Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Сафаров, Неравенства Березина и Гординга, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 69–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:48:34

УДК 517.983.3

Неравенства Березина и Гординга

© 2005. Ю. Г. САФАРОВ

§1. Введение

Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, B — самосопряженный оператор, а P — ортогональный проектор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда

$$\mathrm{Tr} \varphi(PB|_{PH}) \leq \mathrm{Tr}(P\varphi(B)|_{PH}) \quad (1)$$

при условии, что операторы в правой и левой частях корректно определены и принадлежат классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$. Эта оценка была доказана в [1] и часто называется неравенством Березина (некоторые обобщения оценки (1) были получены в [8]). По спектральной теореме каждый самосопряженный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения в L_2 . Поэтому результат Березина можно переформулировать следующим образом. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, b — вещественнозначная функция, $\{b\}$ — соответствующий оператор умножения, $U: H \rightarrow L_2$ — изометрия на подпространство в L_2 и $\mathcal{Q}(b) := U^*\{b\}U$. Тогда

$$\mathrm{Tr} \varphi(\mathcal{Q}(b)) \leq \mathrm{Tr} \mathcal{Q}(\varphi(b)), \quad (2)$$

если только операторы $\mathcal{Q}(b)$ и $\mathcal{Q}(\varphi(b))$ корректно определены и принадлежат $\mathfrak{S}_1$.

Неравенство Березина использовалось для исследования спектральных свойств дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. Если B — самосопряженный псевдодифференциальный оператор с символом σ_B , то при определенных предположениях $\varphi(B)$ представляет собой псевдодифференциальный оператор, символ которого совпадает с $\varphi(\sigma_B)$ с точностью до членов более низкого порядка. В этом случае правая часть неравенства (1) равна сумме интеграла от $\varphi(\sigma_B)$ и остатка более низкого порядка, а неравенство (1) приводит к асимптотическим формулам для спектра оператора $PB|_{PH}$ (см., например, [9]). Если существуют изометрия $U: H \rightarrow L_2$ и функция b , такие, что $B = \mathcal{Q}(b)$ и след $\mathrm{Tr} \mathcal{Q}(\varphi(b))$ дается явной формулой, то неравенство (2) дает оценки для спектра самого оператора B (см., например, [4]).

Первая схема работает только для самосопряженных псевдодифференциальных операторов B и опирается на символическое функциональное исчисление. Вторая схема позволяет получать оценки только в терминах функции b , которая зависит от выбора изометрии U . Основной проблемой в этой схеме является построение подходящей изометрии U и исследование соотношения между b и фактическим символом σ_B . Для некоторых операторов это можно проделать с помощью так называемых когерентных состояний (как в [2] или [4]). За исключением некоторых весьма частных случаев, формулы, связывающие b и σ_B , содержат остаточный член более низкого порядка. Эти формулы вместе с (2)

приводят к асимптотическим оценкам в терминах σ_B с аналогичным остаточным членом.

Цель данной работы — показать, что неравенство Березина представляет собой элементарное следствие неравенства Гординга. Если неравенство Гординга выполнено с остаточным членом более низкого порядка, то неравенство Березина содержит остаточный член того же порядка. Заметим, что неравенство Гординга является более простым результатом, чем символическое функциональное исчисление или представление с помощью когерентных состояний и, как правило, непосредственно следует из любого из последних.

Неравенства (1) и (2) легко доказать, представляя квадратичную форму оператора $PB|_{PH}$ или B в виде интеграла Лебега и затем применяя неравенство Иенсена. Наше доказательство не использует спектральную теорему или интегралы Лебега. Вместо этого мы показываем, что неравенство Иенсена справедливо для более общих функционалов, и применяем его к подходящим образом подобранным функционалам на пространстве символов.

§2. Выпуклые функции

В этом параграфе мы кратко напомним некоторые результаты выпуклого анализа. Имея в виду возможные приложения к операторнозначным функциям σ , мы рассмотрим выпуклые функции на бесконечномерном локально выпуклом вещественном векторном пространстве X . Все результаты и доказательства элементарны, и их нельзя существенно упростить даже для случая $X = \mathbb{R}$.

