Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Нижник, Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 74–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:36:35

Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева

© 2006. Л. П. Нижник

Обычно самосопряженные операторы Шрёдингера изучаются в пространствах $L_2(\mathbb{R}^d)$. Однако ряд специальных вопросов требует рассмотрения операторов Шрёдингера в пространствах Соболева $W_2^m(\mathbb{R}^d)$. Идея изучения операторов в пространствах, отличных от $L_2(\mathbb{R}^d)$, не нова. Различные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и математической физики способствовали созданию и изучению операторов как в абстрактных шкалах гильбертовых пространств, так и в шкалах пространств Соболева [1–5]. Однако спектральная теория дифференциальных операторов в пространствах Соболева практически не разработана, несмотря на ее содержательность и возможные приложения [6].

1. Задача Штурма–Лиувилля с производными высоких порядков в граничных условиях приводит к самосопряженным операторам в пространствах Соболева. Так, задача $-y'' = \lambda y$ на интервале $0 < x < \pi$ с граничными условиями $y''(0) - y(0) = 0$, $y''(\pi) - y(\pi) = 0$ является самосопряженной в пространстве Соболева $W_2^1(0, \pi)$ с собственными функциями $u_n = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$, и $u^\pm = \exp(\pm x)$. Эти функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $W_2^1(0, \pi)$. Если рассматривать граничные условия в виде $y''(0) + y(0) = 0$, $y''(\pi) + y(\pi) = 0$, то задача на собственные значения будет уже самосопряженной относительно индефинитного скалярного произведения в $W_2^1(0, \pi)$, задаваемого равенством $[u, v] = (u', v')_{L_2} - (u, v)_{L_2}$.

2. Свободный оператор Шрёдингера, $-\Delta$, является самосопряженным как в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, так и в пространствах Соболева $W_2^m(\mathbb{R}^d)$. Одним из способов задания операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями в точке x_0 является рассмотрение самосопряженных расширений минимального симметрического оператора, определенного на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\})$ выражением $L_{\min} \varphi = -\Delta \varphi$ [7–9]. Так определенный оператор $L_{\min}$ является также симметрическим оператором в пространстве Соболева $W_2^m(\mathbb{R}^d)$ с равными индексами дефекта. Для целых $m \geq 0$ индексы дефекта $i(m, d)$ равны количеству всех целочисленных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, удовлетворяющих условию $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d < 2 + m - \frac{1}{2}d$ [10]. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ (т.е. при $m = 0$) это приводит к хорошо известному факту, что индексы дефекта $i(0, d)$ отличны от нуля лишь в размерностях $d = 1, 2, 3$ и равны соответственно 2, 1, 1.

Для важных размерностей $d = 1, 2, 3$ индексы дефекта определяются формулами $i(m, 1) = m + 2$, $i(m, 2) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$, $i(m, 3) = \frac{1}{6}(m + 1)(m + 2)(m + 3)$.

Несмотря на то что оператор $L_{\min}$ в пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^d)$ не плотно задан (он плотно определен лишь при $m = 0$ или при $d \geq 2 + 2m$), можно конструктивно описать все его самосопряженные расширения. Это приводит к большому разнообразию самосопряженных операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева $W_2^m(\mathbb{R}^d)$, в частности, описывающих суперсингулярные сферически несимметрические точечные взаимодействия [10].

3. Для изучения одномерных операторов Шрёдингера в пространствах Соболева нам понадобятся следующие вспомогательные факты. Будем обозначать через $u_r = \frac{1}{2}[u(+0) + u(-0)]$ и $u_s = u(+0) - u(-0)$ среднее значение и скачок функции u в точке $x = 0$ соответственно. Для функций $u \in W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ введем обозначение для квазипроизводных при $x \neq 0$: $u^{[2k]} = (-D^2 + 1)^k u$, $u^{[2k+1]} = Du^{[2k]}$, где $D = d/dx$, а через $\Gamma_1 u$ и $\Gamma_2 u$ обозначим векторы граничных данных до порядка $2m + 1$:

$$\Gamma_1 u = (u_r, \dots, (-1)^k u_r^{[k]}, \dots, -u_r^{[2m+1]}), \quad \Gamma_2 u = (u_s^{[2m+1]}, \dots, u_s^{[k]}, \dots, u_s).$$

Тогда для функций $u, v \in W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ справедлива формула Грина

$$(u^{[2m+2]}, v)_{L_2} - (u, v^{[2m+2]})_{L_2} = \Gamma_2 u \cdot \Gamma_1 v - \Gamma_1 u \cdot \Gamma_2 v, \quad (1)$$

где точка обозначает скалярное произведение в евклидовом пространстве E^{2m+2} .

