Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гурарий, Д. У. Х. Гиллам, О функциях, однозначно определяемых своими асимптотическими разложениями, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 33–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 02:20:31

УДК 517.53+517.928

О функциях, однозначно определяемых своими асимптотическими разложениями

© 2006. Д. У. Х. Гиллам, В. П. Гурарий

Памяти Бориса Яковлевича Левина

§ 1. Введение

В 1912 г. Дж. Ватсон опубликовал следующий результат [17, Sec. 8, Theorem V].

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ВАТСОНА. *Предположим, что последовательность комплексных чисел $\{p_0, p_1, \dots\}$ и функция $P(z)$ удовлетворяют следующим условиям:*

- (i) $P(z)$ является аналитической и однозначной функцией в секторе $S(\alpha, \beta)$;
- (ii) для всех $z \in S(\alpha, \beta)$ и для каждого n , $n = 0, 1, \dots$,

$$|\mathcal{R}_{n,P}(z)| \leq M \frac{n!}{a^n |z|^{n+1}}, \quad (1)$$

где положительные постоянные M и a не зависят от z и n , но могут зависеть от $P(z)$.

Если развор сектор $S(\alpha, \beta)$ удовлетворяет неравенству $\beta - \alpha > \pi$, то функция $P(z)$ однозначно определяется условиями (i) и (ii): две функции $P_1(z)$ и $P_2(z)$, для которых (i) и (ii) выполняются с одной и той же последовательностью $\{p_0, p_1, \dots\}$, тождественны в $S(\alpha, \beta)$.

Здесь $S(\alpha, \beta)$ обозначает сектор $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty, \alpha < \arg z < \beta\}$, а число $\beta - \alpha$ называется *развором* этого сектора. Для заданных функции $P(z)$, аналитической в $S(\alpha, \beta)$, и последовательности комплексных чисел $\{p_0, p_1, \dots\}$ выражение

$$\mathcal{R}_{n,P}(z) = P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{z^{k+1}}$$

называется *остатком*.

Поскольку множество функций, удовлетворяющих условиям (i) и (ii), линейно, теорему Ватсона достаточно доказать для случая, когда последовательность $\{p_0, p_1, \dots\}$ состоит из нулей. В таком случае

$$|P(z)| \leq M \frac{n!}{a^n |z|^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad z \in S(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Фиксируя z , $|z| > 1/a$, и минимизируя по n правую часть неравенств (2), получаем

$$|P(z)| \leq M_a e^{-a|z|}, \quad (3)$$

где $M_a = 4M\sqrt{2\pi a}$. Для завершения доказательства, установления импликации (3) $\implies P(z) \equiv 0$, нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Предположим, что функция $P(z)$, аналитическая в секторе $S(\alpha, \beta)$ раствора, большего π , удовлетворяет в этом секторе неравенству (3). Тогда $P(z) \equiv 0$.*

Доказательство этой леммы, опирающееся на принцип Фрагмена–Линделёфа, приведено в [8, Сес. 8.11].

В том случае, когда раствор сектора $S(\alpha, \beta)$ удовлетворяет противоположному неравенству $\beta - \alpha < \pi$, теорема единственности, бесспорно, неверна. В самом деле, задав δ , $0 < \delta < \pi/2$, введем в рассмотрение функцию $P(z)$ вида $P(z) = \varphi(z)e^{-z}/z$, где $\varphi(z)$ — аналитическая и ограниченная функция в секторе $S = S(-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta)$. Как показывают элементарные неравенства

$$e^{-|z|} < \frac{n!}{|z|^n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

для каждой такой функции условие (1) выполняется, если положить $M = \sup_S |\varphi(z)|$, $a = \sin \delta$ и $p_k = 0$ для $k = 0, 1, \dots$

Таким образом, множество функций, удовлетворяющих условиям (i) и (ii) теоремы Ватсона с $\{p_0, p_1, \dots\} = \{0, 0, \dots\}$, оказывается довольно богатым.

Сопоставление двух противоположных случаев, $\beta - \alpha > \pi$ и $\beta - \alpha < \pi$, дает основание рассматривать случай $\beta - \alpha = \pi$ как *критический случай*, а значение π — как *критическое значение* раствора $\beta - \alpha$.

В действительности утверждение теоремы единственности Ватсона остается верным и в критическом случае. Несмотря на то что доказательство, приведенное в [8, Сес. 8.11], неприменимо к этому случаю, все же остается возможность использовать теорему Фрагмена–Линделёфа для получения единственности, и доказательство может быть сделано даже более простым. Предположим, что неравенство (3) справедливо в секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$. Задавая b , $b > 0$, рассмотрим в секторе $S(-\arctg(b/a), \arctg(b/a))$ функцию вида $P_b(z) = P(z)e^{bz}$. Так как на границе этого сектора $a|\operatorname{Im} z| - b\operatorname{Re} z = 0$, то на этой границе выполняется неравенство $|P_b(z)| \leq M_a$. Применение стандартной теоремы Фрагмена–Линделёфа ведет к такой же оценке и внутри сектора. Поэтому для $z > 0$ получается оценка $|P(z)| \leq M_a e^{-bz}$. Учитывая, что b не зависит от z , мы устремляем b к $+\infty$ и получаем $P(z) \equiv 0$.

