Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Янь Цян, Точное значение коэффициентов нормальной структуры и WCS-коэффициентов в классе функциональных пространств Орлича, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 4, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:39:01

для бесконечно многих n (и некоторой системы образующих S , причем константы A и B зависят от S).

ТЕОРЕМА 1а. *Существует $\alpha < 1$, такое, что для любой функции ρ удовлетворяющей условию $\rho(n) = o(\exp(\epsilon n))$ (при $n \rightarrow \infty$) для любого $\epsilon > 0$, существует группа $H = H_1 \times H_2$, такая, что $H_1, H_2 \in I_s(\exp(n^\alpha))$ и*

$$v_{H, S_H}(n) \geq \rho(n)$$

для всех $n > 0$.

Автор выражает благодарность Р. И. Григорчуку за внимательное прочтение предварительной версии этой заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erschler A. Boundary behavior for groups of subexponential growth. Ann. Math., **160**, No. 3, 1183–1210 (2004).
2. Григорчук Р. И. Функциональный анализ и его прил., **14**, 41–43 (1980).
3. Григорчук Р. И. Изв. АН СССР, **25**, №2, 259–300 (1985).
4. Григорчук Р. И. Матем. сб., **54**, 185–205 (1986).
5. Григорчук Р. И. Группы промежуточного роста и их приложения. Докт. дисс., 1985.
6. Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 58, ВИНТИ, М., 1990, с. 191–256.
7. Gromov M. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **53**, 53–73 (1981).
8. de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory, The University of Chicago Press, 2000.
9. Milnor J. J. Differential Geometry, **2**, 447–449 (1968).
10. Shneyerson L. Сообщение на конференции “International Conference on Group Theory: Combinatorial, Geometric, and Dynamical Aspects of Infinite Groups”, Гаета, 1–6 июня 2003.
11. Tits J. J. Algebra, **20**, 250–270 (1979).
12. Wolf J. A. J. Differential Geometry, **2**, 421–446 (1968).

CNRS, Université Lille 1, UFR de Mathématiques
email: erschler@pdm1.ras.ru, Anna.Erschler@math.univ-lille1.fr

Поступило в редакцию
7 февраля 2004 г.

УДК 517.982

Точное значение коэффициентов нормальной структуры и WCS-коэффициентов в классе функциональных пространств Орлича

© 2005. Янь Цян

Коэффициент нормальной структуры $N(X)$ банахова пространства X определяется формулой [1]

$$N(X) = \inf \left\{ \frac{d(B)}{r(B)} : B \subset X \text{ ограничено, замкнуто и выпукло, } d(B) > 0 \right\},$$

где $d(B) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in B\}$ — диаметр, а $r(B)$ — относительный чебышёвский радиус множества B , т. е. $r(B) = \inf\{\sup\{\|x - y\| : x \in B\} : y \in B\}$.

Для банахова пространства X , не обладающего свойством Шура, коэффициент слабо сходящихся последовательностей (WCS-коэффициент) определяется

формулой [2]

$$WCS(X) = \inf \left\{ \frac{A(\{x_i\})}{r(\{x_i\})} : \text{последовательность } \{x_i, i \geq 1\} \subset X \right. \\ \left. \text{сходится слабо, но не сильно} \right\},$$

где $A(\{x_i\})$ и $r(\{x_i\})$ — асимптотический диаметр и относительный чебышёвский радиус замкнутой оболочки $\overline{\text{co}}(\{x_i\})$ последовательности $\{x_i\}$. Для случая рефлексивного пространства X , не обладающего свойством Шура, в [2] доказаны неравенства $1 \leq N(X) \leq WCS(X) \leq 2$. Вычисление величин $N(X)$ и $WCS(X)$ привлекало многих ученых, поскольку оно имеет отношение к принципу неподвижной точки и некоторым другим геометрическим свойствам. Пусть

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t) dt, \quad \Psi(v) = \int_0^{|v|} \psi(s) ds$$

— пара дополнительных N -функций, т. е. функция $\varphi(t)$ непрерывна справа, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$ при $t \nearrow \infty$, а ψ — правая обратная для φ . Функциональное пространство Орлича $L^\Phi[0, 1]$ определяется следующим образом:

$$L^\Phi[0, 1] = \left\{ x(t) : \rho_\Phi(\lambda x) = \int_0^1 \Phi(\lambda |x(t)|) dt < \infty \text{ для некоторого } \lambda > 0 \right\}.$$