Формула Грина (1) показывает, что $(E^{2m+2}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является граничной тройкой, или пространством граничных значений (ПГЗ) [11–13], для минимального оператора $(-D^2 + 1)^{m+1}|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Наряду с самосопряженным в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ оператором $L = -D^2 + 1$ с областью определения $\mathcal{D}(L) = W_2^{m+2}(\mathbb{R}^1)$ рассмотрим также в $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ оператор $L^{(m)}$ с областью определения $\mathcal{D}(L^{(m)}) = W_2^m(\mathbb{R}^1) \cap W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ и законом действия $L^{(m)}u = (-D^2 + 1)^{-m}u^{[2m+2]}$. Ясно, что $L^{(m)}$ совпадает с L на $W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1)$. Оператор $L^{(m)}$ для неплотно заданного оператора $L_{\min}$ заменяет отсутствующий оператор $L_{\min}^*$, играющий ключевую роль в теории самосопряженных расширений.

Будем здесь и в дальнейшем определять скалярное произведение в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ так, что $(u, v)_{W_2^m} = ((-D^2 + 1)^m u, v)$ для $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. Для функций из пространства $W_2^m(\mathbb{R}^1) \cap W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ формула Грина (1) принимает вид

$$(L^{(m)}u, v)_{W_2^m} - (u, L^{(m)}v)_{W_2^m} = \Gamma_2^{(m)}u \cdot \Gamma_1^{(m)}v - \Gamma_1^{(m)}u \cdot \Gamma_2^{(m)}v, \quad (2)$$

где векторы граничных данных $\Gamma_1^{(m)}u$, $\Gamma_2^{(m)}u$ определяются равенствами

$$\Gamma_2^{(m)}u = (u_s^{[2m+1]}, \dots, u_s^{[m]}), \quad \Gamma_1^{(m)}u = (u_r, \dots, (-1)^k u_r^{[k]}, \dots, (-1)^{(m+1)} u_r^{[m+1]}).$$

Если B — самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E^{m+2} , то граничные условия

$$\Gamma_2^{(m)}u = B\Gamma_1^{(m)}u \quad (3)$$

являются самосопряженными в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$. Сужение оператора $L^{(m)}$ на все функции, удовлетворяющие граничному условию (3), будем обозначать через L_B и называть оператором Шрёдингера с точечным взаимодействием в точке $x_0 = 0$, описываемым граничными условиями (3). Граничные условия (3) будем называть полными, если не существует нетривиальной функции из дефектного подпространства N оператора $L_{\min}$ в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющей этому граничному условию.

ТЕОРЕМА 1. Пусть самосопряженный оператор B в пространстве E^{m+2} задает полные граничные условия (3). Тогда оператор L_B является существенно самосопряженным ограничено обратимым оператором в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Граничные условия (3) описывают лишь обратимые самосопряженные в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ расширения оператора $L_{\min}$. Для описания всех самосопряженных расширений можно, например, условия (3) заменить на $(I - U)\Gamma_2^{(m)}u = i(I + U)\Gamma_1^{(m)}u$, где U — унитарный оператор в пространстве E^{m+2} . Отметим новизну конструкции квази-ПГЗ в формуле (2) для неплотно заданного в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ оператора $L_{\min}$ через обычное ПГЗ для степеней $(L_{\min}^*)^m$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