§2. Разложение Жевре порядка k

Теорема единственности Ватсона может быть переформулирована для любого сектора $S(\alpha, \beta)$ на римановой поверхности $\log z$ раствора, большего или равного π/k , где k — положительное число. В таком случае условие (ii) должно быть заменено следующим условием:

$$|\mathcal{R}_{n,P}(z)| \leq M \frac{(n!)^{1/k}}{(ka|z|)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Если раствор сектора $S(\alpha, \beta)$ удовлетворяет неравенству $\beta - \alpha \geq \pi/k$, то функция $P(z)$ однозначно определяется последовательностью коэффициентов $\{p_0, p_1, \dots\}$.

Этот результат получается следующим образом. Из оценок (4) вместо (3) выводится неравенство $|P(z)| \leq M_a e^{-a|z|^k}$, которое приводится к виду (3) с помощью отображения $\zeta = z^k$.

Сопоставляя снова два противоположных случая $\beta - \alpha > \pi/k$ и $\beta - \alpha < \pi/k$, мы называем сектор $S(\alpha, \beta)$ *критическим*, если его раствор равен π/k .

Теория Ватсона, основанная на оценках (1), получила дальнейшее развитие в работе Жевре 1918 г. [5], который применил ее в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, для уравнения теплопроводности, и работе Ф. Неванлинны 1919 г. [9], результаты которого будут обсуждаться ниже.

Карлеман, см. [3], распространил результат теоремы единственности Ватсона на более общую ситуацию. Он заменил $n!$ в оценках (1) последовательностью положительных чисел m_n и, предполагая некоторую регулярность роста чисел m_n , когда $n \rightarrow \infty$, указал необходимые и достаточные условия единственности.

Разложения, удовлетворяющие условиям, подобным (4), получили название *разложений Жевре порядка k* (см. [5], [11] и [10]).

С начала прошлого века было известно, что в асимптотической теории систем линейных дифференциальных уравнений, имеющих в некоторой точке комплексной плоскости иррегулярную сингулярность ранга Пуанкаре k , особое значение имеют секторы раствора π/k . Сравнительно недавно было обнаружено, что асимптотические разложения Пуанкаре, ассоциированные с регулярными решениями таких систем, в действительности являются разложениями Жевре (см. [10]). Это свойство асимптотических разложений для регулярных решений оказалось справедливым не только для линейных систем, но и для существенно более широкого класса аналитических дифференциальных уравнений. Такое достижение в теории аналитических дифференциальных уравнений основано на следующем определении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим в z -плоскости некоторый сектор $S(\alpha, \beta)$, и пусть $P(z)$ — однозначная аналитическая функция в этом секторе. Введем в рассмотрение некоторый формальный степенной ряд с комплексными коэффициентами вида $\sum_{j=0}^{\infty} p_j/z^{j+1}$. Если для каждого собственного подсектора S' сектора $S(\alpha, \beta)$, $\overline{S'} \subset S(\alpha, \beta)$, можно указать положительные постоянные $M(S')$ и $a(S')$, такие, что

$$|\mathcal{R}_{n,P}(z)| \leq M(S') \frac{(n!)^{1/k}}{(ka(S'))^n |z|^{n+1}}, \quad z \in S', \quad (5)$$

то этот формальный ряд называется *разложением Жевре порядка k* , $k > 0$, функции $P(z)$ в секторе $S(\alpha, \beta)$.

§3. Основная теорема

Мы развиваем результат Ватсона в следующем направлении. Мы рассматриваем критический сектор S раствора, равного π , и выясняем, каким условиям должны подчиняться $M(S')$ и $a(S')$ для того, чтобы функция $P(z)$, обладающая в этом секторе разложением Жевре указанного выше вида, однозначно определялась коэффициентами этого разложения. Предположим для простоты,

что $k = 1$ и $S = S(-\pi/2, \pi/2)$. Поскольку наиболее существенным параметром, определяющим положение подсектора S' внутри S , является угловое отклонение границы этого подсектора от границы сектора S , нам достаточно ограничиться рассмотрением подсекторов S' вида $S' = S(-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta)$, где $0 < \delta < \pi/2$. В таком случае вместо функций $M(S')$ и $a(S')$ мы будем рассматривать $M(\delta)$ и $a(\delta)$, предполагая без ограничения общности, что $\log M(\delta) > 1$.

Для критического сектора $S(-\pi/2, \pi/2)$ справедливо следующее обобщение теоремы единственности Ватсона.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что в секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$ функция $P(z)$ допускает разложение Жевре порядка 1. Если $M(\delta)$ и $a(\delta)$ удовлетворяют условиям*

$$\int_0^{\pi/2} \log \log M(\delta) d\delta < \infty \quad (6)$$

и

$$\frac{\delta}{a(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (7)$$

то $P(z)$ однозначно определяется коэффициентами своего разложения Жевре.

Можно показать, что нарушение одного из условий (6) или (7) ведет к потере единственности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В тех ситуациях, когда функция $P(z)$ и формальный степенной ряд $\hat{P}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j/z^{j+1}$ являются решениями, регулярным и формальным соответственно, одного и того же аналитического дифференциального уравнения, случаи

$$M(\delta) = M \exp(b/\delta^\gamma) \quad (8)$$

и

$$M(\delta) = M \exp(b/\delta), \quad (9)$$

где положительные числа M , b и γ не зависят от δ , представляют особый интерес.