Нормы Люксембурга и Орлича задаются формулами

$$\|x\|_{(\Phi)} = \inf \left\{ c > 0 : \rho_\Phi\left(\frac{x}{c}\right) \leq 1 \right\}, \quad \|x\|_\Phi = \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + \rho_\Phi(kx)]$$

соответственно. Основные результаты о величинах $N(X)$ и $WCS(X)$ для пространств Орлича были уточнены в [4], где были получены некоторые важные неравенства для оценок этих величин. Автор [6] улучшил более ранние результаты и получил некоторые точные значения этих величин для пространств Орлича последовательностей. В настоящей работе даются точные формулы для $WCS(X)$ и $N(X)$ в классе функциональных пространств Орлича, оснащенных каждой из двух упомянутых норм.

Рао и Рен [4] доказали, что пространства $L^{(\Phi)}[0, 1]$ и $L^\Phi[0, 1]$ нерефлексивны тогда и только тогда, когда $WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 1$, и что если $L^{(\Phi)}[0, 1]$ и $L^\Phi[0, 1]$ рефлексивны, то

$$1 < N(L^{(\Phi)}[0, 1]) \leq WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) \leq \min(2\alpha_\Phi, 1/\beta_\Phi) \leq \sqrt{2}, \\ 1 < N(L^\Phi[0, 1]) \leq WCS(L^\Phi[0, 1]) \leq \min(2\alpha_\Psi, 1/\beta_\Psi) \leq \sqrt{2},$$

где

$$\alpha_\Phi = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(2u)}, \quad \beta_\Phi = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(2u)},$$

причем индексы α_Ψ и β_Ψ для Ψ определены. Автор [5] установил некоторые неравенства между индексами, из которых следовало, что верхние грани в двух неравенствах, написанных выше, в точности совпадают. Определим индексную функцию $F_\Phi(t) = t\varphi(t)/\Phi(t)$ и предположим, что она монотонна (возрастает

или убывает) в окрестности бесконечности. Тогда должен существовать предел $C_\Phi = \lim_{t \rightarrow +\infty} t\varphi(t)/\Phi(t)$, и поэтому $\alpha_\Phi = \beta_\Phi = 2^{-1/C_\Phi}$.

Пусть Φ есть N -функция, $\Phi_0(u) = u^2$, а Φ_s — обратная функция для

$$\Phi_s^{-1}(u) = [\Phi^{-1}(u)]^{1-s}[\Phi_0^{-1}(u)]^s, \quad 0 < s \leq 1, \quad u \geq 0.$$

Тогда [4]

$$2^{s/2} \leq N(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) \leq WCS(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) \leq \min(2\alpha_{\Phi_s}, 1/\beta_{\Phi_s}), \quad (1)$$

$$2^{s/2} \leq N(L^{\Phi_s}[0, 1]) \leq WCS(L^{\Phi_s}[0, 1]) \leq \min(2\alpha_{\Phi_s}, 1/\beta_{\Phi_s}). \quad (2)$$

Для любой N -функции Φ , удовлетворяющей условию $C_\Phi \neq 2$, мы предъявим такую функцию M , что

$$\Phi^{-1}(u) = [M^{-1}(u)]^{1-s}[\Phi_0^{-1}(u)]^s \quad (3)$$

для некоторого s , $0 < s < 1$, где $\Phi_0(u) = u^2$. Тогда M задается формулой

$$M^{-1}(u) = u^{-s/2(1-s)}[\Phi^{-1}(u)]^{1/(1-s)}. \quad (4)$$

Возьмем $l \in (1, C_\Phi)$ при $1 < C_\Phi < 2$ и $l \in (C_\Phi, \infty)$ при $C_\Phi > 2$. Пусть $s = 2(C_\Phi - l)/C_\Phi(2 - l)$. Тогда $0 < s < 1$. Важно показать, что при определенных условиях M является N -функцией в окрестности бесконечности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ есть N -функция.

Если $F_\Phi(t)$ убывает и $1 < C_\Phi < 2$ или если $F_\Phi(t)$ возрастает и $C_\Phi > 2$, то определенная формулой (4) функция M удовлетворяет следующим условиям:

(А) $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t)/t = +\infty$;

(В) M выпукла в окрестности бесконечности.

