Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Караханян, Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:31:52

Теорема 2 выводится из полученного представления. Теорема 1 требует дополнительного анализа остатка ряда, а также использования некоторых фактов из функционального анализа и теории функций.

3. Обсуждение. 1. Условие (2) означает, что бихарактеристики, соответствующие терму a_j , пересекают поверхность уровня $a_k = 1$ с порядком, не превышающим M .

2. Оценки решений теоремы 1 совпадают с оценками решений строго гиперболических уравнений. В общем случае потеря $(n-1)|1/p - 1/2|$ производных в L^p является точной, например, в случае, когда размерность сингулярного носителя интегрального ядра разрешающего оператора равна $2n-1$. В работе [8] эти оценки улучшены в ряде случаев с учетом геометрии волновых фронтов пропагаторов. Подобные оценки важны в исследовании нелинейных уравнений и других задачах гармонического анализа.

3. С помощью асимптотического представления решения задачи (1) и методов гармонического анализа, из L^p -оценок, полученных в теореме 1, выводятся L^p - L^q -оценки, а также оценки в пространствах Липшица, Харди и т. д. (см. [8]).

4. Отметим, что оценки теоремы 1 можно получить также для оператора A , зависящего от времени. Однако условие (2) меняется и не имеет очевидной геометрической интерпретации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурман М. Ш., Соломяк М. З. УМН, **42**, вып. 6 (258), 61–76 (1987).
2. Duistermaat J. J., Guillemin V. Invent. Math., **29**, 39–79 (1975).
3. Hörmander L. Acta Math., **121**, 193–218 (1968).
4. Hörmander L. Acta Math., **127**, 79–183 (1971).
5. Иврий В. Я. Функци. анализ и его прил., **16**, 101–108 (1982).
6. Melrose R. Invent. Math., **37**, 165–191 (1976).
7. Розенблум Г. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **96**, 255–271, 311–312 (1980).
8. Ружанский М. В. УМН, **55**, 99–170 (2000).
9. Seeger A., Sogger C. D., Stein E. M. Ann. of Math., **134**, 231–251 (1991).

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова,
Imperial College, London
e-mail: i.kamotski@imperial.ac.uk

Imperial College, London
e-mail: ruzh@ic.ac.uk

Поступило в редакцию
5 февраля 2004 г.

УДК 517.9

Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах*

© 2005. М. И. КАРАХАНЫАН

1. Известная теорема Фугледе устанавливает, что если нормальный ограниченный оператор с гильбертова пространства коммутирует с некоторым ограниченным оператором x , то он коммутирует и с сопряженным с ним оператором. В таком виде эта теорема давно входит в учебники по функциональному анализу (см., например, [1]). У этой теоремы, имеющей давнюю историю, имеются, в

*Работа поддержана EPSRC, грант GR/R67583/01.

свою очередь, многочисленные и разнообразные обобщения. В частности, в [2] установлено, что на шаре $\|x\| \leq 1$ коммутатор $[c^*, x]$ мал (по норме), если мал $[c, x]$ (асимптотический вариант теоремы Фуглде).

В ином ключе эта теорема обобщается в [3]. А именно, пусть a, b, x — элементы комплексной банаховой алгебры с единицей, причем $[a, b] = 0$. Предположим, что для вещественных t при $|t| \rightarrow \infty$ выполняются соотношения $\|\exp ita\| = o(|t|^{1/2})$, $\|\exp itb\| = o(|t|^{1/2})$. Если при этом $[a + ib, x] = 0$, то $[a, x] = [b, x] = 0$.

В дальнейшем Е. А. Горин [4] среди прочего показал, что заменить в последней теореме $o(|t|^{1/2})$ на $O(|t|^{1/2})$ нельзя. Однако центральное место в [4] занимает ослабление условия $[a, b] = 0$.

Асимптотические варианты этих результатов, причем такие, в которых «малость» измеряется в широком классе топологий, были получены автором в [5, 6]. В своем реферате (Math. Rev., Febr., 1998) последней работы Е. А. Горин кратко наметил план дальнейших естественных обобщений, и здесь мы опишем, как этот план можно реализовать. Заметим, что речь будет идти об алгебре непрерывных линейных операторов, действующих на банаховой алгебре. Чтобы получить исходные результаты, в качестве операторов, о которых пойдет речь, надо брать операторы типа $\operatorname{ad} a: x \rightarrow [a, x]$, где a — элемент исходной алгебры.