§4. Формула Стирлинга

Аналитические функции, удовлетворяющие условиям (1), (4) или (5), встречались в анализе с давних пор.

Мы напомним пример, основанный на формуле Стирлинга для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$, аналитической всюду в комплексной области за исключением точек $z = 0, -1, \dots$ отрицательной полуоси, где она имеет простые полюсы. В секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$ для $\Gamma(z)$ имеет место интегральное представление

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Формула Стирлинга означает, что

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1), \quad z \rightarrow +\infty.$$

Введем в рассмотрение так называемую *функцию Бине*

$$P(z) = \ln \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + z - \frac{1}{2} \ln 2\pi \quad (10)$$

и сопоставим этой функции последовательность $\{p_0, p_1, \dots\}$ таким образом, чтобы при некотором выборе M и a выполнялись соотношения (1).

Согласно первой формуле Бине, имеет место представление

$$P(z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(t) dt, \quad (11)$$

где

$$F(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right). \quad (12)$$

Поскольку функция $F(t)$ голоморфна внутри круга $|t| < 2\pi$, она может быть представлена в нем своим рядом Тейлора $\sum_{k=0}^\infty f_k t^k$. Подставляя в формулу (11) вместо функции $F(t)$ ее ряд Тейлора и меняя формально порядки суммирования и интегрирования, мы получаем

$$\hat{P}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k}{z^{k+1}}, \quad p_k = f_k k!.$$

Пользуясь тем, что функция $F(t)$ четна, $F(-t) = F(t)$, нетрудно заключить, что $p_{2k-1} = 0$ для $k = 1, 2, \dots$. Более детальный анализ позволяет указать точное выражение для четных коэффициентов

$$p_{2k-2} = \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь B_{2k} , $k = 0, 1, \dots$, являются числами Бернулли, которые могут быть определены как коэффициенты ряда Тейлора

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^\infty B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}; \quad (13)$$

см., например, формулы 23.1.1–23.1.3 и 6.1.42 в [1]. Таким образом, формальный ряд $\hat{P}(z)$ может быть записан в виде

$$\hat{P}(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}, \quad (14)$$

и в таком виде он известен как *ряд Стирлинга*¹⁾.

Формула (11) дает возможность показать, что $\hat{P}(z)$ является разложением Жевре функции $P(z)$ в секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$. Действительно, при $z \in S(-\pi/2, \pi/2)$ имеют место следующие неравенства:

¹⁾ Похожее выражение для ряда Стирлинга дается в [19], но обозначение B_k там относится к $(-1)^{k+1} B_{2k}$, где B_{2k} определены, как выше в (13).

$$|P(z)| \leq K(z) \frac{|B_2|}{2|z|},$$

$$\left| P(z) - \sum_{k=1}^n \frac{p_{2k-2}}{z^{2k-1}} \right| \leq K(z) \frac{|B_{2(n+1)}|}{(2n+2)(2n+1)|z|^{2n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где

$$K(z) = \max_{u \geq 0} \left| \frac{z^2}{u^2 + z^2} \right|$$

(см., например, формулу 6.1.42 в [1]).

Формула 23.1.15 из [1] дает, в частности, асимптотическое поведение чисел Бернулли

$$B_{2n+2} = (-1)^{n+2} \frac{2(2n+2)!}{(2\pi)^{2n+2}} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty, \quad (16)$$

и, следовательно, оценки (15) оказываются такими же, как в (1), и при этом $a = 2\pi$. Таким образом, ряд Стирлинга (14) служит разложением Жевре для функции $P(z)$ в секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Польза примера Стирлинга для нашей темы становится ясной, если принять во внимание следующие обстоятельства:

(i) С учетом формулы (16) оценки (15) гарантируют единственность в секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$ раствора, равного π , несмотря на то, что $K(z)$ на границе этого сектора обращается в бесконечность. Так как функция $K(z)$ в неравенстве (15) может быть переписана в виде

$$K(z) = \begin{cases} 1, & -\pi/4 < \arg z < \pi/4, \\ 1/\sin(2|\arg z|) & \pi/4 \leq |\arg z| < \pi/2, \end{cases} \quad (17)$$

то оказывается, что функция Бине (см. формулу (10)) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 с $M(\delta) = 1/\delta$.

(ii) Подставляя в неравенство (15) вместо n значение¹⁾ $n_{\text{opt}}(|z|) = [\pi|z| - 1]$, получаем

$$\left| P(z) - \sum_{k=1}^{[\pi|z|-1]} \frac{p_{2k-1}}{z^{2k-1}} \right| \leq K(z) \frac{2\sqrt{2\pi|z|}}{2\pi|z|-1} e^{-2\pi|z|}. \quad (18)$$

Для заданного фиксированного $z \in S(-\pi/4, \pi/4)$ оценка (18) указывает наилучшую возможную точность при замене функции $P(z)$ оптимальной конечной суммой ряда Стирлинга, и, как следует из формулы (17), для $|z| > 1$ ошибка оказывается меньшей, чем

$$Me^{-a|z|}, \quad (19)$$

где $M = 0,94891$ и $a = 2\pi$.