Функция $\varphi: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется *выпуклой*, если ее надграфик $\mathcal{E}(\varphi) := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times X: t \geq \varphi(\mathbf{x})\}$ — выпуклое подмножество в $\mathbb{R} \times X$. Выпуклая функция называется *правильной*, если $|\varphi| \not\equiv \infty$, и *замкнутой* (или *полунепрерывной снизу*), если $\mathcal{E}(\varphi)$ замкнут в $\mathbb{R} \times X$ в топологии прямого произведения. Если надграфик $\mathcal{E}(\varphi)$ лежит по одну сторону от гиперплоскости $\mathcal{H}$, проходящей через точку $(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, то $\mathcal{H}$ называется *опорной* гиперплоскостью в точке $(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$. Если φ выпукла и $\dim X < \infty$, то в каждой точке $(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ имеется по меньшей мере одна (возможно, вертикальная) опорная гиперплоскость. В бесконечномерном случае опорных гиперплоскостей может и не быть.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{R}^\infty$ — пространство вещественных последовательностей $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$, снабженное топологией поэлементной сходимости, а $\varphi(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^\infty x_j^{-1}$, если $x_j > 0$ при всех j и сумма конечна; в противном случае $\varphi(\mathbf{x}) := +\infty$. Тогда у замкнутого выпуклого множества $\mathcal{E}(\varphi)$ нет опорных гиперплоскостей. Иными словами, ни один линейный непрерывный функционал не достигает минимума на множестве $\mathcal{E}(\varphi)$.

Если опорная гиперплоскость $\mathcal{H}$ не вертикальна, то она совпадает с графиком аффинной функции $l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - t^*$ для некоторых $t^* \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x}^*$ из сопряженного пространства X^* . Множество векторов $\mathbf{x}^* \in X^*$, порождающих невертикальные опорные гиперплоскости в точке $(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, называется *субдифференциалом* функции φ в точке $\mathbf{x}$ и обозначается через $\partial\varphi(\mathbf{x})$.

Замкнутая выпуклая функция $\varphi^*(\mathbf{x}^*) := \sup_{\mathbf{x} \in X} \{\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - \varphi(\mathbf{x})\}$ на X^* называется *сопряженной* к φ . Следующий хорошо известный результат (см., например, [6] или [5]) представляет собой элементарное следствие теоремы об отделивающей гиперплоскости.

ЛЕММА 2. Если φ — правильная замкнутая выпуклая функция, то $\varphi \equiv \varphi^{**}$.

Включение $(t^*, \mathbf{x}^*) \in \mathcal{E}(\varphi^*)$ имеет место тогда и только тогда, когда $l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in X$. Для заданных $\varepsilon \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in X$ обозначим через $\partial_\varepsilon \varphi(\mathbf{x}_0)$ множество таких точек $(t^*, \mathbf{x}^*) \in \mathcal{E}(\varphi^*)$, что $\varphi(\mathbf{x}_0) - \varepsilon \leq l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}_0)$. В частности,

$$\partial_0 \varphi(\mathbf{x}_0) = \{(t^*, \mathbf{x}^*) \in \mathcal{E}(\varphi^*) : \mathbf{x}^* \in \partial \varphi(\mathbf{x}_0), t^* = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0 \rangle - \varphi(\mathbf{x}_0)\}.$$

Множество $\partial_0 \varphi(\mathbf{x}_0)$ вполне может быть пустым даже для $X = \mathbb{R}$. Если $\dim X = \infty$, то может случиться, что $\partial_0 \varphi(\mathbf{x}_0) = \emptyset$ для всех $\mathbf{x}_0 \in X$ (см. пример 1). Однако, согласно лемме 2, $\partial_\varepsilon \varphi(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$ при условии, что $\varphi(\mathbf{x}_0) < +\infty$.

§3. Неравенство Иенсена

Пусть L_X — некоторое множество функций $\sigma: \Xi \rightarrow X$, определенных на непустом множестве Ξ , $L_{\mathbb{R}}$ — некоторое множество вещественнозначных функций на Ξ , $\mathcal{I}_X$ — отображение множества L_X в X , а $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}: L_{\mathbb{R}} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ — вещественный функционал на $L_{\mathbb{R}}$.

ЛЕММА 3. Пусть φ — правильная замкнутая выпуклая функция, такая, что $\varphi(\sigma) \in L_{\mathbb{R}}$. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $(t^*, \mathbf{x}^*) \in \partial_\varepsilon \varphi(\mathcal{I}_X(\sigma))$, что

$$(a_1) \quad l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\sigma) \in L_{\mathbb{R}} \text{ и } l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\mathcal{I}_X(\sigma)) \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\sigma)) + C_1,$$

$$(a_2) \quad \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\sigma)) \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\varphi(\sigma)) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — вещественные постоянные. Тогда $\varphi(\mathcal{I}_X(\sigma)) \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\varphi(\sigma)) + C_1 + C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(t^*, \mathbf{x}^*) \in \partial_\varepsilon \varphi(\mathcal{I}_X(\sigma))$, то из условий (a_1) и (a_2) следует неравенство

$$\varphi(\mathcal{I}_X(\sigma)) - \varepsilon \leq l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\mathcal{I}_X(\sigma)) \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(l_{t^*, \mathbf{x}^*}(\sigma)) + C_1 \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\varphi(\sigma)) + C_1 + C_2.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. $\square$