2. Мы будем широко пользоваться результатами статьи [4], и нужно вкратце напомнить соответствующие факты, поскольку мы намерены дать схему доказательства.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}\{x, y\}$ — свободная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Как известно, ряд Кемпбелла–Хаусдорфа $z(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(x, y)$, где z_k — однородные полиномы Ли, определяется формальным тождеством $(\exp x) \cdot (\exp y) = \exp z(x, y)$. Например, $z_1 = x + y$, $z_2 = [x, y]/2$ и т. д. В [4] установлено существование таких однозначно определенных симметрических полиномов $w_{n,k} = w_{n,k}(x, y)$ степени $n - k$, что

$$x^n - y^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} w_{n,k}(x, y) \cdot z_k(x, -y).$$

Например, $x^2 - y^2 = (x + y)z_1(x, -y) - 2z_2(x, -y)$ и т. д.

Сверткой Шура формальных степенных рядов φ, ψ с коэффициентами α_k, β_k соответственно называется формальный степенной ряд $\varphi * \psi$ с коэффициентами $k! \cdot \alpha_k \cdot \beta_k$. Если φ, ψ — ряды Тейлора аналитических функций, причем φ является аналитической функцией в диске $|\lambda| < \rho$, а ψ — функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, то $\varphi * \psi$ — ряд Тейлора функции, аналитической в диске $|\lambda| < \rho/\sigma$. При целой φ функция $\varphi * \psi$ также будет целой.

3. Пусть A — банахова алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(A)$ — алгебра всех ограниченных операторов, действующих на A , и $\mathfrak{A}$ — минимальная замкнутая подалгебра в $\mathfrak{B}$, содержащая все операторы умножения (как слева, так и справа) на элементы из A .

Фиксируем конечное множество $\Sigma = \{S_1, \dots, S_m\} \subset \mathfrak{A}$ и пару φ, ψ целых функций, в которой ψ — функция конечного экспоненциального типа. Через $E_r = E_{\varphi}(S_r)$ обозначим банахово пространство всех целых функций f , для которых $\|f\|_r \stackrel{\text{def}}{=} \sup |f(\lambda)| / \|\varphi(\lambda S_r)\| < \infty$, и положим $E_{\varphi}(\Sigma) = \bigcap_{r \leq m} E_r$.

Наконец, отметим на алгебре A такую локально выпуклую топологию τ , что умножение в ней непрерывно по каждому из сомножителей и, кроме того, тождественное отображение из A с исходной топологией (порожденной нормой) в $\{A, \tau\}$ непрерывно. Стандартные топологии в алгебрах операторов этими свойствами обладают.

4. ТЕОРЕМА. *Предположим, что $(\psi * f)(1) = 0$ для всех $f \in E_\varphi(\Sigma)$. Пусть $T \in \Sigma$. Тогда для каждой окрестности нуля $W \subset A$ в топологии τ найдется такая окрестность нуля $V \subset A$ в той же топологии и такое число n , что равномерно по x из шара $\|x\| \leq 1$ будет выполняться следующее утверждение: если $z_k(S, -T)x \in V$ при всех $S \in \Sigma$ и всех $k \leq n$, то $(\varphi * \psi)(T)x \in W$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Принадлежность к $E_\varphi(\Sigma)$ определяется неравенствами, которым должна подчиняться целая функция. В довольно содержательных ситуациях, когда в качестве φ берется экспонента (= единица по свертке Шура), согласно теореме Фрагмена–Линделёфа, это пространство может оказаться конечномерным пространством полиномов. Тогда в качестве ψ можно взять моном, и тем же мономом будет $\varphi * \psi$. В простейшем случае, когда в этом пространстве нет ничего, кроме констант (так будет в случаях, сравнительно близких к самой теореме Фугледе), заключение будет состоять в том, что $Tx \in W$.

Эскиз ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Пусть q — непрерывная полунорма на $\{A, \tau\}$ и $\varepsilon > 0$. Мы должны указать такую окрестность нуля V и такое n , чтобы при указанных в теореме условиях имело место неравенство $q(Rx) < \varepsilon$, где $R = (\varphi * \psi)(T)$.

Можно считать, что $q(x) \leq \|x\|$ при всех $x \in A$. Пусть θ — произвольный линейный функционал на A , для которого $|\theta(x)| \leq q(x)$ при всех x . Достаточно убедиться, что $|\theta(Rx)| < \varepsilon$ сразу для всех таких функционалов.

Пусть σ — тип функции ψ . Пусть F — стандартная диск-алгебра в диске $|\lambda| \leq \rho$, где $\rho > \sigma$, и пусть Δ — замкнутый единичный шар в F . Обозначим через Δ_r замкнутый единичный шар в E_r . Можно считать, что $\Delta_r \subset \Delta$. Ясно, что замыкание $\text{cl}_F(\Delta_r)$ — компакт в Δ .

