Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Вольберг, Ф. Пехерсторфер, П. М. Юдицкий, Асимптотика ортогональных многочленов в случае, не покрываемом теоремой Сегё, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 22–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:58:49

УДК 517.53

Асимптотика ортогональных многочленов в случае, не покрываемом теоремой Сегё*

© 2006. А. ВОЛЬБЕРГ, Ф. ПЕХЕРСТОРФЕР, П. ЮДИЦКИЙ

Памяти Бориса Яковлевича Левина посвящается

§1. Введение и основные результаты

Введем величину, исследованную Виденским и Широковым в работе [6].

Пусть X — некоторое банахово пространство аналитических функций в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, E — конечное множество точек из $\mathbb{D}$, а B_E — произведение Бляшке, обращающееся в нуль в точности в точках множества E . Характеризация множеств нулей функций из пространства X — важная и трудная задача, тесно связанная с оценкой величины

$$\phi(E, X) := \inf\{\|f\| : f \in X, f|_E = 0, f(0) = B_E(0)\}.$$

Для понимания структуры множеств нулей функций из пространства X важную роль играет последовательность

$$r_n(X) := \sup\{\phi(E, X) : \text{card } E = n\}.$$

Очень интересные исследования связаны с асимптотикой последовательности $r_n(l_a^1)$, где l_a^1 — пространство аналитических функций, для которых ряд, составленный из коэффициентов Тейлора, абсолютно суммируем. В работах Шеффера [5], Глускина–Майера–Пажора [1] и Квеффелека [4] доказано, что $r_n(l_a^1) \asymp \sqrt{n}$. В действительности Шеффер, исследования которого были мотивированы работами ван дер Вардена, изучал асимптотику другой величины, которая оказалась равной $r_n(l_a^1)$ (см. [5], [1], [2]). В работе [2] содержится простое доказательство равенства величины $r_n(l_a^1)$ этой другой величине

$$k_n := \sup\{|\det T| \|T^{-1}\| : \|T\| \leq 1\},$$

где точная верхняя грань берется по всем обратимым матрицам порядка n и по всевозможным нормам. Если же зафиксировать норму матрицы T как оператора, действующего в заданном n -мерном банаховом пространстве, то можно рассмотреть аналог величины k_n или задачу о нахождении наилучшей оценки

$$\|T^{-1}\| \leq \Phi_n(\delta),$$

где рассматриваются все обратимые операторы T в n -мерном банаховом пространстве A , такие, что $\|T\| \leq 1$, а спектральный радиус $r(T^{-1})$ равен δ . Эти

*Работа первого автора частично поддержана грантом NSF DMS-0200713, второго — Австрийским фондом FWF, проект P16390-N04, третьего — Фондом Мари Кюри, контракт MIF1-СТ-2005-006966.

оценки подробно рассмотрены в статье Никольского [2], где рассматривается также следующий вариант этой задачи: условие $\|T\| \leq 1$ заменяется условием

$$\|f(T)\| \leq C\|f\|,$$

которое должно выполняться для любого многочлена f . Иными словами, предполагается, что оператор T допускает функциональное исчисление относительно пространства (алгебры) функций A . Легко видеть, что для банаховых алгебр $A = X$ это приводит к оценкам еще одной интересной величины,

$$\text{cap}_X(E) := \inf\{\|f\|_X : f(0) = 1, f|_E = 0\}.$$

Непосредственно видно, что величины $\phi(E, X)$ и $\text{cap}_X(E)$ существенно связаны друг с другом.

В работе [2] даны точные оценки величины $\text{cap}_{B_{p,q}^s}(E)$. Здесь $B_{p,q}^s$ — класс Бесова (см. определение ниже). Заметим, что

$$B_{\infty,\infty}^s = \Lambda^s$$

для нецелых s , в то время как для целых s имеет место лишь строгое вложение

$$\Lambda^s \subset B_{\infty,\infty}^s. \quad (1)$$

Один из результатов в [2] в удобной для нас форме выглядит так:

$$r_n(B_{\infty,\infty}^s) \asymp n^s.$$

Согласно предыдущему замечанию, отсюда следует, что $r_n(\Lambda^s) \asymp n^s$ при нецелых s . Для целых s вопрос кажется более тонким. Действительно, данное Виденским и Широковым [6, Theorem 3.1] доказательство этого факта для целых s весьма сложно.

