Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Камоцкий, М. В. Ружанский, Оценки и спектральные асимптотики для систем с кратностью, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 78–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:17:28

Оценки и спектральные асимптотики для систем с кратностью*

© 2005. И. В. Камоцкий, М. В. Ружанский

1. Введение. Пусть X — гладкое многообразие без края размерности $n \geq 3$. Пусть P — эллиптический самосопряженный псевдодифференциальный оператор первого порядка, действующий на полуплотностях на m -мерных сечениях векторных расслоений над X . Для функции $u = u(t, x)$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} iu' - Pu = 0, & (t, x) \in [0, T] \times X, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Хорошо известно, что спектральная асимптотика оператора P тесно связана с представлением пропагатора задачи (1) в виде интегрального оператора Фурье. Такое представление было получено в [4] в случае, когда задача (1) строго гиперболическая, т. е. когда характеристики (термы) оператора P вещественны и попарно различны. В этом случае первый и второй члены спектральной асимптотики оператора P были получены в работах [3] и [2]. В случае когда оператор P имеет кратные термы a_j , $1 \leq j \leq m$, и гладко диагонализуем, а также выполнено условие $\{a_j, a_k\} \neq 0$ в точках кратности $a_j = a_k$, решение задачи (1) было представлено как асимптотический ряд по гладкости в работе [7]. Члены этого ряда являются итерированными интегральными операторами Фурье, проинтегрированными по времени. Там же были исследованы спектральные асимптотики таких систем. Отметим, что некоторые результаты о втором члене спектральной асимптотики были получены также в [5] без условия гладкой диагонализуемости, но при дополнительных предположениях на распространение особенностей решений системы (1) (которых мы не налагаем).

Оценки решений в L^p для строго гиперболических скалярных уравнений и невырожденных интегральных операторов Фурье были получены в [9]. См. также обзор [8], где оценки в L^p были связаны с геометрическими свойствами и особенностями волновых фронтов соответствующих интегральных операторов Фурье.

Сделаем следующие предположения. Предположим, что главный символ оператора P гладко микролокально диагонализуем, т. е. микролокально имеет гладкие собственные пространства и гладкие собственные значения a_j . Предположим также, что существует число M , такое, что для всех $(x, \xi) \in T^*X$ и всех $1 \leq j, k \leq m$, $j \neq k$, таких, что a_j и a_k не совпадают тождественно, в точках $a_j(x, \xi) = a_k(x, \xi)$ для итерированных скобок Пуассона выполнено условие

$$\{a_j, \{a_j, \dots \overbrace{\{a_j, a_k\}}^{\lambda}\} \dots\}(x, \xi) \neq 0, \quad (2)$$

*Работа поддержана EPSRC, грант GR/R67583/01.

для некоторого $\lambda(x, \xi) \leq M$. Строго гиперболический случай соответствует $M = 0$. Трансверсальный случай Розенблюма в [7] соответствует $M = 1$. Случай скользящих поверхностей Мелроуза [6] соответствует $M = 2$. Отметим, что условие (2) описывает указанные системы в общем положении.

2. Формулировка результатов. Оказывается возможным установить (в целом точные) оценки в L^p для решений задачи (1). Через $L_\alpha^p = W^{p, \alpha}$ обозначим обычное пространство Соболева над L^p с $\alpha \in \mathbb{R}$ производными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$ и $\alpha = (n-1)|1/p - 1/2|$. Пусть $P = P(t, x, D_x)$ есть $m \times m$ -матрица, составленная из классических эллиптических псевдодифференциальных операторов первого порядка. Пусть

$$P(t, x, D_x) = A(x, D_x) + B(t, x, D_x),$$

где A — симметричная матрица из псевдодифференциальных операторов первого порядка, а B — матрица из операторов нулевого порядка, гладко зависящих от t . Предположим, что матрица A удовлетворяет условию (2). Тогда для всех функций $f \in L_\alpha^p \cap L^2$ с компактным носителем решение $u = u(t, x)$ задачи Коши

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - P(t, x, D_x)u = 0, \quad u(0) = f, \quad (3)$$

принадлежит L_{loc}^p для всех $0 < t \leq T$ при некотором $T > 0$. Более того, найдется такое $C > 0$, что выполнено неравенство $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C_T \|f\|_{L_\alpha^p}$.