Неравенство (a_1) выполнено при $C_1 = 0$ при условии, что

$$(a'_1) \quad \text{функционал } \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \text{ линейен, } \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(1) = 1, \text{ а } \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\langle \mathbf{x}^*, \sigma \rangle) = \langle \mathbf{x}^*, \mathcal{I}_X(\sigma) \rangle.$$

Условие (a_2) выполнено при $C_2 = 0$ для всех монотонных функционалов $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, т. е. функционалов $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющих следующему условию:

$$(a'_2) \quad \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \leq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\sigma_2), \text{ если только } \sigma_1, \sigma_2 \in L_{\mathbb{R}} \text{ и } \sigma_1(\theta) \leq \sigma_2(\theta) \text{ для всех } \theta \in \Xi.$$

Если $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ — интеграл Лебега по вероятностной мере или нормированный интеграл Перрона и если $\mathcal{I}_X$ — соответствующий векторнозначный интеграл, понимаемый в слабом смысле, то условия (a'_1) и (a'_2) выполнены для всех интегрируемых функций и всех точек $(t^*, \mathbf{x}^*) \in \mathbb{R} \times X^*$. Таким образом, стандартное неравенство Иенсена вытекает из леммы 3. Следующий пример менее очевиден.

ПРИМЕР 4. Пусть A — линейный положительный оператор в пространстве $L_2(\Xi)$, $L_{\mathbb{R}}$ — пространство ограниченных измеримых функций на Ξ , а V_σ — оператор умножения на функцию σ . Обозначим через $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots$ упорядоченные собственные значения расширения по Фридрихсу оператора $A + V_\sigma$, лежащие ниже его существенного спектра.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и возьмем $X = \mathbb{R}$ и $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\sigma) = \lambda_n(\sigma)$. В силу формулы Рэлея–Ритца $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условию (a'_2) при всех $\sigma \in L_{\mathbb{R}}$. Неравенство

$$A + tV_\sigma \geq \delta(A + V_\sigma) + (t - \delta)\lambda_n(\sigma) + \inf_{\theta \in \Xi} ((t - \delta)(\sigma(\theta) - \lambda_n))$$

справедливо при всех $\delta \in [0, 1]$ и $t \in \mathbb{R}$. Пусть φ — правильная замкнутая выпуклая функция, такая, что $\varphi(\sigma) \in L_{\mathbb{R}}$. Из указанного выше неравенства

следует условие (a_1) с постоянной

$$C_1 = F(\lambda_n(\sigma)) := \max\{a_-(\sup \sigma - \lambda_n(\sigma))_+, (b-1)_+(\lambda_n(\sigma) - \inf \sigma)\},$$

где $a = \sup \partial\varphi(\inf \sigma)$, $b = \inf \partial\varphi(\sup \sigma)$, а индексы $\pm$ обозначают положительную и отрицательную части (мы полагаем, что $\sup \partial\varphi(t) := -\infty$ и $\inf \partial\varphi(t) := +\infty$ при $\partial\varphi(t) = \emptyset$). Таким образом,

$$\varphi(\lambda_n(\sigma)) \leq \lambda_n(\varphi(\sigma)) + F(\lambda_n(\sigma))$$

по лемме 3. Заметим, что $F(\lambda_n(\sigma)) = 0$ при условии, что $[a, b] \subset [0, 1]$ или $[a, b] \subset [-\infty, 1]$ и $\sup \sigma \leq \lambda_n(\sigma)$.

§4. Неравенство Березина

Пусть $L_{\mathbb{C}}$ — некоторое линейное пространство комплекснозначных функций на Ξ , содержащее постоянные функции и замкнутое относительно комплексного сопряжения, а $L_{\mathbb{R}}$ — его подпространство вещественнозначных функций. Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{Q}$ пространства $L_{\mathbb{C}}$ в пространство линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H (квантование), такое, что $\mathcal{Q}(1) = I$ и $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(\sigma)) = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(\operatorname{Re} \sigma)) \cap \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(\operatorname{Im} \sigma))$. Если $\sigma \in L_{\mathbb{C}}$, то через Ω_{σ} обозначим числовую область значений оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$, через Λ_{σ} — множество его собственных значений, а через $m(\lambda)$ — алгебраическую кратность собственного значения $\lambda \in \Lambda_{\sigma}$.