Здесь мы собираемся дать очень простое доказательство. Оно следует идеям из работ [2] и [6], но является весьма коротким. Мы рассмотрим случай $s = 1$.

Мы обозначили единичный круг символом $\mathbb{D}$. Пусть $\mathbb{T}$ — его граница.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть B — произведение Бляшке с n нулями в круге $\mathbb{D}$. Тогда существует внешняя функция ϕ со следующими свойствами:

$$\|(B\phi)'\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq Cn, \quad (2)$$

$$\phi(0) = 1, \quad (3)$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq A. \quad (4)$$

Здесь C и A — абсолютные постоянные.

1.1. Классы $B_{p,q}^s$ и Λ^s . Пусть W_n — ядра Валле-Пуссена, определяемые в терминах их коэффициентов Фурье следующим образом: $W_0(z) = 1 + z$, а при $n \geq 1$ имеем $\widehat{W_n}(2^n) = 1$, $\widehat{W_n}(k) = 0$ для $k \notin (2^{n-1}, 2^{n+1})$ и $\widehat{W_n}$ — линейная функция на каждом из отрезков $[2^{n-1}, 2^n]$ и $[2^n, 2^{n+1}]$.

Класс $B_{p,q}^s$ состоит из функций $f(z) = \sum \hat{f}(n)z^n$, аналитических в $\mathbb{D}$ и таких, что последовательность $\{2^{ns}\|f \star W_n\|_{L^p(\mathbb{T})}\}$ принадлежит пространству l^q .

Для целого $s = n$ класс Λ^s состоит из всех функций, аналитических в $\mathbb{D}$, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{\Lambda^n} := \|f^{(n)}\|_{H^\infty}.$$

Если $s = n + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то включение $f \in \Lambda^s$ означает, что конечна не только эта полунорма, но и полунорма

$$\|f^{(n)}\|_{\Lambda^\alpha} := \sup_{z, \zeta \in \mathbb{D}, z \neq \zeta} \frac{|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(\zeta)|}{|z - \zeta|^\alpha}.$$

Благодарность. Мы признательны рецензенту за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

§2. Доказательство теоремы 1.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{B}$ — произведение Бляшке с теми же нулями $\{z_1, \dots, z_n\}$, что и у B , но в круге $(1 + \frac{1}{n})\mathbb{D}$. Положим $R = 1 + \frac{1}{n}$. Тогда

$$\tilde{B} = \prod_{k=1}^n \frac{\frac{z}{R} - \frac{z_k}{R}}{1 - \frac{1}{R^2} \bar{z}_k z}.$$

Мы можем написать

$$R^n \tilde{B} =: B\phi_0,$$

рассматривая это равенство как определение функции ϕ_0 .

Таким образом,

$$\phi_0(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{z}_k z}{1 - \frac{1}{R^2} \bar{z}_k z}.$$

Очевидно, что если $z \in \mathbb{T}$, то $|\tilde{B}| < 1$, и поэтому

$$|\phi_0(z)| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq A.$$

Итак, неравенство (4) выполнено. Кроме того, $\phi_0(0) = 1$. Чтобы проверить неравенство (2), запишем формулу Коши для функции $\tilde{B}(\zeta_0)$ при $\zeta_0 \in \mathbb{T}$:

$$\tilde{B}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\frac{1}{n})\mathbb{T}} \frac{\tilde{B}(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Поэтому

$$|\tilde{B}'(\zeta_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(1+\frac{1}{n})\mathbb{T}} \frac{|\tilde{B}(\zeta)|}{|\zeta - \zeta_0|^2} dm(\zeta)$$

и, следовательно,

$$|\tilde{B}'(\zeta_0)| \leq C \int_{(1+\frac{1}{n})\mathbb{T}} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^2} dm(\zeta) \leq Cn.$$

Но тогда

$$|(B\phi_0)'(\zeta_0)| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |\tilde{B}'(\zeta_0)| \leq ACn.$$

