Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Задача Переломова об обращении преобразования Баргмана–Сигала, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 4, 104–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:23:46

Задача Переломова об обращении преобразования Баргмана–Сигала*

© 2006. Ю. А. НЕРЕТИН

Памяти Бориса Яковлевича Левина

1. Формулировка результата. Фиксируем $\tau > 0$. Для функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ мы определим коэффициенты

$$\gamma_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \tau mx} f(x) e^{-x^2/4} dx,$$

где m, k пробегает $\mathbb{Z}$. Мы хотим восстановить f по $\gamma_{m,k}$. Как показал Переломов, это невозможно, если $\tau > \pi$. При $\tau \leq \pi$ задача переопределена; есть много способов восстановления f . Мы предлагаем формулу (при $\tau < \pi$), которая выглядит относительно просто и относительно замкнуто.

Положим $q := e^{-2\pi\tau}$. Определим коэффициенты $\mathcal{E}_m(\tau)$ формулой

$$\mathcal{E}_m(\tau) = \frac{q^{m(m-1)/2}}{\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l)^3} \sum_{j \geq 0} (-1)^j q^{j(j-2n-1)/2}. \quad (1)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{x^2/4} \sum_m \left\{ \mathcal{E}_m(\tau) e^{m\tau x} \sum_k \gamma_{m,k} e^{ikx} \right\}.$$

Внутренняя сумма понимается как L^2 -сумма ряда Фурье, внешняя сумма — сходящийся почти всюду ряд.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Данная задача известна в теории распознавания и разделения волн (т.е. звуковых или электромагнитных колебаний). Янссен [4] предложил несколько неэквивалентных формул для восстановления функции f . Формула (1) может быть легко выведена из его рассуждений. Наша заметка проясняет результаты Янсена и представляет их в красивом виде.

2. Любарский [6] предложил двухходовый вариант восстановления функции f . Он использует формулу Лагранжа для интерполяции преобразования Сигала–Баргмана по его значениям в точках решетки. Далее применяется формула обращения для преобразования Сигала–Баргмана. Я не знаю, можно ли получить красивую одноходовую формулу из этого алгоритма. Наше вычисление основано на той же идее, но дает иной результат.

2. Предварительные сведения о θ -функциях. Положим

$$\Theta(z; q) := (1 - z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - zq^n)(1 - z^{-1}q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^n q^{n(n-1)/2}$$

(выписанное равенство — это тройное тождество Якоби; см., например, [1]). Очевидно, что

$$\Theta(qz; q) = (-z^{-1})\Theta(qz; q).$$

Итерируя это тождество, мы получаем

$$\Theta(q^n z; q) = (-z)^{-n} q^{-n(n-1)/2} \Theta(z; q). \quad (2)$$

Функция

$$\eta(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2 \ln q} \ln^2 |z| + \frac{1}{2} \ln q \ln |z| \right\} \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению $\eta(qz) = |z|^{-1} \eta(z)$. Поэтому $|\Theta(z; q)|$ может быть представлена в форме

$$|\Theta(z; q)| = \eta(z) \psi(z), \quad \text{где } \psi(qz) = \psi(z). \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\Theta'(1; q) = \frac{d}{dx} \Theta(x; q) \Big|_{x=1} = -\prod (1 - q^n)^3.$$

Дифференцируя (2) и подставляя $z = 1$, мы получаем

$$\Theta'(q^n; q) = (-1)^{n+1} q^{-n(n-1)/2} \Theta'(1; q). \quad (5)$$

3. Интерполяционная задача. Положим $g(x) = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-x^2/4}$. Применяя формулу суммирования Пуассона к функции $g(x) e^{-\tau m x}$, мы получаем

$$e^{m\tau x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{m,k} e^{ikx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x + 2\pi j) e^{-2\pi\tau m j}.$$

Обозначим правую часть тождества через A_m . Рассмотрим функцию

$$G_x(z) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x + 2\pi j) z^j,$$

определенную в области $\mathbb{C} \setminus 0$. Тогда $G_x(q^m) = A_m$. Мы получаем интерполяционную задачу для голоморфных функций и решаем ее стандартным способом (см. [5]).

Положим

$$\tilde{G}_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\Theta(z; q)}{(z - q^n) \Theta'(q^n; q)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{(-1)^{n+1} q^{n(n-1)/2}}{\prod (1 - q^j)^3} \frac{\Theta(z; q)}{(z - q^n)}. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$G_x(q^n) = \tilde{G}_x(q^n). \quad (7)$$

Следовательно,

$$G_x(z) = \tilde{G}_x(z) + \Theta(z; q) \alpha(z) \quad (8)$$

для некоторой функции $\alpha(z)$, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus 0$.

ЛЕММА. $G_x(z) = \tilde{G}_x(z)$, т. е. $\alpha(z) = 0$.

