Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Островский, А. Е. Юрейен, Нерегулярность роста медленно растущих целых функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 72–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:38:24

УДК 517.53

Нерегулярность роста медленно растущих целых функций

© 2006. И. В. Островский, А. Е. Юрейен

Посвящается столетию со дня рождения Бориса Яковлевича Левина

§1. Введение и формулировка результатов

Пусть $\mathcal{A}$ — множество всех возрастающих и выпуклых по переменной $\log r$ функций V , определенных при $r > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{\log r} = \infty. \quad (1)$$

Пусть f — трансцендентная целая функция и

$$M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Из принципа максимума модуля и теоремы Адамара о трех окружностях следует, что $\log M(r, f) \in \mathcal{A}$. Хорошо известно, что множество $\mathcal{A}$ шире, чем множество всех функций вида $\log M(r, f)$. Можно отметить следующее своеобразное свойство последнего множества: функция $\log M(r, f)$ непременно является кусочно-аналитической (см., например, [11, р. 14] или [6, р. 11]). Задача об асимптотическом приближении функции $V \in \mathcal{A}$ на бесконечности функциями вида $\log M(r, f)$ может рассматриваться как проблема существования целой функции заданного роста. С этой точки зрения задача изучалась Эдrei и Фуксом, Клуни, а также Клуни и Кёвари (см. [4] и приведенные там ссылки). Наиболее полные результаты содержатся в работе [4].

Следующая теорема описывает наилучшую возможную скорость асимптотического приближения для произвольной функции $V \in \mathcal{A}$:

ТЕОРЕМА А (Клуни–Кёвари [4]). (i) *Для любой функции $V \in \mathcal{A}$ существует такая целая функция f , что*

$$|\log M(r, f) - V(r)| \leq \frac{1}{2} \log r + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

(ii) *Предыдущее утверждение перестает быть верным, если заменить постоянную $1/2$ на любую меньшую.*

В теории целых функций рост целой функции измеряется с помощью *регулярно растущих* функций V из $\mathcal{A}$. Наиболее важны здесь функции $V(r) = r^\rho$, $r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log \log r)^{\rho_2}, \dots$ и, более общо, $V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок (см., например, [11, Sec. 6], [3, Sec. 4.22], [9, гл. 1, § 12]). Для регулярно растущей функции V скорость, с которой она асимптотически приближается функцией $\log M(r, f)$, может рассматриваться как мера возможной регулярности роста целой функции f .

Если V возрастает не слишком медленно, то решение задачи дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА В (Клуни–Кёвари [4]). *Предположим, что функция $\psi(r) := (d/d \log r)V(r)$ удовлетворяет условию*

$$\psi(cr) - \psi(r) \geq 1, \quad r \geq 1, \quad (3)$$

для некоторого $c > 1$. Тогда существует такая целая функция f , что

$$\log M(r, f) - V(r) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Из ограничения (3) следует, что

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} V(r)(\log r)^{-2} > 0.$$

Поэтому теорема В не применима к таким функциям $V \in \mathcal{A}$, что

$$V(r) = o(\log^2 r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Именно этому последнему случаю и посвящена данная работа. Наш основной результат показывает, в частности, что соотношение (4) при этом выполнено быть не может. Более того, чем *медленнее* растет регулярно растущая функция V , тем *хуже* она может быть асимптотически приближена функциями вида $\log M(r, f)$. Иными словами, если

$$\log M(r, f) = o(\log^2 r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

то рост трансцендентной целой функции f тем менее регулярен, чем он медленнее. Например, из нашей основной теоремы непосредственно следует, что равенства (10)–(12) (см. ниже) невозможны.