□

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Заменяя $R = 1 + \frac{1}{n}$ на $R = 1 + \frac{\varepsilon}{n}$, можно получить для ϕ_0 улучшенную оценку $\|\phi_0\|_\infty \leq 1 + \varepsilon$, но при этом ухудшится оценка (2), константа в которой будет зависеть от ε :

$$\|(B\phi)'\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C_\varepsilon n. \quad (5)$$

2. Мы также доказали, что

$$\|B\phi_0\|_{\Lambda^s} \leq Cn^s.$$

При $s \in (0, 1)$ это немедленно следует из неравенств (2) и (4). Доказательство для $s = 1$ мы только что дали. При $s > 1$ доказательство следует в точности той же схеме, но продифференцировать придется большее число раз.

Второе замечание содержит утверждение теоремы 3.1 из [6].

Первое замечание играет ключевую роль в данной работе, в которой мы рассматриваем асимптотику многочленов, ортогональных относительно меры μ следующего типа:

$$d\mu := \frac{dm}{|\psi(e^{i\theta})|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \delta_{z_k},$$

где точки z_k образуют последовательность Бляшке.

В этой ситуации следует различать последовательности Бляшке внутри и вне $\mathbb{D}$. Второй случай гораздо более интересен, поскольку ожидаемая асимптотика $L^2(\mu)$ -ортогональных многочленов отличается от классической асимптотики Сегё, в которой все μ_k нулевые.

Ортогонализация относительно описанных выше мер представляет собой попытку обобщить результаты работы Пехерсторфера и Юдицкого [3], где предполагалось, что «точечный спектр» лежит на вещественной прямой. Эта работа обобщает результаты о сильной асимптотике для ортогональных многочленов, удовлетворяющих условию Сегё на вещественном интервале, на случай, когда мера дополнительно имеет счетное множество нагрузок вне этого интервала. Мы предполагаем, что это множество вне интервала имеет в качестве точек накопления только концы интервала и что выполнено условие Бляшке. При этих условиях получены результаты о сильной асимптотике как для самих ортогональных многочленов, так и для их старших коэффициентов. Асимптотическое поведение описывается в терминах функции Сегё для абсолютно непрерывной части и произведения Бляшке, отвечающего дополнительным точкам ненулевой меры.

§3. Ортогональные многочлены и гладкость функции $B\phi$

Пусть мера μ определена, как и выше, причем

$$|z_k| > 1, \quad \sum_k (|z_k| - 1) < \infty,$$

и пусть $\{P_n\}$ — последовательность аналитических многочленов, ортонормированных относительно меры μ .

Запишем эти многочлены в виде

$$P_n(z) = \tau_n z^n + \cdots + a_{0n}.$$

Мы хотим найти предел коэффициентов τ_n (будет доказано, что во многих случаях он существует).

Рассмотрим также рациональные функции вида

$$R_{n,m}(z) = \eta_{n,m}z^n + \cdots + a_{0n} + \cdots + a_{m,n}z^m, \quad (6)$$

где $m = -n$ или $-(n-1)$. Мы хотим, чтобы они были ортогональны в $L^2(\mu)$ и имели в этом пространстве единичную норму. Обсудим асимптотику «старшего» коэффициента $\eta_n := \eta_{n, -(n-1)}$.

Приведем наши два основных результата. Условимся, что все τ_n и $\eta_n = \eta_{n, -(n-1)}$ положительны и что $B(0), \psi(0)$ также положительны. В первой теореме речь идет о возмущениях так называемых CMV-матриц (матриц Кантеро–Моралы–Веласкеса).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\{z_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая, как и выше, условию Бляшке, $\{\mu_k\}$ — произвольная суммируемая неотрицательная последовательность, а функция ψ отделена от нуля. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = B(0)\psi(0).$$