Наша окончательная формула вытекает из этой леммы. Действительно, $g(x)$ является лорановским коэффициентом функции $G_x(z)$ при z^0 . Остается выписать лорановское разложение функции

$$(z - q^n)^{-1} \Theta(z; q) = (z - q^n)^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l z^l q^{l(l-1)/2}.$$

Полагая $|z| > q^n$, мы получаем

$$(z^{-1} + z^{-2}q^n + z^{-3}q^{2n} + \dots) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l z^l q^{l(l-1)/2}$$

и находим (1) как коэффициент при z^0 .

4. Доказательство леммы. Мы представляем тождество (8) в форме

$$G_x(z)/\Theta(z; q) = \tilde{G}_x(z)/\Theta(z; q) + \alpha(z). \quad (9)$$

Для функции $\Phi(z)$ мы выведем величину

$$\mathcal{M}_k[\Phi] := \max_{|z|=q^{k+1/2}} |\Phi(z)|.$$

Наша цель — проанализировать поведение этих максимумов для слагаемых выражения в правой части формулы (9) при $k \rightarrow \pm\infty$.

А) Прежде всего,

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(x + 2\pi j)|^2 \right) dx.$$

Поэтому (по теореме Фубини) значение

$$V_x := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(x + 2\pi j)|^2$$

конечно для почти всех x .

В) В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} |G_x(z)| &= \left| \sum f(x + 2\pi j) e^{-(x+2\pi j)^2/4} z^j \right| \\ &\leq \left(\sum |f(x + 2\pi j)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum e^{-(x+2\pi j)^2/2} |z|^{2j} \right)^{1/2} \\ &= V_x^{1/2} \cdot [e^{-x^2} \Theta(-|z|^2 e^{-2\pi x - 2\pi^2}; e^{-4\pi^2})]^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя (3), (4), мы получаем для $|G_x(z)|$ верхнюю оценку вида

$$|G_x(z)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \ln^2 |z| + O(\ln |z|) + O(1) \right\}. \quad (10)$$

В частности,

$$|A_m| = |G_x(q^m)| \leq \exp \left\{ \frac{\ln^2 q}{4\pi^2} m^2 + O(m) + O(1) \right\}.$$

В силу формулы (5)

$$\Theta'(q^m; q) = \exp \{-m^2 \ln q/2 + O(m) + O(1)\}.$$

Так как $-\ln q = 2\pi\tau < 2\pi^2$, мы получаем следующую оценку:

$$|A_m/\Theta'(q^m; q)| \leq \exp\{-\varepsilon m^2\}.$$

С) Для функции $\tilde{G}_x(z)/\Theta(z; q)$ (она является одним из слагаемых в (9)) имеем

$$\mathcal{M}_k[\tilde{G}_x(z)/\Theta(z; q)] = \mathcal{M}_k\left[\sum_m \frac{A_m}{\Theta'(q^m; q)} \cdot \frac{1}{z - q^m}\right] \leq \sum \frac{e^{-\varepsilon m^2}}{|q^{k+1/2} - q^m|}.$$

Далее,

$$|q^{k+1/2} - q^m| = q^m |1 - q^{-m+k+1/2}| \geq q^m (1 - q^{1/2}).$$

Это влечет за собой ограниченность последовательности $\mathcal{M}_k[\cdot]$.

Кроме того,

$$|q^{k+1/2} - q^m| \geq q^{k+1} (1 - q^{1/2}).$$

Следовательно, $\mathcal{M}_k[\cdot]$ стремится к 0 при $k \rightarrow -\infty$.

Д) В силу формулы (4)

$$\mathcal{M}_k[\Theta(z)^{-1}] \sim \eta(z)^{-1} \Big|_{|z|=q^{k+1/2}}.$$

Ввиду (3) и (10)

$$\mathcal{M}_k[G_x(z)/\Theta(z; q)] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \pm\infty.$$

Е) Мы имеем

$$\mathcal{M}_k[\alpha(z)] \leq \mathcal{M}_k[G_x(z)/\Theta(z; q)] + \mathcal{M}_k[\tilde{G}_x(z)/\Theta(z; q)].$$

Итак, $\mathcal{M}_k[\alpha(z)]$ стремится к 0 при $k \rightarrow -\infty$ и остается ограниченной при $k \rightarrow +\infty$. Так как $\alpha(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus 0$, мы получаем $\alpha(z) = 0$.

Я благодарю Ю. И. Любарского, объяснившего мне разные приемы, связанные с целыми функциями. Я также благодарю Г. Фейхтингера, А. М. Вершика и К. Грешонию за обсуждение этого предмета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
 [2] V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder, *Rep. Math. Phys.*, **2**:4 (1971), 221–228. [3] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, MA, 2001. [4] A. J. E. M. Janssen, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **1**:4 (1994), 330–354. [5] Б. Я. Левин, *Распределение нулей целых функций*, ГИИТЛ, М., 1956.
 [6] Yu. I. Lyubarskiĭ, in: *Entire and Subharmonic Functions*, Adv. Soviet Math., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 167–180. [7] A. M. Perelomov, *Teoret. Mat. Fiz.*, **6**:2 (1971), 213–224. [8] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

ИТЭФ, группа матфизики
 Венский университет
 e-mail: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию
 29 сентября 2005 г.