Таким образом, N -функция Φ с убывающей индексной функцией $F_\Phi(t)$ и $1 < C_\Phi < 2$ или с возрастающей $F_\Phi(t)$ и $C_\Phi > 2$ в действительности получается интерполяцией между некоторыми $M(u)$ и $\Phi_0(u)$. В силу теоремы 1 и формул (1), (2) получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Φ есть N -функция.

(i) Если $F_\Phi(t) = t\varphi(t)/\Phi(t)$ убывает и $1 < C_\Phi < 2$, то

$$N(L^{(\Phi)}[0, 1]) = N(L^\Phi[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 2^{1-1/C_\Phi}. \quad (5)$$

(ii) Если $F_\Phi(t) = t\varphi(t)/\Phi(t)$ возрастает и $C_\Phi > 2$, то

$$N(L^{(\Phi)}[0, 1]) = N(L^\Phi[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 2^{1/C_\Phi}. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, что соотношения (5) и (6) выполнены также при $C_\Phi = 1$ и $C_\Phi = \infty$ соответственно, поскольку пространства, порожденные N -функцией Φ , нереклексивны. Ясно, что можно вывести коэффициент нормальной структуры и коэффициент слабо сходящихся последовательностей пространства $L^p[0, 1]$. Они равны

$$N(L^p[0, 1]) = WCS(L^p[0, 1]) = \min(2^{1/p}, 2^{1-1/p}),$$

как было впервые показано в [3], поскольку $C_\Phi = p$ для $\Phi(u) = |u|^p$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Φ есть N -функция.

(i) Если $F_\Phi(t) = t\varphi(t)/\Phi(t)$ убывает и φ вогнута, то

$$N(L^{(\Phi)}[0, 1]) = N(L^\Phi[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 2^{1-1/C_\Phi}. \quad (7)$$

(ii) Если $F_\Phi(t)$ возрастает и φ выпукла, то

$$N(L^{(\Phi)}[0, 1]) = N(L^\Phi[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 2^{1/C_\Phi}. \quad (8)$$

ПРИМЕР 5. Пусть N -функция задана формулой $\Phi(u) = 2|u|^p + |u|^{2p}$, $p > 1$. Тогда $F_\Phi(t) = 2p \cdot \frac{t^p+1}{t^p+2} \leq 2p$ и $C_\Phi = 2p$. Таким образом,

$$N(L^{(\Phi)}[0, 1]) = N(L^\Phi[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi)}[0, 1]) = WCS(L^\Phi[0, 1]) = 2^{1/C_\Phi} = 2^{1/(2p)}.$$

Если $0 < s \leq 1$, то Φ_s можно построить по формуле

$$\Phi_s^{-1}(u) = (\sqrt{u+1} - 1)^{(1-s)/p} u^{s/2}.$$

В [4] получены оценки

$$2^{s/2} \leq N(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) \leq WCS(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) \leq 2^{(1-s)/(2p)+s/2},$$

$$2^{s/2} \leq N(L^{\Phi_s}[0, 1]) \leq WCS(L^{\Phi_s}[0, 1]) \leq 2^{(1-s)/(2p)+s/2}.$$

Здесь мы даем точное значение:

$$\begin{aligned} N(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) &= N(L^{\Phi_s}[0, 1]) = WCS(L^{(\Phi_s)}[0, 1]) \\ &= WCS(L^{\Phi_s}[0, 1]) = 2^{1/C_{\Phi_s}} = 2^{(1-s)/(2p)+s/2}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский М. С., Мильман Д. П. Докл. АН СССР, **59**, 837–840 (1948).
2. Vunum W. Pacific J. Math., **86**, 619–624 (1980).
3. Dominguez Benavides T., Rodriguez R. J. Nonlinear Anal., **20**, 349–358 (1993).
4. Rao M. M., Ren Z. D. In: Applications of Orlicz spaces. Marcel Dekker, New York, 2002, pp. 73–116.
5. Yan Y. Q. Studia Math., **147**, No. 1, 73–88 (2001).
6. Yan Y. Q. Southeast Asian Bull. Math., **25**, 769–782 (2002).

Факультет математики Сучжоуского университета, КНР
e-mail: yanyq@pub.sz.jsinfo.net

Поступило в редакцию
5 марта 2004 г.