Заметим, что в теории целых функций есть много фактов противоположного характера: чем медленнее растет $\log M(r, f)$, тем больше функция f похожа по своему асимптотическому поведению на бесконечности на многочлен. Отметим, например, теорему Вимана о функциях порядка, меньшего $1/2$, и теоремы о функциях порядка нуль ([11, Сес. 9, 15, 16, 26]). Поэтому можно было бы ожидать, что со снижением скорости роста логарифма $\log M(r, f)$ его регулярность возрастает. Результаты нашей работы показывают, что это не так для целых функций, удовлетворяющих условию (6).

Прежде чем сформулировать основную теорему, нужно определить подмножество $\mathcal{A}_{\text{рег}}$ в $\mathcal{A}$, элементы которого будут считаться регулярно растущими.

Удобно сменить масштаб, полагая $\log r = x$. Если f — целая трансцендентная функция, удовлетворяющая условию (6), то логарифм $\log M(e^x, f)$ (рассматриваемый как функция от x) имеет скорость роста не меньше, чем функция порядка 1 и максимального типа, и не больше, чем функция порядка 2 и минимального типа. По теореме Левина [9, с. 59–60] существует функция $\lambda(x)$ (называемая сильным уточненным порядком) вида

$$\lambda(x) = \lambda + \frac{\vartheta_1(\log x) - \vartheta_2(\log x)}{\log x},$$

где $1 \leq \lambda \leq 2$ и $\vartheta_j \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $j = 1, 2$, — вогнутые функции, удовлетворяющие условиям

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta_j(x) = \infty$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta_j(x)/x = 0$,

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta_j''(x)/\vartheta_j'(x) = 0,$$

такая, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log M(e^x, f)}{x^{\lambda(x)}} = 1.$$

Конструкция Левина показывает, что в случае максимального (минимального) типа порядка λ можно положить $\vartheta_2 \equiv 0$ ($\vartheta_1 \equiv 0$), что мы и сделаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ множество всех функций V , представимых в виде

$$V(r) = w(\log r), \quad (7)$$

где w задается формулой

$$w(x) := x^\lambda e^{\vartheta_1(\log x) - \vartheta_2(\log x)}, \quad (8)$$

здесь $1 \leq \lambda \leq 2$, а функции ϑ_1 и ϑ_2 обладают свойствами (a)–(c). Если при этом $\lambda = 1$, то $\vartheta_2 \equiv 0$, а если $\lambda = 2$, то $\vartheta_1 \equiv 0$.

Заметим, что условия (a)–(c) не зависят от поведения функции ϑ_j на произвольном ограниченном справа интервале. Поэтому любую пару возрастающих вогнутых функций ϑ_1, ϑ_2 , определенных лишь для достаточно больших x и удовлетворяющих этим условиям, можно таким образом продолжить на все $\mathbb{R}_+$, что равенства (7) и (8) дадут функцию $V \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$. Поэтому достаточно определять функцию $V \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$ лишь при достаточно больших $r \in \mathbb{R}_+$.

Простейшими примерами функций $V \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$ являются функции, определенные при достаточно больших r следующим образом:

$$V(r) = (\log r)^{p_1} (\log_2 r)^{p_2} \dots (\log_m r)^{p_m},$$

где $\log_k$ есть k -кратный логарифм, а числа $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ выбираются таким образом, что выполнены соотношения (1) и (5).

Следующая теорема представляет собой основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. (i) Пусть $V \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$ — произвольная функция, и пусть $w(x) = V(e^x)$. Тогда не существует такой целой функции f , что

$$\log M(e^x, f) - w(x) = o(\min(1/w''(x), x)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (9)$$

(ii) Предыдущее утверждение перестает быть верным, если в оценке заменить « o » на « O ».

Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} w''(x) = 0$ (см. лемму 2.1 ниже), то из утверждения (i) (см. равенство (9)) вытекает, что соотношение (4) невозможно ни при какой функции $V \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$. Наша следующая теорема получается как непосредственное следствие теоремы 1 при

$$\begin{aligned} w(x) &= x^p (\log x)^\alpha, & 1 < p < 2, \alpha \in \mathbb{R}, \\ w(x) &= x (\log x)^\alpha, & \alpha > 0, \\ w(x) &= x^2 (\log x)^\alpha, & \alpha < 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. (i) *Никакая целая функция f не может удовлетворять ни одному из следующих условий (при $r \rightarrow \infty$):*

$$\log M(r, f) - (\log r)^p (\log_2 r)^\alpha = o((\log r)^{2-p} (\log_2 r)^{-\alpha}), \quad 1 < p < 2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$\log M(r, f) - (\log r) (\log_2 r)^\alpha = o((\log r) (\log_2 r)^{\min(1-\alpha, 0)}), \quad \alpha > 0, \quad (11)$$

$$\log M(r, f) - (\log r)^2 (\log_2 r)^\alpha = o((\log_2 r)^{|\alpha|}), \quad \alpha < 0. \quad (12)$$

(ii) *Утверждение п. (i) перестает быть верным при замене «о» на «О».*

Доказательство теоремы 1 основано на явлении, открытом Хейманом в 1966 г.

ТЕОРЕМА С (Хейман [7]). *Для любой трансцендентной целой функции f*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{d \log r} \right)^2 \log M(r, f) \geq C_0,$$

где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1974 г. Бойчук и Гольдберг [2] доказали, что для функций f с неотрицательными коэффициентами наилучшее возможное значение постоянной C_0 равно $1/4$ (другие результаты, связанные с явлением Хеймана, можно найти в статьях Кьельберга [8] и Аби-Хузама [1]). Островский нашел другое доказательство, основанное на одной формуле Розенблума [10]. Это доказательство вошло в статью [2]. Здесь мы используем идею этого доказательства, чтобы получить описание множества, на котором

$$\left(\frac{d}{d \log r} \right)^2 \log M(r, f) \geq \epsilon^2, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2}.$$

Соответствующее утверждение (лемма 2.5, см. ниже) является ключевым моментом доказательства теоремы 1.

§2. Вспомогательные результаты

ЛЕММА 2.1. *Если $w(\log r) \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$, то*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w''(x) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$w''(x) = \frac{w(x)}{x^2} (\lambda^2 - \lambda + (2\lambda - 1)(\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log x) + (\vartheta_1 - \vartheta_2)'^2(\log x) + (\vartheta_1 - \vartheta_2)''(\log x)), \quad (13)$$

то, согласно свойствам (а)–(с),

$$w''(x) = x^{\lambda-2} e^{(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\log x)} (\lambda^2 - \lambda + (2\lambda - 1)(\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log x) + o((\vartheta_1 + \vartheta_2)'(\log x))). \quad (14)$$

Поэтому требуемый результат очевиден при $1 \leq \lambda < 2$. При $\lambda = 2$ нужно учесть, что $\vartheta_1 \equiv 0$, а ϑ_2 обладает свойством (а). $\square$

ЛЕММА 2.2. *Существует предел*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w''(kx)}{w''(x)} = k^{\lambda-2}, \quad (15)$$

причем сходимость равномерна по k на любом отрезке $[a, b]$, $a > 0$, $b < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формулам (8) и (14),

$$\frac{w''(kx)}{w''(x)} = k^{\lambda-2} \exp((\vartheta_1 - \vartheta_2)(\log kx) - (\vartheta_1 - \vartheta_2)(\log x)) \\ \times \frac{\lambda^2 - \lambda + (2\lambda - 1)(\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log kx) + o((\vartheta_1 + \vartheta_2)'(\log kx))}{\lambda^2 - \lambda + (2\lambda - 1)(\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log x) + o((\vartheta_1 + \vartheta_2)'(\log x))}.$$

Используя свойства (а)–(с) (а при $\lambda = 1$ и тождество $\vartheta_2 \equiv 0$), получаем утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 2.3. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{w(x)}{w'(x)} \right) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует, что

$$x - \frac{w(x)}{w'(x)} = \frac{(\lambda - 1)x + x(\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log x)}{\lambda + (\vartheta_1 - \vartheta_2)'(\log x)}.$$

