Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Шульман, О некоторых функциональных уравнениях и представлениях топологических полугрупп, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 83–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa89>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:45:24

С другой стороны, если считать условие с членами ряда Кемпбелла–Хаусдорфа выполненным при всех k , то доказанная теорема даст некоторое обобщение одной из «абсолютных» теорем работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Функциональный анализ. Мир, М., 1975. 2. Moore R. Proc. Amer. Math. Soc., **50**, 138–155 (1975). 3. Горин Е. А., Караханян М. И. Матем. заметки, **19**, №2, 179–188 (1977). 4. Горин Е. А. Алгебра и анализ, **5**, вып. 4, 83–97 (1993). 5. Караханян М. И. Изв. АН Арм. ССР, матем., **19**, №5, 405–421 (1978). 6. Караханян М. И. Изв. НАН Арм., матем., **29**, №1, 50–58 (1994).

Ереванский государственный университет
e-mail: karakhan@ysu.am

Поступило в редакцию
12 апреля 2005 г.

УДК 517.9

О некоторых функциональных уравнениях и представлениях топологических полугрупп

© 2005. Е. В. ШУЛЬМАН

В данной работе некоторые результаты общего характера о представлениях топологических полугрупп применяются к исследованию следующего вопроса. Пусть заданы коммутативная топологическая полугруппа G и натуральное число $n > 1$. Требуется описать все непрерывные функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, такие, что функция $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 + \dots + x_n)$ полиномиально выражается через функции от сумм меньшего числа переменных. Говоря точнее, речь идет о следующем соотношении:

$$f(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{\gamma} \prod_{\Delta_i \in \gamma} a_{\Delta_i}^{\gamma} \left(\sum_{k \in \Delta_i} x_k \right) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x) \beta_l(y) \eta_l(z). \quad (1)$$

Здесь $\alpha_l, \beta_l, \eta_l$ ($1 \leq l \leq m$) — непрерывные функции на G , γ пробегает всевозможные разбиения множества $\{1, \dots, n\} = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r$, $r > 1$, $\Delta_i \neq \emptyset$, а $a_{\Delta_i}^{\gamma}$ — непрерывные функции на G , «нумерованные» элементами Δ_i разбиения γ (в каждом одночлене из правой части уравнения (1) участвуют лишь попарно не пересекающиеся наборы переменных). Таким образом, речь идет о функциях f , допускающих теорему сложения специального вида.

Частные случаи этой задачи изучались во многих работах (см., например, [5, 4] и цитированную там литературу). Наиболее важным из этих частных случаев являются уравнения Леви–Чивиты [1]

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(y)$$

В [1] было доказано, что при $G = \mathbb{R}$ решения этих уравнений — квазимногочлены. В общем случае эти решения можно описать как матричные элементы конечномерных представлений полугруппы G (см. [2, 3]), причем представления можно выбрать с сохранением таких свойств решений, как ограниченность или непрерывность. Мы распространим эти результаты на уравнение (1).

Начнем с рассмотрения более общей ситуации. Пусть G — топологическая полугруппа. Подмножество $E \subset G$ называется *обратно стабильным* (IS-подмножеством), если оно содержит всякий элемент $g \in G$, такой, что $gE \cap E \neq \emptyset$.

Легко проверить, что пересечение двух IS-подмножеств также является IS-подмножеством; поэтому для любого множества $E \subset G$ существует наименьшая замкнутая обратно стабильная подполугруппа $G_{IS}(E)$, содержащая E . Если $G_{IS}(E) = G$, то мы говорим, что E *топологически слабо порождает* G . Если к тому же E конечно, то будем говорить, что G *топологически слабо конечно порождена*. Нетрудно видеть, что полугруппы $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}_+^n$ являются топологически слабо конечно порожденными. Следует отметить, что если G — группа, то слово «слабо» здесь излишне: G является топологически слабо конечно порожденной тогда и только тогда, когда она содержит плотную конечно порожденную подгруппу.

Допустим, что задано представление T полугруппы G в линейном пространстве X . Вектор $x \in X$ назовем *конечным*, если его орбита $T(G)x$ содержится в конечномерном подпространстве.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — топологически слабо конечно порожденная полугруппа и $T: G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ — ее непрерывное представление на топологическом векторном пространстве X . Пусть x — произвольный вектор из X и $\alpha(g)$ — непрерывная функция на G , не принимающая нулевых значений. Если для каждого элемента $g \in G$ вектор $T_g x - \alpha(g)x$ конечен, то и x конечен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть непрерывное представление $T: G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ топологически слабо конечно порожденной полугруппы G таково, что для каждого характера λ этой полугруппы соответствующее собственное подпространство $\{x \in X: T_g x = \lambda(g)x\}$ конечномерно. Тогда для любого конечномерного подпространства $L \subset X$ и любой не принимающей нулевых значений функции $\alpha(g)$ на G подпространство $\mathcal{R}(\alpha, L) = \{x \in X: T_g x - \alpha(g)x \in L \text{ для любого } g \in G\}$ конечномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теоремах 1 и 2 условие $\alpha(g) \neq 0$ можно опустить, если ни один нетривиальный характер полугруппы G не принимает нулевых значений (как, например, в случае, когда G — группа).