(iii) Пользуясь равенствами (11), (12), можно также показать, что формальный степенной ряд $\hat{P}(z)$ служит разложением Жевре для функции $P(z)$ во всем секторе $S(-\pi, \pi)$. Однако оценка (1) с $a = 2\pi$ справедлива лишь для внутреннего подсектора $S(-\pi/2, \pi/2)$. Можно показать, что в большем подсекторе

¹⁾Для заданного значения $|z|$ такое значение $n = n_{\text{opt}}(|z|)$ получается как результат минимизации по n выражения в правой части соотношения (15).

$S(-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$ имеет место оценка, подобная той, что указана в (1), но с постоянной a , зависящей от ε , $a(\varepsilon) = 2\pi \cos \varepsilon$.

В принципе, достаточные условия единственности можно получить, следуя, например, технике, основанной на теореме искажения Альфорса [2] и ее дополнении и уточнении, полученном Варшавским [16]. Однако мы демонстрируем доказательство, которое, во-первых, основано на более простых соображениях и, во-вторых, дает возможность более точно выявить роль каждого из условий (6) и (7).

§5. Основная лемма

Теорема 1 выводится из следующего обобщения леммы 1.

ЛЕММА 2. *Предположим, что функция $P(z)$ голоморфна в $S(-\pi/2, \pi/2)$. Предположим, далее, что для каждого δ , $0 < \delta < \pi/2$, и для всех z , $z \in S(-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta)$, функция $P(z)$ имеет оценку*

$$|P(z)| \leq M(\delta) e^{-a(\delta)|z|}, \quad (20)$$

где $M(\delta)$, $\log M(\delta) > 1$, и $a(\delta)$, $\delta \in (0, \pi/2)$, удовлетворяют условиям (6) и (7). Тогда

$$P(z) \equiv 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К сожалению, мы не имеем возможности рассматривать интеграл от функции $e^{zt}P(z)$ ни вдоль мнимой оси, ни вдоль параллельной ей оси. Такое препятствие вполне типично для подобных ситуаций, и мы покажем путь, который иногда дает возможность обойти его.

Задавая θ , $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, введем в рассмотрение преобразование Лапласа

$$F_\theta(t) = \int_{l_\theta} e^{zt} P(z) dz, \quad (21)$$

где $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$.

В дальнейшем мы покажем, что

- (i) функция $F_\theta(t)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость как целая функция $F(t)$, не зависящая от θ ;
- (ii) функция $F(t)$ ограничена вне любого сектора S_δ , $0 < \delta < \pi/2$, раствора 2δ с вершиной в точке $a(\delta)/(2 \sin \delta)$, содержащего интервал $(a(\delta)/(2 \sin \delta), +\infty)$ и симметричного относительно вещественной оси;
- (iii) на границе ∂S_δ сектора S_δ выполняется неравенство $|F(t)| \leq 2M(\delta)/a(\delta)$;
- (iv) функция $F(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Карлемана, которую мы приводим ниже и применение которой влечет за собой тождество $F(t) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В. П. Хавин, которому мы показали наш результат, обратил наше внимание на следующее обстоятельство. Если предположить, что функция $M(\delta)$ в (20) подчинена более сильному условию (9) и что функция $a(\delta)$ не зависит от δ , $a(\delta) = a$, то для любого c , $0 < c < a$, можно указать $h > 0$ и $M_h > 0$, такие, что

$$|P(h + iy)| < M_h e^{-c|y|}. \quad (22)$$

Тогда, согласно лемме 1, $P(z) \equiv 0$.

Для доказательства неравенства (22) нужно лишь заметить, что если $z = x + iy$ и $x/|y| = \operatorname{tg} \delta$, то с учетом (9) неравенство (20) может быть переписано в виде

$$|P(z)| < M \exp\left(\frac{b}{\operatorname{arctg}(x/|y|)}\right) e^{-a|z|}. \quad (23)$$

Далее, если $|y| \gg x > 0$, то (23) влечет за собой неравенство

$$|P(z)| < M' \exp\left(\frac{b|y|}{x}\right) e^{-a|y|},$$

справедливое при некотором выборе постоянной $M' > 0$. Из этого неравенства при подходящем выборе $x = h$, например $h = b/(a - c)$, немедленно следует (22).

К сожалению, это простое соображение перестает работать при более быстром росте функции $M(\delta)$, например, таком, как в условии (8).

Итак, мы возвращаемся к доказательству.

5.1. Область аналитичности функции $F_\theta(t)$. Всюду в доказательстве мы будем пользоваться символом a для обозначения функции $a(\delta)$, за исключением тех случаев, когда нам важно подчеркнуть зависимость этой функции от δ . Предположим также, не ограничивая общности, что $a(\delta)$ является убывающей функцией от δ . Пусть

$$\delta = \begin{cases} \pi/2 - \theta, & \theta > 0, \\ \pi/2 + \theta, & \theta < 0. \end{cases}$$

Тогда из (20) следует оценка

$$|F_\theta(t)| \leq M(\delta) \int_{l_\theta} |e^{zt}| e^{-a|z|} d|z|. \quad (24)$$

Рис. 1. Прямая $L_{\theta,a}$ и полуплоскость $\Pi_{\theta,a}$

Рис. 2. Прямые $L_{\mp\pi/2\pm\delta,a}$ и секторы $S_l(\delta,a)$ и $S_r(\delta,a)$

Поскольку

$$|e^{zt}| = e^{|z|(\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta)}, \quad t = \sigma + i\tau, \quad (25)$$

интеграл (21) абсолютно сходится в полуплоскости вида

$$\Pi_{\theta,a} = \{t \in \mathbb{C} : \sigma \cos \theta - \tau \sin \theta < a\}, \quad (26)$$

и, значит, функция $F_\theta(t)$ голоморфна в этой полуплоскости. В действительности при условии, что, например, $0 < \theta < \pi/2$, прямая

$$L_{\theta,a} = \{t \in \mathbb{C} : \sigma \cos \theta - \tau \sin \theta = a\} \quad (27)$$

делит t -плоскость на две полуплоскости и $\Pi_{\theta,a}$ является той из них, которая содержит начало координат, см. рис. 1.