При $\lambda > 1$ утверждение леммы вытекает из свойства (b). При $\lambda = 1$ нужно учесть, что $\vartheta_2 \equiv 0$, и заметить, что достаточно доказать соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \vartheta_1'(\log x) = \infty$$

или эквивалентное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t \vartheta_1'(t) = \infty. \quad (16)$$

Из свойства (с) следует, что функция $e^t \vartheta_1'(t)$ не убывает. Поэтому если соотношение (16) не выполнено, то $\vartheta_1'(t) = O(e^{-t})$, $t \rightarrow \infty$, а это противоречит свойству (а). $\square$

ЛЕММА 2.4. *Достаточно доказать теорему 1 при дополнительном предположении, что коэффициенты функции f неотрицательны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выведем лемму из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА D (Эрдёш–Кёвари [5]). *Пусть f — целая функция. Тогда существует такая целая функция $\hat{f}$ с неотрицательными коэффициентами, что*

$$\frac{1}{6} \leq \frac{M(r, f)}{M(r, \hat{f})} \leq 3, \quad r \geq 0.$$

Согласно этой теореме, $\log M(r, f) = \log M(r, \hat{f}) + O(1)$. Поэтому функция f удовлетворяет соотношению (9) (с « o » или « O ») тогда и только тогда, когда это же верно для $\hat{f}$. $\square$

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad d_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

— целая трансцендентная функция с неотрицательными коэффициентами. Тогда $M(r, f) = f(r)$. Положим

$$\varphi(x) = f(e^x), \quad \alpha(x) = (\log \varphi(x))', \quad \beta(x) = (\log \varphi(x))''.$$

Функция $\alpha(x)$ неотрицательна, возрастает и стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому из уравнений

$$\alpha(a_k) = k + \varepsilon, \quad \alpha(b_k) = k + 1 - \varepsilon, \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, \quad (18)$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и $k_0 = [\alpha(0)] + 1$, однозначно определяются положительные числа

$$a_{k_0} < b_{k_0} < a_{k_0+1} < b_{k_0+1} < \dots < a_k < b_k < \dots \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 2.5. Пусть f — трансцендентная целая функция с неотрицательными коэффициентами. Тогда во введенных выше обозначениях

$$\beta(x) \geq \varepsilon^2 \quad \text{для } x \in A_\varepsilon := \bigcup_{k=k_0}^{\infty} [a_k, b_k].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место равенство

$$\varphi(x) = f(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{kx}, \quad d_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следующая формула принадлежит Розенблуму [10]:

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \alpha(x))^2 \frac{d_k e^{kx}}{\varphi(x)}. \quad (19)$$

Доказательство получается непосредственной выкладкой:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k d_k e^{kx}}{\varphi(x)}, \\ \beta(x) &= \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 d_k e^{kx}}{\varphi(x)} - \alpha(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k d_k e^{kx}}{\varphi(x)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - \alpha(x))^2 \frac{d_k e^{kx}}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Поскольку при $x \in A_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\min_{k=0,1,2,\dots} |k - \alpha(x)| \geq \varepsilon,$$

мы получаем утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 2.6. Ни для какой функции $w(\log r) \in \mathcal{A}_{\text{reg}}$ не существует такой целой функции α с положительными коэффициентами, что

$$\alpha(x) - w'(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $w''(x) \rightarrow 0$, то

$$\beta(x) - w''(x) = (\alpha(x) - w'(x))' \geq \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k \geq k_1. \quad (21)$$

Используя соотношения (18) и (20), получаем

$$1 - 2\varepsilon = \alpha(a_k) - \alpha(b_k) = w'(a_k) - w'(b_k) + o(1) = w''(c_k)(b_k - a_k) + o(1)$$