Условие гладкой микролокальной диагонализуемости матрицы A выполнено в ряде важных случаев. Так, некоторые системы Максвелла гладко диагонализуются (см. [1]). Более того, слабо гиперболические скалярные операторы с инволютивными характеристиками могут быть приведены к системе, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Обозначим через $\Phi_J(T, x, \xi)$ гамильтонов поток по ломаным траекториям системы. При $J = (j_1, \dots, j_k)$ в момент T это поток из (x, ξ) по бихарактеристике a_{j_1} до точки пересечения $a_{j_1} = a_{j_2}$, затем поток по бихарактеристике a_{j_2} и т. д. Для упрощения формулировки предположим сейчас, что термы a_k положительны. Если имеются также и отрицательные термы, то с помощью псевдодифференциальных проекторов можно исследовать каждую из задач в отдельности.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что многообразие X компактно и что выполнено условие (2). Обозначим через D множество тех $(x, \xi) \in T^*X$, для которых существуют T и J , такие, что $\Phi_J(T, x, \xi) = (x, \xi)$. Предположим, что D имеет нулевую меру. Тогда спектр оператора P имеет вейлевскую асимптотику

$$N(\lambda) = \#\{j : \lambda_j < \lambda\} = c_n \lambda^n + c'_n \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}),$$

где λ_j — собственные значения оператора P .

Основными составляющими доказательства являются представление решения задачи (1) в виде асимптотического ряда, исследование свойств членов этого ряда и доказательство их сглаживающих свойств. Основная техническая сложность по сравнению с [7] — это доказательство сглаживания при $M > 1$.

Теорема 2 выводится из полученного представления. Теорема 1 требует дополнительного анализа остатка ряда, а также использования некоторых фактов из функционального анализа и теории функций.

3. Обсуждение. 1. Условие (2) означает, что бихарактеристики, соответствующие терму a_j , пересекают поверхность уровня $a_k = 1$ с порядком, не превышающим M .

2. Оценки решений теоремы 1 совпадают с оценками решений строго гиперболических уравнений. В общем случае потеря $(n-1)|1/p - 1/2|$ производных в L^p является точной, например, в случае, когда размерность сингулярного носителя интегрального ядра разрешающего оператора равна $2n-1$. В работе [8] эти оценки улучшены в ряде случаев с учетом геометрии волновых фронтов пропагаторов. Подобные оценки важны в исследовании нелинейных уравнений и других задачах гармонического анализа.

3. С помощью асимптотического представления решения задачи (1) и методов гармонического анализа, из L^p -оценок, полученных в теореме 1, выводятся L^p - L^q -оценки, а также оценки в пространствах Липшица, Харди и т. д. (см. [8]).

4. Отметим, что оценки теоремы 1 можно получить также для оператора A , зависящего от времени. Однако условие (2) меняется и не имеет очевидной геометрической интерпретации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурман М. Ш., Соломяк М. З. УМН, **42**, вып. 6 (258), 61–76 (1987).
2. Duistermaat J. J., Guillemin V. Invent. Math., **29**, 39–79 (1975).
3. Hörmander L. Acta Math., **121**, 193–218 (1968).
4. Hörmander L. Acta Math., **127**, 79–183 (1971).
5. Иврий В. Я. Функци. анализ и его прил., **16**, 101–108 (1982).
6. Melrose R. Invent. Math., **37**, 165–191 (1976).
7. Розенблум Г. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **96**, 255–271, 311–312 (1980).
8. Ружанский М. В. УМН, **55**, 99–170 (2000).
9. Seeger A., Sogger C. D., Stein E. M. Ann. of Math., **134**, 231–251 (1991).

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова,
Imperial College, London
e-mail: i.kamotski@imperial.ac.uk

Imperial College, London
e-mail: ruzh@ic.ac.uk

Поступило в редакцию
5 февраля 2004 г.

УДК 517.9

Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах*

© 2005. М. И. КАРАХАНЫАН

1. Известная теорема Фугледе устанавливает, что если нормальный ограниченный оператор с гильбертова пространства коммутирует с некоторым ограниченным оператором x , то он коммутирует и с сопряженным с ним оператором. В таком виде эта теорема давно входит в учебники по функциональному анализу (см., например, [1]). У этой теоремы, имеющей давнюю историю, имеются, в

*Работа поддержана EPSRC, грант GR/R67583/01.