4. Для описания самосопряженных расширений в пространстве Соболева $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ минимального симметрического оператора $L_{\min}$ можно также воспользоваться абстрактной теорией самосопряженных расширений неплотно заданных операторов [11–17]. Не привлекая понятия отношения, естественного для теории расширений неплотно заданного симметрического оператора [16, 17], воспользуемся классической теорией Бирмана–Крейна–Вишика, справедливой и в этом случае. Действительно, пусть A — строго положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H , а $N \subset H$ — замкнутое подпространство, которое можно рассматривать как дефектное подпространство симметрического оператора $A_N = A|_{\mathcal{D}(A_N)}$, где $\mathcal{D}(A_N) = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(A), (A\varphi, \eta) = 0 \text{ для любого } \eta \in N\}$. Самосопряженные ограничено обратимые расширения $A_{N,B}$ оператора A_N можно параметризовать ограниченными самосопряженными операторами B в подпространстве N . Справедливы формулы $\mathcal{D}(A_{N,B}) = \{\psi : \psi = \varphi + BP_N A\varphi \text{ для любого } \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$, где P_N — ортопроектор в H на N , т. е. $A_{N,B}\psi = A_{N,B}(\varphi + BP_N A\varphi) = A\varphi$, $A_{N,B}^{-1} = A^{-1} + BP_N$. Единственное дополнительное условие на оператор B — тривиальная разрешимость уравнения $\varphi + BP_N A\varphi = 0$ на множестве $N \cap \mathcal{D}(A)$. Это обеспечивает корректность приведенной выше конструкции. В случае, когда $N \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$, и только в этом случае оператор A_N плотно определен в пространстве H , а дополнительное условие на оператор B выполняется автоматически.

Пусть теперь $N \cap \mathcal{D}(A) \neq \{0\}$, но $N \cap \mathcal{D}(A^m) = \{0\}$ при некотором $m > 1$. Тогда на прямой сумме $\mathcal{L}_m = \mathcal{D}(A^m) \dot{+} N$ определены косые проекторы $R^{(m)}$ на $\mathcal{D}(A^m)$ и $S^{(m)}$ на N ($R^{(m)} + S^{(m)} = I$) и оператор $A_N^{(m)} = AR^{(m)}$. Ясно, что $\text{Ker}(A_N^{(m)}) = N$, а операторы $A_N^{(m)}$ и A совпадают на $\mathcal{D}(A^m)$. Справедлив абстрактный аналог формулы Грина (2):

$$(A_N^{(m)}u, v)_H - (u, A_N^{(m)}v)_H = (\Gamma_2^{(m)}u, \Gamma_1^{(m)}v)_N - (\Gamma_1^{(m)}u, \Gamma_2^{(m)}v)_N, \quad u, v \in \mathcal{L}_m, \quad (4)$$

где $\Gamma_2^{(m)} = S^{(m)}$, а $\Gamma_1^{(m)} = -P_N AR^{(m)}$, задающий квази-ПГЗ для неплотно заданного симметрического оператора A_N .

Определим теперь симметрический оператор $A_{N,B}^{(m)}$ как сужение оператора $A_N^{(m)}$ на все элементы u , удовлетворяющие граничному условию $\Gamma_2^{(m)}u + B\Gamma_1^{(m)}u = 0$ с заданным ограниченным самосопряженным оператором B в подпространстве N .

ТЕОРЕМА 2. Пусть ограниченный самосопряженный оператор B удовлетворяет упомянутому выше дополнительному условию. Тогда оператор $A_{N,B}^{(m)}$ является существенно самосопряженным в пространстве H , а его замыкание совпадает с оператором $A_{N,B}$.

Для эффективного описания дефектного подпространства N и самосопряженных расширений оператора $L_{\min}$ в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ используются фундаментальные решения $E_{2m}(x)$ уравнения $(-D^2 + 1)^m E_{2m}(x) = \delta$ и их производные $E_{2m-1}(x) = E'_{2m}(x)$. Явный вид фундаментальных решений легко получить, используя преобразование Фурье:

$$E_{2m}(x) = \frac{1}{(m-1)! 2^m} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-2-k}^k (2m-3-2k)!! |x|^k \exp(-|x|),$$

$$E_{2m+1}(x) = -\frac{x}{2m} E_{2m}(x), \quad m \geq 1.$$

Приведем явный вид первых четырех функций E_k :

$$E_1(x) = -\frac{\operatorname{sign} x}{2} \exp(-|x|), \quad E_2(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|),$$

$$E_3(x) = -\frac{x}{4} \exp(-|x|), \quad E_4(x) = \frac{1}{4} (1 + |x|) \exp(-|x|).$$

ЛЕММА 1. Совокупность фундаментальных решений E_j , $j = m+1, \dots, 2m+2$, образует базис в дефектном подпространстве N оператора $L_{\min}$ в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$.