для некоторых чисел $c_k \in (a_k, b_k)$. Отсюда следует, что

$$b_k - a_k \rightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

Интегрируя равенство (21) по интервалу (a_k, b_k) , мы приходим к противоречию с равенством (20). $\square$

§3. Доказательство теоремы 1

В дальнейшем буквой C (возможно, с индексами) обозначены положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (i). Предположим, что существует целая функция f с неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющая соотношению (9). Положим

$$\log \varphi(x) - w(x) = \tau(x),$$

где

$$|\tau(x)| \leq \epsilon(x) \min(1/w''(x), x), \quad \epsilon(x) \downarrow 0.$$

Покажем, что

$$\alpha(x) - w'(x) = o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

в противоречие с леммой 2.6.

Из выпуклости функции $\log \varphi$ следует неравенство

$$\alpha(x)(z - x) - [\log \varphi(z) - \log \varphi(x)] \leq 0 \quad \text{для любых } z, x.$$

Вычитая из обеих частей выражение $w'(x)(z - x) - [w(z) - w(x)]$, получаем

$$\begin{aligned} & [\alpha(x) - w'(x)](z - x) - [(\log \varphi(z) - w(z)) - (\log \varphi(x) - w(x))] \\ & \leq w(z) - w(x) - w'(x)(z - x) = \frac{1}{2} w''(c)(z - x)^2 \end{aligned}$$

для некоторого значения c , лежащего между x и z . Ограничимся значениями z из отрезка $|z - x| \leq x/2$. Тогда по лемме 2.2 существует такая положительная постоянная C , что

$$\begin{aligned} [\alpha(x) - w'(x)](z - x) & \leq 2 \max_{|t-x| \leq x/2} |\tau(t)| + Cw''(x)(z - x)^2 \\ & \leq C\epsilon(x/2) \min(1/w''(x), x) + Cw''(x)(z - x)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Если $x \leq z \leq 3x/2$, то отсюда следует, что

$$\alpha(x) - w'(x) \leq \frac{C\epsilon(x/2) \min(1/w''(x), x)}{z - x} + Cw''(x)(z - x).$$

Положим

$$z - x = \sqrt{\epsilon(x/2)} \min(1/w''(x), x) \leq x/2$$

и получим

$$\begin{aligned} \alpha(x) - w'(x) & \leq C\sqrt{\epsilon(x/2)} + Cw''(x)\sqrt{\epsilon(x/2)} \min(1/w''(x), x) \\ & = C\sqrt{\epsilon(x/2)} + C\sqrt{\epsilon(x/2)} \min(1, xw''(x)) \\ & \leq C\sqrt{\epsilon(x/2)} + C\sqrt{\epsilon(x/2)} = o(1). \end{aligned}$$

При $x/2 \leq z \leq x$ из (22) вытекает, что

$$\alpha(x) - w'(x) \geq \frac{C\epsilon(x/2) \min(1/w''(x), x)}{z - x} + Cw''(x)(z - x).$$

Полагая

$$x - z = \sqrt{\epsilon(x/2)} \min(1/w''(x), x),$$

получим

$$\alpha(x) - w'(x) \geq -(C\sqrt{\epsilon(x/2)} + C\sqrt{\epsilon(x/2)}) = o(1). \quad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (ii). Поскольку функция w строго возрастает и непрерывно дифференцируема, то при каждом $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ существует единственная точка x_n , такая, что $w'(x_n) = n$. Зададим положительные числа c_n , $n \geq n_0$, формулой

$$\log c_n + nx_n = w(x_n).$$

Каждая из прямых

$$y_n(x) := \log c_n + nx, \quad n \geq n_0,$$

является касательной к кривой $y = w(x)$ в соответствующей точке x_n . Положим

$$f(z) = \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k z^k.$$

Так как

$$\frac{\log c_n}{n} = -x_n + \frac{w(x_n)}{w'(x_n)},$$

то, согласно лемме 2.3, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$, так что f — целая функция.