Кроме того, из (24) и (25) для $t \in \Pi_{\theta,a}$ следует оценка

$$|F_\theta(t)| \leq M(\delta) \frac{1}{a - (\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta)}. \quad (28)$$

Мы покажем далее, что все функции вида $F_\theta(t)$, $|\theta| < \pi/2$, на самом деле являются элементами единой функции $F(t)$, которая не зависит от θ .

5.2. Соотношение, связывающее $F_\theta(t)$ и $F_{-\theta}(t)$. Задав δ , $0 < \delta < \pi/2$, рассмотрим пару функций $F_{\pi/2-\delta}(t)$ и $F_{-\pi/2+\delta}(t)$. Согласно сказанному выше, они голоморфны в симметричных относительно вещественной оси полуплоскостях $\Pi_{\pi/2-\delta,a}$ и $\Pi_{-\pi/2+\delta,a}$ соответственно,

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi/2-\delta,a} &= \{t \in \mathbb{C} : \sigma \sin \delta - \tau \cos \delta < a\}, \\ \Pi_{-\pi/2+\delta,a} &= \{t \in \mathbb{C} : \sigma \sin \delta + \tau \cos \delta < a\}. \end{aligned}$$

На рис. 2 показаны две прямые линии $L_{\pi/2-\delta,a}$ и $L_{-\pi/2+\delta,a}$, пересекающиеся в точке

$$t_{\delta,a} = \frac{a(\delta)}{\sin \delta} \quad (29)$$

вещественной оси t -плоскости под углами к этой оси, равными δ и $-\delta$ соответственно. Эти прямые определяют два сектора, $S_l(\delta, a)$ (левосторонний сектор) и $S_r(\delta, a)$ (правосторонний сектор), с вершинами в одной и той же точке $t_{\delta,a}$ и с одним и тем же раствором, равным 2δ .

Введем в рассмотрение секторы

$$S_1(\delta, a) = \Pi_{\pi/2-\delta,a} \cap \Pi_{-\pi/2+\delta,a} \quad \text{и} \quad S_2(\delta, a) = \Pi_{\pi/2-\delta,a} \cup \Pi_{-\pi/2+\delta,a}.$$

Левосторонний сектор $S_l(\delta, a)$ совпадает с $S_1(\delta, a)$, а замыкание правостороннего сектора $S_r(\delta, a)$ совпадает с дополнением к сектору $S_2(\delta, a)$. (См. рис. 3 и рис. 4.)

Рис. 3. Сектор $S_1(\delta, a)$

Рис. 4. Сектор $S_2(\delta, a)$

Пользуясь представлением (21) и теоремой Коши, имеем

$$F_{\pi/2-\delta}(t) = F_{-\pi/2+\delta}(t), \quad t \in S_1(\delta, a).$$

Таким образом, $F_{\pi/2-\delta}(t)$ и $F_{-\pi/2+\delta}(t)$ действительно являются элементами некоторой единой функции $F(t, \delta)$, где

$$F(t, \delta) = \begin{cases} F_{\pi/2-\delta}(t), & t \in \Pi_{\pi/2-\delta, a}, \\ F_{-\pi/2+\delta}(t), & t \in \Pi_{-\pi/2+\delta, a}, \end{cases} \quad (30)$$

и эта функция голоморфна в секторе $S_2(\delta, a)$.

5.3. Максимальная область аналитичности. Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Функции $F(t, \delta)$ вида (30) являются элементами единой аналитической функции $F(t)$, которая не зависит от δ и продолжается на всю комплексную t -плоскость как целая функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задавая $\delta' > \delta'' > 0$, рассмотрим соответствующие функции $F(t, \delta')$ и $F(t, \delta'')$.

Поскольку функция $a(\delta)$ убывает на интервале $(0, \pi/2)$, мы имеем

$$S_r(\delta', a) \supset S_r(\delta'', a)$$

и, следовательно,

$$\mathbb{C} \setminus S_r(\delta', a) \subset \mathbb{C} \setminus S_r(\delta'', a).$$

Пользуясь теми же соображениями, что и выше, мы заключаем, что

$$F(t, \delta') = F(t, \delta''), \quad t \in \mathbb{C} \setminus S_r(\delta', a),$$

и, значит, функцию $F(t, \delta'')$ можно рассматривать как аналитическое продолжение функции $F(t, \delta')$ на большую область $\mathbb{C} \setminus S_r(\delta'', a)$.