Это явное описание дефектного подпространства N оператора $L_{\min}$ и простой закон действия $LE_j = E_{j-2}$ оператора L на указанном базисе позволяют явно связать конструкции операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями на основе граничных условий (3) и на основе самосопряженных расширений оператора $L_{\min}$. В частности, например, для пространства $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ дополнительное условие на оператор B имеет вид неравенства $BE_2 + E_4 \neq 0$.

5. Приведем еще способ задания операторов Шрёдингера с точечным взаимодействием в точке $x = 0$ в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ с помощью сингулярных возмущений. Для этого рассмотрим формулу Грина (2) для $v \in W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1)$: $(u, Lv)_{W_2^m} = (L^{(m)}u, v)_{W_2^m} - \Gamma_2^{(m)}u \cdot \Gamma_1^{(m)}v$. Она естественно определяет оператор L^+ на $\mathcal{D}(L^{(m)})$, действующий по правилу

$$L^+u = L^{(m)}u - \sum_{k=0}^{m+1} u_s^{[2m+1-k]} \delta^{[k]}, \quad (5)$$

где $\delta^{[k]}$ — квазипроизводные от δ -функции Дирака, определенные равенством $(\delta^{[k]}, v) = (-1)^k v_r^{[k]}$.

Формула (5) является аналогом известного правила, связывающего обобщенное дифференцирование разрывных функций с их поточечным дифференцированием. В силу этого оператор $L^{(m)}$ в работе [10] назван поточечным применением в W_2^m оператора $L = -D^2 + 1$.

С помощью представления (5) и граничных условий (3) доказывается

ТЕОРЕМА 3. Оператор L_B из теоремы 1 можно представить в виде

$$L_B u = L^+ u + \sum_{i,j=0}^{m+1} b_{ij} \delta^{[i]}(u, \delta^{[j]}), \quad (6)$$

где область определения оператора L_B состоит из всех функций $u \in W_2^m(\mathbb{R}^1) \cap W_2^{2m+2}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$, для которых правая часть в (6) принадлежит $W_2^m(\mathbb{R}^1)$, а на таких функциях $L_B u = L^{(m)} u = (-D^2 + 1)^{-m} u^{[2m+2]}$.

6. Рассмотрим одномерный оператор Шрёдингера $H_n = -d^2/dx^2 + \alpha \delta^{(n)}(x)$, потенциалом в котором является n -я производная от δ -функции Дирака. Для определения действия оператора H_n на разрывные функции $\psi(x) \in W_2^{2+n}(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ необходимо определить $-d^2\psi(x)/dx^2$ и произведение $\delta^{(n)}(x) \cdot \psi(x)$. В случае пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$ эти выражения можно понимать в смысле теории обобщенных функций:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\psi''(x) - \psi_s \delta' - \psi'_s \delta, \quad \delta^{(n)} \cdot \psi(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \psi_r^{(n-k)} (-1)^{n-k} \delta^{(k)}(x).$$

В последнем выражении выбрано одно из «естественных» продолжений функционала $\delta^{(n)}$ на разрывные пробные функции φ с помощью равенства $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \varphi_r^{(n)}$ [9]. С учетом этого обстоятельства условие $H_n \psi \in L_2(\mathbb{R}^1)$ приводит к известным [18] граничным условиям

$$\psi'_s = (-1)^n \alpha \psi_r^{(n)}, \quad \psi_s = (-1)^{(n-1)} \alpha n \psi_r^{(n-1)}. \quad (7)$$