Асимптотика последовательности τ_n кажется более тонкой. Для определенных геометрических конфигураций последовательности $\{z_k\}$ никаких дополнительных предположений относительно $\{\mu_k\}$ не требуется. Например, это так, если точки последовательности $\{z_k\}$ сходятся в некоторой звезде Штольца лишь к замкнутому множеству $E \subset \mathbb{T}$, удовлетворяющему условиям $m(E) = 0$ и $\sum l_n \log \frac{1}{l_n} < \infty$ (здесь l_n — длины интервалов, составляющих дополнение множества E ; такие множества называются подмножествами Карлесона в $\mathbb{T}$). Частным случаем такой геометрии является случай вещественных $\{z_k\}$, рассмотренный в [3]. Но если $\{z_k\}$ — произвольная последовательность Бляшке вне $\mathbb{D}$, то нам все же потребуется одно предположение о последовательности $\{\mu_k\}$, заключающееся в том, что ряд $\sum_k \mu_k$ сходится с определенной скоростью. Вот это предположение:

$$\sum_{1 < |z_k| < 1 + \frac{1}{n}} \mu_k \leq C_A \frac{1}{(\log n)^A} \quad \text{для любого } A. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\{z_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая, как и выше, условию Бляшке, $\{\mu_k\}$ — произвольная суммируемая последовательность, удовлетворяющая дополнительному условию (7), а функция ψ отделена от нуля и бесконечности. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = B(0)\psi(0).$$

§4. Доказательство теоремы 3.1

ЛЕММА 4.1. Решение экстремальной задачи

$$\text{найти } \eta_n = \sup\{|\eta| : R(z) = \eta z^n + \cdots + a z^{-(n-1)}, \|R\|_{L^2(\mu)} \leq 1\}$$

достигается на функции $R = R_n := R_{n, -(n-1)}$ из (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим другую экстремальную задачу $\inf\{\|Q\|_{L^2(\mu)} : Q(z) = z^n + \cdots + a z^{-(n-1)}\}$. Разумеется, это $L^2(\mu)$ -ортогональные функции. Наши экстремальные функции R_n суть в точности $Q/\|Q\|_{L^2(\mu)}$, так что инфимум $\inf\|Q\|_{L^2(\mu)}$ означает то же, что и супремум $\sup|\eta|$. $\square$

4.1. Оценка снизу для η_n . Пусть $\zeta_k = 1/\bar{z}_k$, пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$, и пусть B_n — частичное произведение Бляшке, построенное по точкам

$$\zeta_k : |\zeta_k| < 1 - \frac{1}{k_n},$$

где $k_n := [\varepsilon_n n]$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Последовательность ε_n будет выбрана ниже.

Без ограничения общности считаем, что

$$\sum_k (1 - |\zeta_k|) < 1.$$

Число нулей произведения B_n не превосходит k_n .

Возьмем $l_n := [A_n \varepsilon_n n]$, где A_n возрастает к бесконечности, но настолько медленно, что $A_n \varepsilon_n \rightarrow 0$. Положим

$$R := 1 + \frac{1}{l_n}.$$

Пусть $\tilde{B}$ — произведение Бляшке в круге $R\mathbb{D}$, имеющее те же нули, что и B_n . Как и в теореме 1.1, введем функцию ϕ формулой

$$R^{k_n} \tilde{B} =: B\phi, \quad (8)$$

или

$$\phi := \prod_{k=1}^{k_n} \frac{1 - \bar{\zeta}_k z}{1 - \frac{1}{R^2} \bar{\zeta}_k z}.$$

В теореме 1.1 было доказано, что

$$\|B\phi\|_{\Lambda^1} \leqslant Cl_n.$$

Из (1) следует

$$\|B\phi\|_{B_{\infty,\infty}^1} \leqslant Cl_n.$$

Пусть 2^k — наибольшее число такого вида, меньшее, чем n . Рассмотрим последовательность $W_k, W_{k+1}, \dots$ (мы ввели ядра Валле-Пуссена в §1). Мы только что отметили, что

$$\|W_j \star B\phi\|_\infty \leqslant Cl_n 2^{-j}, \quad j \geqslant k. \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$\left\| \sum_{j \geqslant k} W_j \star B\phi \right\|_\infty \leqslant C \frac{l_n}{n}. \quad (10)$$