Выражение (29) для $t_{\delta, a}$ позволяет воспользоваться условием (7) теоремы 1, которое показывает, что $t_{\delta, a} \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, и откуда следует, что

$$\bigcap_{0 < \delta < \pi/2} S_r(\delta', a) = \emptyset.$$

Таким образом, все функции $F(t, \delta)$, $0 < \delta < \pi/2$, являются элементами единой целой функции $F(t)$, и утверждение (i), тем самым, проверено.

5.4. Оценки для функции $F(t)$ в t -плоскости. Пользуясь оценкой (28), справедливой в области

$$\bar{\Pi}_{\theta, a/2} = \Pi_{\theta, a/2} \cup L_{\theta, a/2},$$

где $\Pi_{\theta, a/2}$ и $L_{\theta, a/2}$ определены формулами (26) и (27) соответственно и где a заменено на $a/2$, мы находим, что

$$|F_\theta(t)| \leq \frac{2M(\delta)}{a}, \quad t \in \bar{\Pi}_{\theta, a/2}.$$

Отсюда и из представления (30) следует, что

$$|F(t, \delta)| \leq \frac{2M(\delta)}{a}, \quad t \in S_2(\delta, a/2), \quad (31)$$

и та же оценка справедлива для функции $F(t)$ из п. (i).

Итак, в секторе $S_2(\delta, a/2)$ функция $F(t, \delta)$, а значит, и функция $F(t)$ являются ограниченными, и (ii) проверено. Кроме того, как следует из (31), функция $F(t)$ удовлетворяет оценке

$$|F(t)| \leq \frac{2M(\delta)}{a(\delta)} \quad (32)$$

в секторе $S_2(\delta, a/2)$ и, следовательно, на границе этого сектора. Тем самым утверждение (iii) доказано.

Пользуясь снова условием (7), мы выводим из условия (32) следующую оценку:

$$|F(|t|e^{\pm i\delta})| < \frac{2M(\delta)}{\delta},$$

которая справедлива для достаточно малого δ и которая показывает, что мы находимся в ситуации, когда выполняются условия теоремы Карлемана.

5.5. Теорема Карлемана (см. [4]). *Предположим, что $M(\varphi)$ является положительной функцией (конечной или бесконечной) на интервале $(0, 2\pi)$, такой, что $\log M(\varphi) > 1$ и интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \log \log M(\varphi) d\varphi$$

конечен. Тогда всякая целая функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z)| < M(\varphi), \quad \varphi = \arg z, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

тождественна постоянной¹⁾.

Таким образом, $F(t) = C$ для некоторой постоянной C . Для завершения доказательства п. (iv) остается заметить, что поскольку для каждого δ справедливо соотношение

$$F(t, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty,$$

такое же соотношение выполняется для $F(t)$ и, значит, $F(t) \equiv 0$. Таким образом, п. (iv) доказан, откуда следует, что $P(z) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Результат Карлемана был в дальнейшем развит Левинсоном и Сьебергом (подробности можно найти, например, в обзоре Содина [14]), получившими максимально общий результат, из которого, в частности, следует распространение теоремы Карлемана на случай, когда сектор заменяется полуполосой. Заметим, однако, что в отличие от этого обобщения теорема Карлемана не нуждается ни в каких дополнительных условиях регулярности мажоранты M . Мы полагаем, что это обобщение может быть полезно при исследовании проблемы восстановления, которую мы обсуждаем ниже.

Теорема единственности Ватсона указывает на возможность восстановления функции $P(z)$, удовлетворяющей условиям (i) и (ii) этой теоремы, по коэффициентам формального степенного ряда $\hat{P}(z)$. Эту задачу можно решить, пользуясь методом суммирования по Борелю. Соответствующий результат мы называем

¹⁾Если функция $M(\varphi)$ удовлетворяет более строгому условию (8), то это заключение немедленно следует из теоремы Фрагмена–Линделёфа.

теоремой восстановления Ватсона. Доказательство этой теоремы было приведено Ватсоном в цитированной статье [17, Сес. 9]. См. также [18, р. 68, formulae (20)–(22)] и [8, Сес. 8.11].

§6. Теоремы восстановления

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВАТСОНА. *Предположим, что при некотором ε , $0 < \varepsilon < \pi/2$, в секторе $S(-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$ функция $P(z)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы единственности Ватсона. Введем в рассмотрение степенной ряд*

$$\hat{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} t^n, \quad (33)$$

который получается как результат суммирования по Борелю формального степенного ряда $\hat{P}(z)$. Тогда

(i) ряд (33) абсолютно сходится в круге D_a комплексной t -плоскости радиуса a и с центром в начале координат и представляет голоморфную в этом круге функцию $F(t)$;

(ii) функция $F(t)$ допускает аналитическое продолжение из круга D_a на область

$$D_{a,\varepsilon} = D_a \cup \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \varepsilon\}, \quad (34)$$

см. рис. 5;

(iii) функция $P(z)$ может быть представлена в виде преобразования Лапласа функции $F(t)$,

$$P(z) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-zt} dt, \quad (35)$$

и интеграл абсолютно сходится, когда $z \in S(-\pi/2, \pi/2)$.

Рис. 5. Область $D_{a,\varepsilon}$

Рис. 6. Область $\mathcal{D}_a$

Немедленно возникают вопросы. (а) Что случится с областью аналитичности (34) функции $F(t)$, если устремить ε к нулю? (б) Предполагая, что в секторе $S(-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$ функция $P(z)$ удовлетворяет условию (1) при фиксированных a и ε , можно ли улучшить результат п. (ii) теоремы восстановления Ватсона?