Зафиксируем ограниченный оператор T и для заданного $\nu \in \mathbb{R}$ через G_{ν} обозначим множество функций $\sigma \in L_{\mathbb{R}}$, таких, что

$$(G) \operatorname{Re}(\mathcal{Q}(\sigma)u, u)_H \geq -\nu(Tu, u)_H \text{ для всех } u \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}(\sigma)).$$

ЛЕММА 5. Пусть $\sigma \in L_{\mathbb{C}}$, и пусть φ — правильная замкнутая выпуклая функция на $\mathbb{C}$. Предположим, что для любых $\varepsilon > 0$ и $z \in \Omega_{\sigma}$ существует точка $(t^*, z^*) \in \partial_{\varepsilon}\varphi(z)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$(b_1) \operatorname{Im}(\mathcal{Q}(\operatorname{Im}(z^*\bar{\sigma}))u, u)_H \leq \nu_1(Tu, u)_H \text{ для всех } u \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}(\sigma)),$$

$$(b_2) \varphi(\sigma) - \operatorname{Re}(z^*\bar{\sigma}) + t^* \in G_{\nu_2},$$

где ν_1 и ν_2 — вещественные постоянные. Тогда

$$\varphi((\mathcal{Q}(\sigma)u, u)_H) \leq \operatorname{Re}(\mathcal{Q}(\varphi(\sigma))u, u)_H + (\nu_1 + \nu_2)(Tu, u)_H \quad (3)$$

при условии, что $u \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}(\sigma)) \cap \mathcal{D}(\mathcal{Q}(\varphi(\sigma)))$ и $\|u\|_H = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествим $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$ таким образом, что $\langle z^*, z \rangle = \operatorname{Re}(z^*\bar{z})$ для всех $z, z^* \in \mathbb{C}$. Тогда неравенство (3) сразу следует из леммы 3 при $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}(\sigma) = (\mathcal{Q}(\sigma)u, u)_H$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\sigma) = \operatorname{Re}(\mathcal{Q}(\sigma)u, u)_H$ и $C_j = \nu_j(Tu, u)_H$. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть $\sigma \in L_{\mathbb{R}}$, и пусть φ — правильная замкнутая выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Если

$$(b'_1) \text{ оператор } \mathcal{Q}(\sigma) \text{ симметрический}$$

и для любых $\varepsilon > 0$ и $z \in \Omega_{\sigma}$ существует точка $(t^*, z^*) \in \partial_{\varepsilon}\varphi(z)$, удовлетворяющая условию (b_2) , то неравенство (3) выполнено с $\nu_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это частный случай леммы 5 с выпуклой функцией на $\mathbb{C}$, равной φ на $\mathbb{R}$ и $+\infty$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\square$

Заметим, что второе условие в леммах 5 и 6 выполнено, если φ дифференцируема и

$$(b'_2) \varphi(\sigma) - \varphi(z) - \operatorname{Re}(\varphi'_z(z)(\sigma - z)) \in G_{\nu_2} \text{ для всех } z \in \Omega_{\sigma}.$$

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что σ и φ удовлетворяют условиям леммы 5 или 6, $\mathcal{Q}(\varphi(\sigma)) \in \mathfrak{S}_1$, $T \in \mathfrak{S}_1$ и выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:*

(с₁) φ неотрицательна,

(с₂) множество обобщенных собственных векторов оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$ полно. Тогда множество $\Lambda_{\sigma, \varphi}^+ := \{\lambda \in \Lambda_\sigma : \varphi(\lambda) > 0\}$ счетно, каждое собственное значение $\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+$ имеет конечную алгебраическую кратность, $\sum_{\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+} m(\lambda)\varphi(\lambda) < \infty$ и