Обозначим через $\mu(r, f)$ *максимальный член* функции f , т. е.

$$\log \mu(e^x, f) = \sup_{n_0 \leq n < \infty} (\log c_n + nx).$$

График функции $\log \mu(e^x, f)$ представляет собой ломаную, лежащую ниже графика функции $w(x)$ и касающуюся последнего только при $x = x_n$. Таким образом, существуют такие точки σ_n , $x_n < \sigma_n < x_{n+1}$, $n \geq n_0$, что

$$\log \mu(e^x, f) = \log c_n + nx, \quad \sigma_n \leq x \leq \sigma_{n+1}.$$

Докажем, что

$$w(x) - \log \mu(e^x, f) = O(\min(1/w''(x), x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$\log M(e^x, f) - \log \mu(e^x, f) = O(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (24)$$

откуда немедленно следует п. (ii) теоремы 1.

Докажем сначала соотношение (23). Заметим, что,

$$\left| \frac{d}{dx} (w(x) - \log \mu(e^x, f)) \right| \leq 1.$$

Интегрирование от x_{n_0} до x приводит к оценке

$$0 \leq w(x) - \log \mu(e^x, f) \leq x. \quad (25)$$

По лемме 2.2 существует такая постоянная $C_* > 1$, что

$$\frac{1}{C_*} \leq \frac{w''(x_1)}{w''(x_2)} \leq C_* \quad \text{при} \quad \frac{1}{e} \leq \frac{x_1}{x_2} \leq e, \quad x_1, x_2 \geq x_0.$$

Если соотношение (23) не выполнено, то в силу формулы (25) существуют такие точка $y > ex_0$ и постоянная C , что

$$C > \max(2C_*e, C_*^3/2) \quad (26)$$

и

$$w(y) - \log \mu(e^y, f) \geq \frac{C}{w''(y)}. \quad (27)$$

Используя неравенства (25), получаем, что $w''(y) \geq C/y$. Тогда для всех t на отрезке $y/e \leq t \leq ey$ выполнены неравенства

$$w''(t) \geq \frac{w''(y)}{C_*} \geq \frac{C}{C_*y} \geq \frac{C}{C_*et}. \quad (28)$$

Пусть $x_n \leq y < x_{n+1}$. Согласно соотношениям (28) и (26),

$$w'(ey) - w'(y) = \int_y^{ey} w''(t) dt \geq \frac{C}{C_*e} > 2.$$

Отсюда следует, что $ey \geq x_{n+2}$. Аналогично получаем, что $w'(y) - w'(y/e) > 2$ и поэтому $y/e \leq x_{n-1}$. Итак,

$$\frac{y}{e} < \sigma_{n-1} < x_n < \sigma_n < x_{n+1} < \sigma_{n+1} < ey.$$

Если $x_n \leq y \leq \sigma_n$, то

$$\begin{aligned} w(y) - \log \mu(e^y, f) &= w(y) - w(x_n) - n(y - x_n) \\ &= \frac{1}{2} w''(c)(y - x_n)^2 \leq \frac{C_*}{2} w''(y)(y - x_n)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

где $c \in (x_n, \sigma_n)$. Кроме того,

$$1 \geq w'(y) - w'(x_n) = \int_{x_n}^y w''(t) dt \geq \int_{x_n}^y \frac{w''(y)}{C_*} dt = (y - x_n) \frac{w''(y)}{C_*}. \quad (30)$$

Комбинируя соотношение (29) с (30), получаем, что

$$w(y) - \log \mu(e^y, f) \leq \frac{C_*^3}{2w''(y)}. \quad (31)$$

При $\sigma_n \leq y < x_{n+1}$ аналогичное рассуждение показывает, что неравенство (31) по-прежнему выполнено. Однако это противоречит соотношениям (26) и (27).