Ответ на вопрос (а) был указан Ф. Неванлинной в 1919 г., см. [9]. В действительности полученный Неванлинной результат относился к более общей

ситуации разложений Жевре произвольного порядка k , но принципиальная трудность заключается именно в вопросе (а). Любопытно, что Харди в своей монографии по расходящимся рядам, см. [8], обсуждая результаты Ватсона и Неванлинны, не обратил внимание на то улучшение результата Ватсона, которое было указано в [9] для полуплоскости.

Соответствующая же модификация теоремы восстановления Ватсона (ответ на вопрос (b)) появилась лишь 60 лет спустя. Это улучшение заключительной части теоремы восстановления Ватсона было найдено в 1980 г. Аланом Сокалом, который применил свой результат к разложениям в ϕ_2^4 -квантовой теории поля, см. [15]. Усовершенствование, найденное Сокалом, позволяет указать полную характеристику для большого класса функций, полученных как результат суммирования по Борелю.

Однако первое обращение к забытой теореме восстановления Ватсона случилось десятилетиями раньше в связи с теорией ангармонического осциллятора, см. [7].

Наша теорема 1 подсказывает аналогичный результат для функции $P(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1 в критическом секторе $S(-\pi/2, \pi/2)$, причем для функций $M(\delta)$ и $a(\delta)$ выполняются условия (6) и (7) соответственно.

Рассмотрим простейший случай, когда $M(\delta)$ и $a(\delta)$ — положительные постоянные. Как было указано ранее, теорема единственности Ватсона распространяется на этот случай, и это дает основание предполагать, что справедлива соответствующая теорема восстановления для $P(z)$.

Введем в рассмотрение область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида

$$\mathcal{D}_a = \{t \in \mathbb{C} : \text{dist}(t, (0, +\infty)) \leq a\}$$

(см. рис. 6), которая тем самым полностью определяется положением любой из ее точек. Мы будем называть ее *определяющей областью*.

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ Ф. НЕВАНЛИННЫ. *Предположим, что функция $P(z)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы единственности Ватсона в правой полуплоскости z -плоскости. Тогда функция $F(t)$ вида (33) может быть аналитически продолжена из круга D_a на область $\mathcal{D}_a$ комплексной t -плоскости как ограниченная функция; при этом функция $P(z)$ представляется как преобразование Лапласа функции $F(t)$ из формулы (35), и интеграл абсолютно сходится для $z \in S(-\pi/2, \pi/2)$.*

Сокал [15] формулирует (без доказательства) следующее обращение теоремы Неванлинны¹⁾.

ТЕОРЕМА. *Задавая a , $a > 0$, предположим, что функция $F(t)$ является аналитической и ограниченной в области $\mathcal{D}_a$ комплексной t -плоскости и ее ряд Тейлора имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$. Определим функцию $P(z)$ как преобразование Лапласа функции $F(t)$. Тогда она голоморфна в правой полуплоскости z -плоскости и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k k! / z^{k+1}$ является ее асимптотическим рядом, удовлетворяющим оценкам (1).*

¹⁾ В действительности Сокал приводит формально более общий результат, рассматривая наряду с правой полуплоскостью любую полуплоскость вида $\text{Re } z > b$, где b — вещественное число.

Кроме того, Сокал показал, как, пользуясь теоремой Неванлинны, можно модифицировать утверждение теоремы восстановления Ватсона, и это доказательство вполне простое. В самом деле, предположим, что выполняются условия теоремы восстановления Ватсона, и применим теорему Неванлинны к каждому подсектору сектора $S(-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$ раствора, равного π . Тогда получается, что функция $F(t)$ вида (35) является голоморфной в области $\mathcal{D}_{a,\theta} = e^{-i\theta} \mathcal{D}_a$, $|\theta| < \varepsilon$, для каждого такого θ , $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, а значит, $F(t)$ голоморфна и в объединении этих областей

$$\mathcal{D}_a(\varepsilon) = \bigcup \mathcal{D}_{a,\theta}. \quad (36)$$

Область (36) ограничена двумя касательными к окружности ∂D_a , образующими с положительной осью t -плоскости углы, равные $\pm\varepsilon$, а также внешней дугой окружности, их соединяющей. (См. рис. 7.)

Рис. 7. Область $\mathcal{D}_a(\varepsilon)$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Попробуем применить теорему Сокала к ситуации §4. Заметим, что для функции $F(t)$ вида (12) область $\mathcal{D}_{2\pi}$ является определяющей областью. Поскольку $F(t)$ имеет полюс в точке $t = 2\pi i$, принадлежащей границе области $\mathcal{D}_{2\pi}$, то она не удовлетворяет условиям этой теоремы. Таким образом, возникает задача такого усовершенствования результата Сокала, которое позволило бы применять ее к неограниченным функциям. Для примера Стирлинга это препятствие может быть немедленно преодолено следующим образом. Введем в рассмотрение функции $F_0(t) = 1/(t^2 + 4\pi^2)$ и $F_1(t) = F(t) - F_0(t)$. Определяющая область для функции $F_1(t)$ имеет вид $\mathcal{D}_{4\pi}$. Поэтому мы можем, применяя результат Сокала для функции $F_1(t)$ и области $\mathcal{D}_{2\pi}$, получить хорошую оценку для соответствующей функции $P_1(z)$ в секторе раствора, большего, чем π , см. замечание 2(iii). Таким образом, оценка (17) в этом замечании порождается элементарной функцией $F_0(t)$.