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_\sigma} m(\lambda)\varphi(\lambda) \leq \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \mathcal{Q}(\varphi(\sigma)) + (\nu_1 + \nu_2) \operatorname{Tr} T. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_k\}$ — конечный набор обобщенных собственных векторов оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Обозначим через $H_{\mathbf{v}}$ конечномерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$, натянутое на векторы $(\mathcal{Q}(\sigma) - \lambda_j)^n v_j$, $j = 1, \dots, k$, $n = 0, 1, \dots$. Ограничение $\mathcal{Q}(\sigma)|_{H_{\mathbf{v}}}$ оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$ на это подпространство имеет те же собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем их алгебраические кратности $m_{\mathbf{v}}(\lambda_j)$ не превосходят $m(\lambda_j)$. По лемме Шура оператор $\mathcal{Q}(\sigma)|_{H_{\mathbf{v}}}$ представляется треугольной матрицей с диагональными элементами λ_j в некотором ортонормированном базисе $\{u_j\} \subset H_{\mathbf{v}}$. Применяя неравенство (3) к векторам u_j , видим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k m_{\mathbf{v}}(\lambda_j)\varphi(\lambda_j) &\leq \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \Pi_{\mathbf{v}} \mathcal{Q}(\varphi(\sigma)) + (\nu_1 + \nu_2) \operatorname{Tr} \Pi_{\mathbf{v}} T \\ &\leq \|\mathcal{Q}(\varphi(\sigma))\|_{\mathfrak{S}_1} + \|(\nu_1 + \nu_2)T\|_{\mathfrak{S}_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Pi_{\mathbf{v}}$ — ортогональный проектор на подпространство $H_{\mathbf{v}}$.

Если бы множество $\Lambda_{\sigma, \varphi}^+$ было несчетным или же имелось бы собственное значение $\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+$ бесконечной алгебраической кратности, то мы могли бы найти положительную постоянную δ и произвольно большой набор $\mathbf{v}$ собственных векторов v_j , таких, что $\lambda_j \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+$ и $\varphi(\lambda_j) \geq \delta$. Однако это противоречит неравенству (5). Таким образом, $\Lambda_{\sigma, \varphi}^+$ счетно и $m(\lambda) < \infty$ для всех $\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+$. Выбирая последовательность расширяющихся конечных множеств $\mathbf{v}_1 \subset \mathbf{v}_2 \subset \mathbf{v}_3 \subset \dots$, объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n$ которых содержит все собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+$, применяя неравенство (5) с $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ и устремляя n к бесконечности, видим, что сумма $\sum_{\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+} m(\lambda)\varphi(\lambda)$ оценивается такой же суммой ядерных норм.

Чтобы доказать неравенство (4), заметим, что если множество $\Lambda_{\sigma, \varphi}^- := \{\lambda \in \Lambda_\sigma : \varphi(\lambda) < 0\}$ несчетно или содержит собственное значение бесконечной алгебраической кратности, то левая часть в (4) равна $-\infty$. Таким образом, без потери общности можно предположить, что множество обобщенных собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda \in \Lambda_{\sigma, \varphi}^+ \cup \Lambda_{\sigma, \varphi}^-$, счетно. Выберем такую последовательность конечных множеств $\mathbf{v}_1 \subset \mathbf{v}_2 \subset \mathbf{v}_3 \subset \dots$, что объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n$ содержит все эти собственные векторы и $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\mathbf{v}_n}} = H'$, где H' — замкнутая линейная оболочка всех обобщенных собственных векторов оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$.

Если выполнено (с₂), то $H' = H$. Поэтому, полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ в первом неравенстве в (5) и устремляя n к бесконечности, приходим к неравенству (4). Если

$H' \neq H$ и $\varphi \geq 0$, то выберем ортонормированный базис $\{\tilde{u}_i\}$ в $(H')^\perp$, применим (3) к $\tilde{u}_i$ и сложим получившиеся неравенства, а также первое неравенство в (5) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$. Поскольку $\varphi((\mathcal{Q}(\sigma)\tilde{u}_i, \tilde{u}_i)_H) \geq 0$, для доказательства неравенства (4) остается устремить n к бесконечности. $\square$

Если выпуклая функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ принимает отрицательные значения, то множество ее нулей состоит не более чем из двух точек. В этом случае из включения $\varphi(\mathcal{Q}(\sigma)) \in \mathfrak{S}_1$ вытекает справедливость условия (c_2) для каждого самосопряженного оператора $\mathcal{Q}(\sigma)$. Поэтому неравенство (2) представляет собой частный случай теоремы 7 при $T = 0$.

§5. Псевдодифференциальные операторы

В теории псевдодифференциальных операторов множество Ξ представляет собой кокасательное расслоение T^*M области $M \subset \mathbb{R}^n$ или многообразия M , а $H = L_2(M)$. Для $M \subset \mathbb{R}^n$ квантование определяется формулой

$$\mathcal{Q}_\tau(\sigma)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_M e^{ih^{-1}(x-y) \cdot \xi} \sigma(\tau x + (1-\tau)y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (6)$$

где τ — заданное число из отрезка $[0, 1]$, а h — вещественный параметр (см., например, [3]). Это определение можно распространить на многообразия M (см. [10]). Функции σ на T^*M называются τ -символами, а при $\tau = 1/2$ — вейлевскими символами. В классической теории псевдодифференциальных операторов полагают $h = 1$ и определяют порядок символа σ в терминах его поведения при больших ξ ; в квазиклассической теории порядок определяется в терминах поведения при $h \rightarrow 0$.