Поэтому если V_k — модифицированное ядро Валле-Пуссена, задаваемое формулами

$$\widehat{V}_k(j) = 1, \quad j \in [-2^{k-1}, 2^{k-1}], \quad \widehat{V}_k(j) = 0, \quad |j| \geqslant 2^k,$$

и линейные в остальных случаях, то из (10) мы заключаем, что

$$\|V_k \star (B\phi) - B\phi\|_\infty \leqslant Cl_n/n. \quad (11)$$

Рассмотрим модифицированное ядро Валле-Пуссена VP_n , задаваемое формулами

$$\widehat{VP}_n(j) = 1, \quad j \in [-n, n], \quad \widehat{VP}_n(j) = 0, \quad |j| \geqslant n,$$

и линейные в остальных случаях. Легко видеть, что мы доказали (используя соотношение $V_k \star VP_n = V_k$), что

$$\|VP_n \star (B\phi) - B\phi\|_\infty \leq 4Cl_n/n \leq C'\delta_n, \quad (12)$$

где $\delta_n \rightarrow 0$.

Отметим следующую оценку сверху для ϕ (имея в виду, что $l_n \approx A_n k_n$):

$$|(B_n\phi)(z)| = (1 + 1/l_n)^{k_n} |\tilde{B}(\zeta)| \leq e^{C/A_n} =: 1 + \delta'_n, \quad \delta'_n \rightarrow 0. \quad (13)$$

Рассмотрим функцию $G_n = VP_n \star (B\phi)$, и пусть $r_n = G_n/z^n$. Поскольку $\phi(0) = 1$, очевидно, что

$$|G_n(0) - B(0)\phi(0)| = |G_n(0) - B(0)| \leq \delta_n. \quad (14)$$

Рациональная функция r_n имеет нужный нам тип, но только после применения симметрии $n \rightarrow -n$ на $\mathbb{Z}$.

Оценим норму, задаваемую формулой

$$\|r_n\|^2 := \int_{\mathbb{T}} |r_n|^2 dm + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |r_n(\zeta_k)|^2.$$

Из (12) и (13) следует, что $|r_n| \leq 1 + C(\delta_n + \delta'_n)$ на $\mathbb{T}$. Поэтому $\int_{\mathbb{T}} |r_n|^2 dm \leq 1 + C\delta''_n$, $\delta''_n \rightarrow 0$. Разобьем теперь сумму на две: $\alpha_1 := \sum_{k=1}^{k_n} \mu_k |r_n(\zeta_k)|^2$, $\alpha_2 := \sum_{k>k_n} \mu_k |r_n(\zeta_k)|^2$.

Чтобы оценить α_1 , заметим, что формула (12) утверждает, что разность $G_n - B\phi$ мала на $\mathbb{T}$, а по построению функции G_n эта разность имеет нуль кратности n в начале координат. Это аналитическая функция в $\mathbb{D}$; поэтому по классической лемме Шварца

$$|G_n(z) - B\phi(z)| \leq C\delta_n |z|^n, \quad (15)$$

где $\delta_n \rightarrow 0$. В частности,

$$|(VP_n \star B\phi)(\zeta_k) - B\phi(\zeta_k)| \leq C\delta_n |\zeta_k|^n. \quad (16)$$

Но $B(\zeta_k) = 0$, $k = 1, \dots, k_n$, так что мы можем написать

$$|G_n(\zeta_k)| = |(VP_n \star B\phi)(\zeta_k)| \leq C\delta_n |\zeta_k|^n, \quad k = 1, \dots, k_n. \quad (17)$$

Наконец, используя $r_n(z) = G_n(z)/z^n$, получаем

$$|r_n(\zeta_k)| \leq C\delta_n, \quad k = 1, \dots, k_n. \quad (18)$$

Таким образом,

$$|\alpha_1| \leq C\delta_n \sum_k \mu_k \leq C\delta_n. \quad (19)$$

Чтобы оценить α_2 , напомним, пользуясь неравенством (16),

$$|r_n(\zeta_k)| \leq C\delta_n + |(B\phi)(\zeta_k)|/|\zeta_k|^n, \quad k > k_n. \quad (20)$$

