|_{L_2(B_R)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\|\nabla(Af_i - Af)\|_{L_2(B_R)} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sup_{B_R} |(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - (1 + |\nabla f_i|^2)^{-1/2}| \right) \|\nabla(Af)\|_{L_2(B_R)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $i \rightarrow \infty$, то $f_i \rightarrow f$ в $C^1(\overline{B_R})$ и правая часть формулы (8) стремится к нулю. Применяя неравенство Пуанкаре $\|\varphi\|_{L_2(B_R)} \leq C(n)R\|\nabla\varphi\|_{L_2(B_R)}$ (для всех $\varphi \in W_0^{1,2}(B_R)$), отсюда заключаем, что $Af_i \rightarrow Af$ в $W^{1,2}(B_R)$ при $i \rightarrow \infty$. С другой стороны, по теореме Арцела–Асколи последовательность $\{Af_i\}_{i=1}^\infty$ предкомпактна в $C^1(\overline{B_R})$, откуда следует, что $Af_i \rightarrow Af$ в $C^1(\overline{B_R})$. Это доказывает непрерывность отображения A_t .

Таким образом, A_t является непрерывным отображением в себя выпуклого компактного множества $B_R^{1,\alpha}$ в банаховом пространстве $C^1(\overline{B_R})$. По теореме Шаудера (см., например, [16, теорема 11.1]) это отображение имеет неподвижную точку $v \in B_R^{1,\alpha}$. Это означает, что v удовлетворяет в обобщенном смысле равенству

$$\operatorname{div}((1 + |\nabla v|^2)^{-1/2} \nabla v) = t\mu$$

в шаре B_R . Следовательно, $v \in C^{1,\alpha}(B_R)$, сужение функции v на $G \setminus E$ — функция из $M(B_R \setminus E)$, но $v \notin M(B_R)$.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bers L. Isolated singularities of minimal surfaces. Ann. Math., **53**, 364–386 (1951).
2. Nitsche J. C. C. On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Amer. Math. Soc., **71**, 195–270 (1965).
3. De Giorgi E., Stampacchia G. Sulla singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **38**, 352–357 (1965).
4. Miranda M. Sulla singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, **4**, 129–132 (1977).
5. Джуссти Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. Мир, М., 1989.
6. Anzellotti G. Dirichlet problem and removable singularities for functional with linear growth. Boll. Un. Mat. Ital. C (5), **81**, 141–159 (1981).
7. Simon L. On a theorem of De Giorgi and Stampacchia. Math. Z., **155**, 199–204 (1977).
8. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. Наука, М., 1985.
9. Долженко Е. П. О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов. Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, №5, 1113–1130 (1964).
10. Долженко Е. П. Об особых точках непрерывных гармонических функций. Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, №6, 1251–1270 (1964).

11. *Harvey R., Polking J. C.* Removable singularities of solutions of linear partial differential equations. *Acta Math.*, **125**, №1/2, 39–56 (1970).
12. *Тарханов Н. Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск, Наука, 1991.
13. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. Мир, М., 1971.
14. *Littman W., Stampaccia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, **17**, №3, 43–77 (1963).
15. *Lieberman G. M.* Sharp form of estimates for subsolutions and supersolutions of quasilinear elliptic equations involving measures. *Commun. Partial Diff. Equations*, **18**, №7&8, 1191–1212 (1993).
16. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, М., 1989.

Институт математики НАН Украины
e-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
6 мая 2004 г.