Если $M \subset \mathbb{R}^n$, то, очевидно, $(\mathcal{Q}_\tau(\sigma)u, u)_H = (u, \mathcal{Q}_{1-\tau}(\bar{\sigma})u)_H$. Это равенство остается верным на многообразии M , если определить τ -квантование, как в [10]. Отсюда следует, что оценка (b_1) выполнена для $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{1/2}$ при $\nu_1 = 0$.

Если $\sigma \geq 0$ и T — оператор более низкого порядка, то неравенство (G) называется неравенством Гординга или неравенством Феффермана–Фонга (последнее дает более точный результат в терминах порядка оператора T). Постоянную ν в этом неравенстве обычно можно оценить через функционал $\mathcal{G}(\sigma)$, включающий частные производные символа σ до некоторого конечного порядка (см., например, [7, 3] или [12]). Условие (b_2) означает, что неравенство (G) выполняется равномерно на множестве неотрицательных функций $\varphi(\sigma) - \text{Re}(z^* \bar{\sigma}) + t^*$, а это происходит при условии, что функционал $\mathcal{G}$ равномерно ограничен на этом множестве. Можно получить явные формулы для $\mathcal{G}$, анализируя известные доказательства неравенства Гординга. Однако такой анализ лежит за пределами данной статьи. Вместо этого мы закончим изложение тремя примерами, демонстрирующими возможные приложения теоремы 7 (в последних двух примерах условие (b_2) может быть доказано напрямую).

ПРИМЕР 8. Пусть M — компактное n -мерное многообразие класса C^∞ , H — пространство интегрируемых с квадратом полуплотностей на M , S^m — хёрмандеровский класс символов, а Ψ^m — соответствующий класс классических псевдодифференциальных операторов в H . Рассмотрим эллиптический положительный псевдодифференциальный оператор $A \in \Psi^1$ и обозначим через Π_μ его спектральный проектор, соответствующий полуоткрытому интервалу $[0, \mu)$.

Хорошо известно, что $\text{rank } \Pi_\mu < \infty$ и

$$\text{Tr}(B\Pi_\mu) = (2\pi)^{-n} \int_{\sigma_A(x, \xi) < \mu} \sigma_B(x, \xi) dx d\xi + O(\mu^{n+m-1}), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (7)$$

для каждого $B \in \Psi^m$ при условии, что $n + m - 1 \geq 0$, где σ_A и σ_B — главные символы операторов A и B (см., например, [7] или [11]).

Пусть $L_{\mathbb{C}} = S^0$, квантование $\mathcal{Q}_{1/2}: S^0 \rightarrow \Psi^0$ определено, как в [10], $\mathcal{Q}(\sigma) := \Pi_\mu \mathcal{Q}_{1/2}(\sigma)|_{\Pi_\mu H}$ и $T = \Pi_\mu A^{-1}|_{\Pi_\mu H}$. Если $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$ — выпуклая функция, то в силу неравенства Гординга выполнено условие (b'_2) с некоторой постоянной ν_2 , зависящей от σ и φ . Поскольку $\sigma - \sigma_B \in S^{-1}$, если только $B = \mathcal{Q}_{1/2}(\sigma)$ (см. [10]), из теоремы 7 и формулы (7) получаем, что

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{\mu, B}} m(\lambda) \varphi(\lambda) \leq (2\pi)^{-n} \int_{\sigma_A(x, \xi) < \mu} \varphi(\sigma_B(x, \xi)) dx d\xi + O(\mu^{n-1}), \quad \mu \rightarrow \infty,$$

для любого оператора $B \in \Psi^0$, где $\Lambda_{\mu, B}$ — множество собственных значений оператора $\Pi_\mu B|_{\Pi_\mu H}$, а $m(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Выписанное выше неравенство было получено в [9] для самосопряженных операторов $B \in \Psi^0$.

В следующих ниже примерах $M \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество, а D — ограниченное открытое подмножество в T^*M .