Мы намерены распространить эти результаты на более общие классы единственности, для которых функция $M(\delta)$ неограниченна. Мы предполагаем, что если заменить условие (6) более сильным условием

$$M(\delta) < M \exp(b/\delta),$$

то все еще сохраняется возможность восстановления функции $P(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, по коэффициентам ее разложения Жевре, если использовать при этом, как и выше, метод суммирования по Борелю.

Для классов функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1, в тех случаях, когда $M(\delta)$ растет быстрее, чем указано в (9), следует, по-видимому, искать альтернативные методы суммирования.

Дальнейшее обсуждение и распространение результатов Неванлинны и Сокала будет приведено в [6].

§7. Заключение

Мотивацией для настоящей статьи явились следующие два момента. Во-первых, желание понять результат Рамиса и Сибуйа, см. [12], [13], которые показали, что если формальный степенной ряд удовлетворяет аналитическому (не обязательно линейному) дифференциальному уравнению, то, грубо говоря, существует такое $k > 0$, что в каждом секторе (критического) раствора π/k существует регулярное решение уравнения, для которого указанное формальное является разложением Жевре порядка k . Кроме того, они доказали единственность такого решения, и это обстоятельство послужило причиной более внимательного рассмотрения ситуации с распространением теоремы единственности Ватсона на критический сектор. Если $P(z)$ является регулярным решением из теоремы Рамиса и Сибуйа, то мы предполагаем, что $M(\delta)$ удовлетворяет условию (8) и, вероятно, более сильному условию (9). Тем не менее пока это открытый вопрос. Во-вторых, желание найти наилучшую возможную оценку для отклонения функции от конечных сумм ее разложения Жевре. Это может быть сделано, если указать возможно более точные оценки для функций $M(\delta)$ и $a^{-1}(\delta)$, подобные приведенным в (19) для примера Стирлинга.

Благодарности. Авторы благодарны Нику Гарнхаму и Питеру Джонсу и Школе математических наук Свинбурнского технологического университета за их неизменную поддержку, а также Виктору Кацнельсону и Давиду Луси за многочисленные полезные обсуждения. Особую благодарность авторы приносят И. В. Островскому, чьи замечания и предложения позволили существенно улучшить первоначальный вариант статьи.

Второй автор выражает признательность Институту Вейцмана, Израиль, и фонду Розы и Макса Варонов (the Rosi and Max Varon Visiting Professorship program), поддержка которого содействовала завершению этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. J. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1965.
- [2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topic in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [3] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [4] T. Carleman, “Extension d’un théorème de Liouville”, *Acta Math.*, **48** (1926), 363–366; in: *Édition Complète des Articles de Torsten Carleman*, Inst. Math. Mittag-Leffler, Malmö, 1960, 271–274.
- [5] M. Gevrey, “Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles”, *Ann. Sci. Écol. Norm. Sup.* (3), **35** (1918), 129–190.
- [6] D. W. H. Gillam, V. Gurarii, “On the Watson–Nevanlinna recovering theorem”, готовится к печати.

- [7] S. Graffi, V. Grecchi, B. Simon, “Borel summability: Application to the anharmonic oscillator”, *Phys. Lett.*, **32B** (1970), 631–634.
- [8] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford: at the Clarendon Press, 1949.
- [9] F. Nevanlinna, “Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*, **XII**:3 (1919), 1–81.
- [10] J.-P. Ramis, “Théorèmes d’indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **48**:296 (1984).
- [11] J.-P. Ramis, “Séries divergentes et théories asymptotiques”, *Bull. Soc. Math. France*, **121** (1993).
- [12] J.-P. Ramis, Y. Sibuya, “Hukuhara Domain and Fundamental Existence and Uniqueness Theorems for Asymptotic Solutions of Gevrey Type”, *Asymptotic Analysis*, **2** (1989), 39–94.
- [13] J.-P. Ramis, Y. Sibuya, “A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations”, *Ann. Inst. Fourier*, **44**:3 (1994), 811–848.
- [14] M. Sodin, “Lars Ahlfors’ thesis”, in: *Lectures in Memory of Lars Ahlfors*, Israel Math. Conf. Proc. (Haifa, 1996), vol. 14, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 2000, 113–134.
- [15] A. D. Sokal, “An improvement of Watson’s theorem on Borel summability”, *J. Math. Phys.*, **21**:2 (1980), 261–263.
- [16] S. Warschawski, “On conformal mapping of infinite strips”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 280–335.
- [17] G. N. Watson, “A theory of asymptotic series”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **211** (1912), 279–313.
- [18] G. N. Watson, “The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorial”, *Circ. Math. Palermo Rend.*, **34** (1912), 41–88.
- [19] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

Faculty of Engineering and Industrial Sciences
 Swinburne University of Technology
 e-mail: dgillam@swin.edu.au

School of Mathematical Sciences
 Monash University
 e-mail: vladimir.vgurarii@sci.monash.edu.au

Поступило в редакцию
 7 апреля 2006 г.