Так как $\rho > \sigma$, то функционал $h: f \rightarrow (\psi * f)(1)$ (имеет смысл и) непрерывен на F . Так как $h|_{\bigcap_r \Delta_r} = 0$, то для некоторого $\delta > 0$ неравенство $|(\psi * f)(1)| < \varepsilon$ будет выполняться, если найдутся такие $f_r \in \Delta_r$, что $|f(\lambda) - f_r(\lambda)| < \delta$ при $|\lambda| \leq \rho$ и $1 \leq r \leq m$.

Если взять $f(\lambda) = \theta(\varphi(\lambda T)x)$, то неравенство $|(\psi * f)(1)| < \varepsilon$ будет совпадать с тем, которое требуется доказать. Поэтому остается предъявить f_r с указанными свойствами. Довольно ясно, что надо взять $f_r(\lambda) = \theta(\varphi(\lambda S_r)x)$ (здесь x играет роль дополнительного параметра, который не мешает, так как $\|x\| \leq 1$). Хвосты рядов $f(\lambda) - f_r(\lambda)$ достаточно оценить, используя исходную норму и быструю сходимость. Тогда по заданному $\delta > 0$ эти оценки укажут n . Начальный отрезок, включающий n членов этих рядов, оценивается при помощи указанных выше представлений разностей $T^p - S_r^p$ через z_k и $w_{p,k}$ и предполагаемых свойств топологии τ .

В этой теореме T и Σ оставались фиксированными, однако и их можно сделать переменными. Вариация множества Σ весьма усложняет формулировку, поскольку это множество связывает между собой φ и ψ . Варьировать T проще. В частности, можно считать, что T (как и x) принадлежит фиксированному шару, если τ совместима с нормой, в которой умножение непрерывно по совокупности сомножителей.

С другой стороны, если считать условие с членами ряда Кемпбелла–Хаусдорфа выполненным при всех k , то доказанная теорема даст некоторое обобщение одной из «абсолютных» теорем работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Функциональный анализ. Мир, М., 1975.
2. Moore R. Proc. Amer. Math. Soc., **50**, 138–155 (1975).
3. Горин Е. А., Караханян М. И. Матем. заметки, **19**, №2, 179–188 (1977).
4. Горин Е. А. Алгебра и анализ, **5**, вып. 4, 83–97 (1993).
5. Караханян М. И. Изв. АН Арм. ССР, матем., **19**, №5, 405–421 (1978).
6. Караханян М. И. Изв. НАН Арм., матем., **29**, №1, 50–58 (1994).

Ереванский государственный университет
e-mail: karakhan@ysu.am

Поступило в редакцию
12 апреля 2005 г.

УДК 517.9

О некоторых функциональных уравнениях и представлениях топологических полугрупп

© 2005. Е. В. ШУЛЬМАН

В данной работе некоторые результаты общего характера о представлениях топологических полугрупп применяются к исследованию следующего вопроса. Пусть заданы коммутативная топологическая полугруппа G и натуральное число $n > 1$. Требуется описать все непрерывные функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, такие, что функция $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 + \dots + x_n)$ полиномиально выражается через функции от сумм меньшего числа переменных. Говоря точнее, речь идет о следующем соотношении:

$$f(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{\gamma} \prod_{\Delta_i \in \gamma} a_{\Delta_i}^{\gamma} \left(\sum_{k \in \Delta_i} x_k \right) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x) \beta_l(y) \eta_l(z). \quad (1)$$

Здесь $\alpha_l, \beta_l, \eta_l$ ($1 \leq l \leq m$) — непрерывные функции на G , γ пробегает все возможные разбиения множества $\{1, \dots, n\} = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r$, $r > 1$, $\Delta_i \neq \emptyset$, а $a_{\Delta_i}^{\gamma}$ — непрерывные функции на G , «нумерованные» элементами Δ_i разбиения γ (в каждом одночлене из правой части уравнения (1) участвуют лишь попарно не пересекающиеся наборы переменных). Таким образом, речь идет о функциях f , допускающих теорему сложения специального вида.

Частные случаи этой задачи изучались во многих работах (см., например, [5, 4] и цитированную там литературу). Наиболее важным из этих частных случаев являются уравнения Леви–Чивиты [1]

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(y)$$

В [1] было доказано, что при $G = \mathbb{R}$ решения этих уравнений — квазимногочлены. В общем случае эти решения можно описать как матричные элементы конечномерных представлений полугруппы G (см. [2, 3]), причем представления можно выбрать с сохранением таких свойств решений, как ограниченность или непрерывность. Мы распространим эти результаты на уравнение (1).