Для доказательства формулы (24) заметим сначала, что поскольку $w''(x) \rightarrow 0$ и $w'(x_{n+1}) - w'(x_n) = 1$, то $x_{n+1} - x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому существует такое число $n_1 \geq n_0$, что

$$x_{n+1} - x_n \geq 1, \quad n \geq n_1.$$

Пусть $x_n \leq x < x_{n+1}$. Тогда при $n_1 \leq k \leq n-1$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \log \frac{c_k e^{kx}}{c_n e^{nx}} &= w(x_k) - w(x_n) - k(x_k - x_n) + (n-k)(x_n - x) \\ &\leq - \int_{x_k}^{x_n} (w'(t) - k) dt \leq - \int_{x_{k+1}}^{x_n} (w'(t) - k) dt \\ &\leq - \int_{x_{k+1}}^{x_n} 1 dt \leq -(n-k-1). \end{aligned}$$

Аналогично, при $k \geq n+2$ имеем

$$\begin{aligned} \log \frac{c_k e^{kx}}{c_{n+1} e^{(n+1)x}} &\leq \int_{x_{n+1}}^{x_k} (w'(t) - k) dt \\ &\leq \int_{x_{n+1}}^{x_{k-1}} (w'(t) - k) dt \leq \int_{x_{n+1}}^{x_{k-1}} (-1) dt \leq -(k-n-2). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} M(e^x, f) &= \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k e^{kx} \\ &= \sum_{k=n_0}^{n_1} c_k e^{kx} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} c_k e^{kx} + c_n e^{nx} + c_{n+1} e^{(n+1)x} + \sum_{k=n+2}^{\infty} c_k e^{kx} \\ &\leq \mu(e^x, f) \left(\sum_{k=n_0}^{n_1} \frac{c_k e^{kx}}{c_n e^{nx}} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} \frac{c_k e^{kx}}{c_n e^{nx}} + 2 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{c_k e^{kx}}{c_{n+1} e^{(n+1)x}} \right) \\ &\leq \mu(e^x, f) \left(O(1) + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} e^{-(n-k-1)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} e^{-(k-n-2)} \right) \leq C \mu(e^x, f) \end{aligned}$$

при $x_n \leq x < x_{n+1}$. □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. F. Abi-Khuzam, "Hadamard convexity and multiplicity and location of zeros", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:8 (1995), 3043–3051.
- [2] В. С. Бойчук, А. А. Гольдберг, "О теореме о трех прямых", *Матем. заметки*, **15** (1974), 45–53.
- [3] M. L. Cartwright, *Integral Functions*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, vol. 44, Cambridge, at the Univ. Press, Cambridge, 1956.
- [4] J. Clunie, T. Kövari, "On integral functions having prescribed asymptotic growth, II", *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 7–20.
- [5] P. Erdős, T. Kövari, "On the maximum modulus of entire functions", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 305–317.
- [6] А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, "Целые и мероморфные функции", в кн.: *Комплексный анализ. Одна переменная-I*, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 85, ВИНТИ, М., 1991.

- [7] W. K. Hayman, "Note on Hadamard's convexity theorem", in: *Entire Functions and Related Parts of Analysis* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, La Jolla, Calif, 1966), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968, 210–213.
- [8] B. Kjellberg, "The convexity theorem of Hadamard–Hayman", *Proc. Roy. Inst. of Techn.*, 1973, 87–114.
- [9] Б. Я. Левин, *Распределение нулей целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.
- [10] P. C. Rosenbloom, "Probability and entire functions", in: *Studies in Math. Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1962, 325–332.
- [11] G. Valiron, *Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes*, Monographies de "L'Enseignement Mathématique", vol. 8, Institut de Math., Université, Genève, 1960.

Department of Mathematics,
Bilkent University, Ankara, Turkey

Поступило в редакцию
15 марта 2006

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина
Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина
email: iossif@fen.bilkent.edu.tr

Department of Mathematics,
Bilkent University, Ankara, Turkey