Но $1 - |\zeta_k| < C/(\varepsilon_n n)$ при $k > k_n$, так что

$$\frac{1}{|\zeta_k|^n} \leq e^{C/\varepsilon_n}.$$

В частности,

$$|\alpha_2| \leq \sum_{k>k_n} \mu_k |r_n(\zeta_k)|^2 \leq C\delta_n + e^{C/\varepsilon_n} \sum_{k>k_n} \mu_k.$$

Всегда можно взять настолько медленно убывающую последовательность ε_n , что сумма $\sum_{k>k_n} \mu_k$ «убывает» рост экспоненты e^{C/ε_n} и выражение

$$\gamma_n := e^{C/\varepsilon_n} \sum_{k>k_n} \mu_k$$

стремится к нулю.

Подводя итоги, видим, что

$$\|r_n\| \leq 1 + \text{малая величина} \quad (21)$$

и

$$r_n(z) = \rho z^{-n} + \dots + az^{n-1}, \quad |\rho| \geq B(0) - \text{малая величина}. \quad (22)$$

Обратим переменную. Рассмотрим функцию $R(z) := r_n^*(z) := \overline{r(1/\bar{z})} = \bar{\rho}z^n + \dots + \bar{a}z^{-(n-1)}$. Тогда мы только что получили, что $|\rho| \geq B(0)\phi(0) - \text{малая величина}$ и

$$\|R\|_{L^2(\mu)} \leq 1 + \text{малая величина}. \quad (23)$$

Мы закончили доказательство оценки

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\eta_n| \geq B(0). \quad (24)$$

Тем самым доказана оценка снизу для η_n при $\psi = 1$. Если ψ — нетривиальная функция, отделенная от нуля, то мы приблизим ее снизу гладкой функцией ψ' и повторим предыдущее рассуждение, используя функцию $B\phi/\psi$ вместо $B\phi$.

§5. Оценка снизу для τ_n

Пусть ζ_n , B , B_n и k_n те же, что и в начале разд. 4.1. Последовательность ε_n будет выбрана ниже. Без ограничения общности мы считаем, что

$$\sum_k (1 - |\zeta_k|) < 1.$$

Число нулей произведения B_n не превосходит k_n .

Возьмем $l_n := [A_n \varepsilon_n n]$, где A_n возрастает к бесконечности, но настолько медленно, что $A_n \varepsilon_n \rightarrow 0$. Положим

$$R := 1 + \frac{1}{l_n}.$$

Пусть $\tilde{B}$ — произведение Бляшке в круге $R\mathbb{D}$, имеющее те же нули, что и B_n . Введем функцию ϕ формулой (8), как в разд. 4.1.

Мы сохраняем все обозначения предыдущего параграфа. Пусть T_n — многочлен Тейлора степени n функции $B_n\phi$. Наша цель очень проста: мы собираемся повторить все рассуждения из предыдущего раздела, но вместо разности $|G_n(z) - B\phi(z)| = |(VP_n \star B\phi)(z) - B\phi(z)|$ будем оценивать разность $|T_n(z) - B\phi(z)| = |(D_n \star B\phi)(z) - B\phi(z)|$. Здесь D_n — ядро Дирихле. Иными словами, мы просто хотим заменить ядро VP_n на ядро D_n .

Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Запишем формулу Коши для $B\phi(\zeta_0)$ по контуру $R\mathbb{T}$, где $R = 1 + 1/l_n$:

$$(B_n\phi - T_n)(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+1/l_n)\mathbb{T}} \frac{\zeta_0^n (B_n\phi)(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)\zeta^n} d\zeta.$$

Мы уже видели в оценке (13), что

$$|B_n \phi(\zeta)| = \left(1 + \frac{1}{l_n}\right)^{k_n} |\tilde{B}(z)| \leq e^{C/A_n} =: 1 + \kappa_n, \quad \kappa_n \rightarrow 0. \quad (25)$$

В частности, подставляя это в нашу формулу Коши, получаем

$$\|B_n \phi - T_n\|_\infty \leq \frac{C}{(1 + 1/l_n)^n} \int_{(1+1/l_n)\mathbb{T}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \zeta_0|},$$