Следующий пример показывает, что условие слабой конечной порожденности в теореме 1 нельзя опустить, даже если ограничиться классом коммутативных групп.

Пусть G — прямая сумма счетного числа экземпляров прямой $\mathbb{R}$, т. е. группа всех последовательностей вещественных чисел с конечным числом ненулевых элементов, наделенная топологией индуктивного предела (или же топологией поточечной сходимости). Пусть T — представление группы G на пространстве всех последовательностей (с топологией поточечной сходимости), определенное формулой

$$T_{(a_1, a_2, \dots)}(x_1, x_2, \dots) = (\exp(a_1)x_1, \exp(a_2)x_2, \dots).$$

Тогда легко видеть, что вектор $x = (1, 1, \dots)$ не является конечным, хотя все векторы $T_a x - x$ конечны.

Приведем также пример, показывающий, что и в теореме 2 условие слабой конечной порожденности существенно. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, L — его конечномерное подпространство и G — группа всех

непрерывных операторов вида $1 + S$, где $SX \subset L$, $SL = 0$. Тогда для тождественного представления и функции α , тождественно равной 1, подпространство $\mathcal{R}(\alpha, L)$ совпадает с X . Нетрудно видеть, что α — единственный характер группы G и что соответствующее собственное подпространство совпадает с L .

Тем не менее некоторые полезные (при работе с функциональными уравнениями) модификации теоремы 1 справедливы и для полугрупп, не являющихся топологически слабо конечно порожденными. Отметим один простой результат, не использующий каких бы то ни было топологических условий.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $T: G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ — представление полугруппы G в линейном пространстве X , такое, что для некоторого $h \in G$ число 1 не является собственным числом оператора T_h . Если вектор $T_h x - x$ конечен, то и x конечен.

Заметим, что при решении функциональных уравнений в классе непрерывных функций этот результат неприменим, поскольку неподвижные точки там всегда есть. Однако при нахождении суммируемых или убывающих на бесконечности решений он оказывается полезным.

Будем обозначать через $\mathcal{M}(G)$ множество всех матричных элементов всех непрерывных конечномерных представлений полугруппы G . Нетрудно видеть, что каждая функция из $\mathcal{M}(G)$ удовлетворяет уравнению (1) при некотором n (при этом все a_i и b_i можно взять равными нулю). Применяя теорему 1 к регулярному представлению полугруппы G в $C(G)$, можно показать, что этот класс исчерпывает все непрерывные решения уравнения (1):

ТЕОРЕМА 5. Пусть G — коммутативная унитарная топологически слабо конечно порожденная полугруппа, и пусть непрерывная функция $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда $f \in \mathcal{M}(G)$.

При малых n к уравнению (1) сводятся некоторые уравнения более общего вида. Мы приведем лишь один из результатов такого рода:

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G — коммутативная унитарная топологически слабо конечно порожденная полугруппа. Если непрерывная комплекснозначная функция f на G удовлетворяет уравнению

$$f(x + y + z) = a_1(x)b_1(y, z) + a_2(y)b_2(x, z) + a_3(z)b_3(x, y) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(x)\beta_k(y)\gamma_k(z),$$

то $f \in \mathcal{M}(G)$.

Автор выражает искреннюю признательность рецензенту за полезные замечания и, в частности, за предложение записывать уравнение (1) в настоящей, более общей по сравнению с первоначальной, форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Levi-Civita T.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (5), **22**, 181–183 (1913).
2. *Shulman E.* J. London Math. Soc., II Ser., **54**, No. 1, 111–120 (1996).
3. *Szekelelehi L.* On the Levi-Chivita functional equation, Ber. Math.-Stat. Sect. Forschungsges. Joanneum Graz 301, 1988.
4. *Trif T.* J. Math. Anal. Appl., **272**, 604–616 (2002).
5. *Chang Ick-Soon, Lee Eun Hwi, Kim Hark-Mahn.* Math. Inequal. Appl., **6**, No. 1, 87–95 (2003).