Кроме того, при $n \geq 2$ выполняются условия $\psi_r^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, n-2$. Для $n = 0, 1$ граничные условия (7) при вещественных α определяют самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^1)$ оператор Шрёдингера с $\alpha\delta$ - и $\alpha\delta'$ -потенциалами. Граничные условия $\psi'_s = -\alpha\psi'_r$, $\psi_s = \alpha\psi_r$ для $\alpha\delta'$ -потенциала отличаются от граничных условий $\psi'_s = 0$, $\psi_s = \alpha\psi'_r$, определяющих оператор Шрёдингера с δ' -взаимодействием интенсивности α [8, 9, 19]. При $n \geq 2$ граничные условия (7) не определяют самосопряженных операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$. Однако выражению H_n при $n \geq 2$ можно придать смысл самосопряженного оператора в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ при $m \geq n-1$, если положить

$$(H_n + 1)\psi = L^+ \psi + \sum_{k=0}^n C_n^k \psi_r^{(n-k)} (-1)^{(n-k)} \delta^{(k)} \quad (8)$$

и найти область определения оператора H_n из условия принадлежности функции ψ и правой части равенства (8) пространству $W_2^m(\mathbb{R}^1)$. Это дает граничные условия для оператора H_n в пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ вида (3) со специальной матрицей B . В частности, оператор $H_2 = -d^2/dx^2 + \alpha\delta''$ является самосопряженным в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, а функции из области его определения удовлетворяют граничным условиям $\psi'_s + \alpha\psi_r = \psi''_s - 2\alpha\psi'_r = \psi'''_s + 2\alpha\psi_r = 0$. Возможны и другие интерпретации оператора H_n в пространствах, более широких, чем $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выше в пространствах Соболева рассмотрен оператор Шрёдингера с одноточечным взаимодействием. Переход к многоточечным взаимодействиям аналогичен соответствующему переходу в случае пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$. При этом возникает нетривиальная задача об определении количества

отрицательных собственных значений для оператора Шрёдингера с многоточечными взаимодействиями. В этом направлении ряд точных результатов получен в [20, 21].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Простейшей физической задачей, приводящей к оператору Шрёдингера с точечным взаимодействием в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, является задача о собственных поперечных колебаниях струны, расположенной на оси OX , с точечной массой в начале координат, на которую действует внешняя сила, пропорциональная отклонению массы от положения равновесия [10]. Если внешняя сила отсутствует, то задача сводится к самосопряженному в $L_2(\mathbb{R}^1)$ оператору Шрёдингера с δ' -взаимодействием [10, 19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berezansky Yu.* Expansion in Eigenfunction of Self-Adjoint Operators. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
2. *Березанский Ю. М.* В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Институт математики АН УССР, Киев, 1980.
3. *Berezansky Yu., Brasche, J.* Methods Funct. Anal. Topology, **8**, No. 4, 1–14 (2002).
4. *Kurasov P.* Integral Equ. Oper. Theory, **45**, No. 4, 437–460 (2003).
5. *Nizhnik L. P.* Methods Funct. Anal. Topology, **7**, No. 1, 76–81 (2001).
6. *Шкаликов А. А.* Труды семин. Петровского, **9**, 190–229 (1983).
7. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Докл. АН СССР, **137**, 1011–1014 (1961).
8. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
9. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular Perturbations of Differential Operators and Solvable Schrödinger Type Operators. Cambridge University Press, 2000.
10. *Albeverio S., Nizhnik L.* Lett. Math. Phys., **70**, 185–194 (2004).
11. *Derkach, V. A., Malamud, M. M.* J. Funct. Anal., **95**, 1–95 (1991).
12. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, 1991.
13. *Kuzhel S., Kuzhel A.* Regular Extensions of Hermitian Operators. VSP, Utrecht, 1998.
14. *Красносельский М. А.* Укр. матем. ж., **1**, 21–38 (1949).
15. *Крейн М.* Матем. сб., **20**, **21**, 431–495, 365–404 (1947).
16. *Кочубей А. Н.* Сиб. матем. ж., **18**, №2, 314–320 (1977).
17. *Маламуд М.* Укр. матем. ж., **44**, 1658–1688 (1992).
18. *Griffiths D. J.* J. Phys. A: Math. Gen., **26**, 2265–2267 (1993).
19. *Nizhnik L. P.* J. Funct. Anal. Appl., **37**, No. 1, 85–88 (2003).
20. *Albeverio S., Nizhnik L.* Methods Funct. Anal. Topology, **9**, 273–286 (2003).
21. *Albeverio S., Nizhnik L.* Lett. Math. Phys., **65**, 27–35 (2003).