или

$$\|B_n \phi - T_n\|_\infty \leq C \log l_n e^{-1/(A_n \varepsilon_n)} \leq C' \log n e^{-1/(A_n \varepsilon_n)}.$$

Положим $\delta_n := \log n e^{-1/(A_n \varepsilon_n)}$. В отличие от последовательности δ_n из предыдущего раздела, эта последовательность не обязана стремиться к нулю. Но мы потребуем, чтобы она стремилась к нулю, налагая таким образом некоторые ограничения на ε_n и A_n . Итак, начиная с этого места, мы *предполагаем*, что

$$\delta_n := \log n e^{-1/(A_n \varepsilon_n)} \rightarrow 0 \quad (26)$$

и

$$\|B_n \phi - T_n\|_\infty \leq C \delta_n \rightarrow 0. \quad (27)$$

Введем также функции

$$p_n(z) := T_n(z)/z^n, \quad P_n(z) := \overline{p_n(1/\bar{z})} = z^n \overline{T(1/\bar{z})}$$

и рассмотрим норму

$$\|p_n\| := \int_{\mathbb{T}} |p_n|^2 dm + \sum_k \mu_k |p_n(\zeta_k)|^2.$$

Разумеется, мы хотим доказать, что

$$\|p_n\| \leq 1 + \text{малая величина} \quad (28)$$

и

$$|T_n(0)| \geq B(0) - \text{малая величина}. \quad (29)$$

Соотношение (29) следует из (27) и равенства $\phi(0) = 1$.

Чтобы доказать (28), заметим, что из оценки (25) вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{T}} |p_n|^2 dm \leq 1 + C(\kappa_n + \delta_n) \leq 1 + \text{малая величина}.$$

Разобьем сумму $\sum_k \mu_k |p_n(\zeta_k)|^2$ на две суммы $\beta_1 := \sum_{k=1}^{k_n} \mu_k |p_n(\zeta_k)|^2$ и $\beta_2 := \sum_{k > k_n} \mu_k |p_n(\zeta_k)|^2$.

Чтобы оценить β_1 , отметим (27) и тот факт, что $B\phi - T_n$ — аналитическая функция в $\mathbb{D}$, имеющая нуль кратности n в начале координат. Поэтому по лемме Шварца

$$|T_n(z) - B\phi(z)| \leq C \delta_n |z|^n, \quad (30)$$

где $\delta_n \rightarrow 0$.

В частности,

$$|T_n(\zeta_k) - B\phi(\zeta_k)| \leq C \delta_n |\zeta_k|^n. \quad (31)$$

Но $B(\zeta_k) = 0$, $k = 1, \dots, k_n$, так что мы можем написать

$$|T_n(\zeta_k)| \leq C \delta_n |\zeta_k|^n, \quad k = 1, \dots, k_n. \quad (32)$$

Наконец, используя равенство $p_n(z) = T_n(z)/z^n$, получаем

$$|p_n(\zeta_k)| \leq C\delta_n, \quad k = 1, \dots, k_n. \quad (33)$$

Поэтому

$$|\alpha_1| \leq C\delta_n \sum_k \mu_k \leq C\delta_n. \quad (34)$$

Чтобы оценить β_2 , отталкиваясь от (31), мы напишем

$$|p_n(\zeta_k)| \leq C\delta_n + |(B\phi)(\zeta_k)|/|\zeta_k|^n, \quad k > k_n. \quad (35)$$

Но $1 - |\zeta_k| < \frac{C}{\varepsilon_n n}$ при $k > k_n$, так что

$$1/|\zeta_k|^n \leq e^{C/\varepsilon_n}.$$

В частности,

$$|\beta_2| \leq \sum_{k > k_n} \mu_k |p_n(\zeta_k)|^2 \leq C\delta_n + e^{C/\varepsilon_n} \sum_{k > k_n} \mu_k.$$

Не всегда можно выбрать настолько медленно убывающую последовательность ε_n , что сумма $\sum_{k > k_n} \mu_k$ «убывает» рост экспоненты e^{C/ε_n} и выражение

$$\gamma_n := e^{C/\varepsilon_n} \sum_{k > k_n} \mu_k \quad (36)$$

стремится к нулю. Дело в том, что условие (26) предписывает последовательности ε_n стремиться к нулю с *определенной* скоростью. Однако, комбинируя (26) с (36), мы видим, что эти условия совместны, если только μ_k стремится к нулю достаточно быстро.