ПРИМЕР 10. Пусть σ — характеристическая функция множества D , $\sigma' := 1 - \sigma$, $L_{\mathbb{C}}$ — линейное пространство, натянутое на σ и σ' , а $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$. Если $R := \mathcal{Q}_1(\sigma)\mathcal{Q}_0(\sigma')$, то $\mathcal{Q}_1(\sigma) = \mathcal{Q}_1(\sigma)\mathcal{Q}_0(\sigma) + R$, $\mathcal{Q}_1(\sigma') = \mathcal{Q}_1(\sigma')\mathcal{Q}_0(\sigma') + R^*$ и

$$2 \text{Im}(\mathcal{Q}_1(\text{Im}(z^* \sigma))u, u)_H = \text{Im } z^*((R - R^*)u, u)_H, \quad \forall z^* \in \mathbb{C}.$$

Поэтому условия (b_1) и (b'_2) выполнены с $T = |\text{Re } R| + |\text{Im } R|$, $\nu_1 = \sup_{z \in \Omega_\sigma} |\text{Im } \varphi'_z(z)|$ и $\nu_2 = \sup_{z \in \Omega_\sigma} |\varphi(1) - \text{Re } \varphi'_z(z)|$ для любой неотрицательной дифференцируемой выпуклой функции $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, обращающейся в нуль в начале координат $z = 0$. Операторы $\mathcal{Q}_1(\sigma)$ и $\mathcal{Q}_0(\sigma')$ принадлежат классу Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2$. Поэтому $T \in \mathfrak{S}_1$, $\mathcal{Q}_1(\varphi(\sigma)) \in \mathfrak{S}_1$, и из теоремы 7 следует, что

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_\sigma} m(\lambda) \varphi(\lambda) \leq (2\pi h)^{-n} \varphi(1) \int_D dx d\xi + 4(\varphi(1) + \sup_{z \in \Omega_\sigma} |\varphi'_z(z)|) \|R\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Приближая σ и σ' гладкими функциями с носителями в D и $T^*M \setminus D$ соответственно, обращающимися в нуль вблизи края ∂D , видим, что $\|R\|_{\mathfrak{S}_1} = o(h^{-n})$ при $h \rightarrow 0$. Если размерность Минковского d границы ∂D строго меньше n , то эту оценку можно улучшить и показать, что $\|R\|_{\mathfrak{S}_1} = O(h^{\alpha-n})$, где α — положительная постоянная, зависящая от d .

ПРИМЕР 11. Пусть $C_0^\kappa(D)$ — подпространство пространства Гёльдера $C^\kappa(\mathbb{R}^{2n})$, состоящее из вещественных функций, равных нулю вне D . Зафиксируем $\varepsilon > 0$, обозначим через $L_{\mathbb{R}}$ вещественное линейное пространство, натянутое на $C_0^{n/2+2+\varepsilon}(D)$ и постоянные функции и рассмотрим вейлевское квантование на $L_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{R}}$.

Пусть $\sigma \in C_0^{n/2+2+\varepsilon}(D)$, и пусть φ — неотрицательная выпуклая функция на замыкании $\overline{\Omega}_\sigma$, такая, что $\varphi \in C^{n/2+2+\varepsilon}$ и $\varphi'' \geq \delta > 0$ (напомним, что $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}$). Тогда $\varphi_z(\sigma) := \varphi(\sigma) - \varphi(z) - \varphi'(z)(\sigma - z) = (\psi_z(\sigma))^2$, где $\psi_z \in C^{n/2+2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{2n})$. Разлагая функцию $\psi_z((x+y)/2, \xi)$ по формуле Тейлора в точках $x = y$ и $y = x$, заменяя $(x-y)e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi}$ на $-ih\nabla_\xi e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi}$ в (6) и интегрируя по частям по переменной ξ , легко показать, что разность $\mathcal{Q}_{1/2}(\varphi_z(\sigma)) - \mathcal{Q}_1(\psi_z(\sigma))\mathcal{Q}_0(\psi_z(\sigma))$ представляет собой конечную сумму операторов R_k , ядра Шварца которых задаются осциллирующими интегралами вида

$$ih^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \int_0^1 e^{ih^{-1}(x-y)\cdot\xi} a_{k,1}(l_{k,1}(t_1, x, y), \xi) a_{k,2}(l_{k,2}(t_2, x, y), \xi) dt_1 dt_2 d\xi,$$