Легко вывести, что условие (7) позволяет принять оба предположения (26) и (36). Итак, мы получаем (28) и (29). Обращение переменной, т. е. переход от $p_n(z)$ к $P_n(z)$, доказывает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| \geq B(0).$$

Если функция ψ отделена от нуля, то мы приблизим ее снизу гладкой функцией. Считая теперь, что функция $1/\psi$ гладкая, мы можем воспроизвести наше связанное с аппроксимацией рассуждение, используя функцию $B\phi/\psi$ вместо $B\phi$.

§6. Оценка сверху для τ_n и η_n

Эта оценка проста. Она все же чуть сложнее для η_n , так что мы разберем именно этот случай.

Мы хотим доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\eta_n| \leq B(0)\psi(0). \quad (37)$$

Пусть $\psi_*(z) := \overline{\psi(1/\bar{z})}$ и $B_*(z) := \overline{B(1/\bar{z})}$. Пусть B_*^k — конечное произведение Бляшке, являющееся подпроизведением в B_* .

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{R_n(z)}{\psi_*(z)} \overline{z^n B_*^k(z)} dm(z),$$

абсолютная величина которого, очевидно, не превосходит единицы. Вычислим интеграл с помощью теоремы Коши для внешности круга $\mathbb{D}$. Это можно сделать, потому что R_n/z^{n+1} аналитична во внешности единичного круга и равна нулю на бесконечности. Итак,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{R_n(z)}{\psi_*(z)z^{n+1}B_*^k(z)} dz = \frac{\eta_n}{B(0)\psi(0)} - \sum \frac{R_n(z_i)}{(B_*^k)'(z_i)\psi_*(z_i)z_i^{n+1}}.$$

Для последней суммы справедлива оценка

$$\left| \sum \frac{R_n(z_i)}{(B_*^k)'(z_i)\psi_*(z_i)z_i^{n+1}} \right|^2 \leq \sum \frac{1}{|(B_*^k)'(z_i)\psi_*(z_i)z_i^{n+1}|^2 \mu_i},$$

поскольку R_n имеет единичную норму в $L^2(\mu)$. Число членов в сумме конечно, так что сумма стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

Итак,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\eta_n| \leq B_*^k(0)\psi(0).$$

Поскольку B_*^k произвольно, мы тем самым доказали оценку (37).

Разумеется, читателю ясно, что доказательство для τ_n в точности то же самое.

Обе наши теоремы полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Gluskin, M. Meyer, A. Pajor, “Zeros of analytic functions and norms of inverse matrices”, *Israel J. Math.*, **87**:1–3 (1994), 225–242.
- [2] Н. К. Никольский, “Condition numbers of large matrices and analytic capacities”, *Алгебра и анализ*, **17**:4 (2005), 125–180.
- [3] F. Peherstorfer, P. Yuditskii, “Asymptotics of orthonormal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:11 (2001), 3213–3220.
- [4] H. Queffelec, “Sur un théorème de Gluskin–Meyer–Pajor”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.*, **317**:2 (1993), 155–158.
- [5] J. J. Schäffer, “Norms and determinants of linear mappings”, *Math. Z.*, **118** (1970), 331–339.
- [6] И. В. Виденский, Н. А. Широков, “Об одной экстремальной задаче в алгебре Винера”, *Алгебра и анализ*, **11**:6 (1999), 122–138.

Department of Mathematics, Michigan State University
e-mail: volberg@math.msu.edu

Institute for Analysis of Johannes Kepler University, Austria
e-mail: Franz.Peherstorfer@jku.at

Institute for Analysis of Johannes Kepler University, Austria,
Bar-Ilan University, Israel
e-mail: Petro.Yuditskiy@jku.at

Поступило в редакцию
15 марта 2006 г.