где $a_{k,j}$ — производная функции $\psi_z(\sigma)$ порядка 0, 1 или 2, а $l_{k,j}(t, x, y)$ — одна из следующих функций: x , y , $x + t(y - x)/2$ или $y + t(x - y)/2$. Амплитуды в этих осциллирующих интегралах обращаются в нуль при достаточно больших ξ , поскольку функции $\psi_z(\sigma)$ постоянны вне множества D и каждая амплитуда включает по крайней мере одну производную функции ψ_z порядка 1 или 2. Кроме того, нас интересуют только точки $x, y \in M$. Поэтому $a_{k,j}(l_{k,j}(t_j, x, y), \xi)$ можно заменить на $b_{k,j}(l_{k,j}(t_j, x, y), \xi) := \chi(l_{k,j}(t_j, x, y), \xi) a_{k,j}(l_{k,j}(t_j, x, y), \xi)$, где χ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, равная 1 на достаточно большом шаре. Имеем

$$b_{k,1}(l_{k,1}(t_1, x, y), \xi) b_{k,2}(l_{k,2}(t_2, x, y), \xi) \\ = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta_1 \cdot l_{k,1}(t_1, x, y)} \hat{b}_{k,1}(\eta_1, \xi) e^{i\eta_2 \cdot l_{k,2}(t_2, x, y)} \hat{b}_{k,2}(\eta_2, \xi) d\eta_1 d\eta_2,$$

где $\hat{\cdot}$ обозначает преобразование Фурье по первым n переменным. Так как $b_{k,j} \in C_0^{n/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^{2n})$, то функции $(1+|\eta|)^{n/2+\varepsilon} \hat{b}_{k,j}(\eta, \xi)$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}^{2n})$ и их L_2 -нормы оцениваются постоянными, зависящими от D и гёльдеровских норм функций σ и ψ_z . Подставляя это представление в соответствующий осциллирующий интеграл, видим, что $R_k = R_{k,1}^* R_{k,2}$, где $R_{k,j}$ — операторы Гильберта–Шмидта, действующие из пространства $L_2(M)$ в $L_2(\mathbb{R}^{3n} \times [0, 1]^2)$.

Так как $\mathcal{Q}_1(\psi_0(\sigma)) \in \mathfrak{S}_2$ и $R_{k,j} \in \mathfrak{S}_2$, то $\mathcal{Q}_{1/2}(\varphi_0(\sigma)) \in \mathfrak{S}_1$. Нормы Гильберта–Шмидта операторов $R_{k,j}$ оцениваются через $C_{k,j} h^{1-n}$, где постоянные $C_{k,j}$ зависят только от δ , M , D и гёльдеровских норм функций σ и φ . Поэтому из теоремы 7 вытекает, что

$$\mathrm{Tr} \varphi_0(\mathcal{Q}_{1/2}(\sigma)) \leq (2\pi h)^{-n} \int_{T^*M} \varphi_0(\sigma) dx d\xi + C h^{1-n},$$

где C — постоянная, зависящая от тех же параметров. Если $\mathcal{Q}_{1/2}(\sigma) \in \mathfrak{S}_1$ и $\varphi(0) = 0$, то это неравенство выполняется и для функции φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф. А. Выпуклые функции от операторов. Матем. сб., **88**, 268–276 (1972).
2. Березин Ф. А. Ковариантные и контравариантные символы операторов. Изв. АН СССР, сер. матем., **36**, 1134–1167 (1972).
3. Dimassi M., Sjöstrand J. Spectral Asymptotics in the Semiclassical Limit. Cambridge University Press, 1999.

4. *Evans W. D., Lewis R. T., Siedentop H., Solovej J. P.* Counting eigenvalues using coherent states with an application to Dirac and Schrödinger operators in the semi-classical limit. *Ark. Mat.*, **34**, 265–283 (1996).
5. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. *Stud. Math. Appl.*, Vol. 1, North-Holland, Elsevier, 1976.
6. *Giles J. R.* Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions. *Res. Notes Math.*, Vol. 58, Pitman, 1982.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Мир, М., 1987.
8. *Laptev A., Safarov Yu.* A generalization of the Berezin–Lieb inequality for convex functions. In: *Contemporary Mathematical Physics*. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996, pp. 69–80.
9. *Laptev A., Safarov Yu.* Szegő type limit theorems. *J. Funct. Anal.*, **138**, 544–559 (1996).
10. *Safarov Y.* Pseudodifferential operators and linear connections. *Proc. London Math. Soc.*, **74**, 379–417 (1997).
11. *Safarov Yu., Vassiliev D.* The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators. *Transl. Math. Monographs*, Vol. 155, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.
12. *Tataru D.* On the Fefferman–Phong inequality and related problems. *Comm. Partial Differential Equations*, **27**, No. 11–12, 2101–2138 (2002).

Department of Mathematics, King's College, UK
e-mail: ysafarov@mth.kcl.ac.uk

Поступило в редакцию
14 сентября 2004 г.