Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Динамика Ферма, арифметика матриц, конечная окружность и конечная плоскость Лобачевского, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 1–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:27:49

Динамика Ферма, арифметика матриц, конечная окружность и конечная плоскость Лобачевского*

© 2004. В. И. Арнольд

Динамическая система Ферма сопоставляет в качестве своей траектории каждому вычету по модулю n геометрическую прогрессию его степеней. В настоящей статье исследуется матричное обобщение этой динамики, прежде всего в случае целочисленных матриц второго порядка с определителем единица, составленных из вычетов по простому модулю (хотя нетривиальные факты получаются и для матриц любого порядка).

Наряду с информацией о топологии операции возведения матриц из вычетов в квадрат и об описывающих эту операцию графах и деревьях мы получим, например, матричные аналоги малой теоремы Ферма и теории первообразных вычетов, а также укажем на связь всего этого предмета с геометриями Лобачевского и де Ситтера над конечными полями, неожиданно появляющимися при исследовании уравнений $A^m = 1$ в группах матриц: аналитические неравенства заменяются в теории чисел условием квадратичности вычета.

Мы также изучим ниже коммутатор операций суммирования и возведения в фиксированную степень элементов кольца.

§1. Динамика следов

Пусть A — целочисленная матрица порядка r , $\text{tr } A$ — ее след, p — простое число. Рассматривая следы степеней этой матрицы, мы приходим к следующему обобщению малой теоремы Ферма.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место сравнение по модулю p , $\text{tr}(A^p) \equiv (\text{tr } A)^p$.*

Более того, разность правой и левой частей представляет собой многочлен (от коэффициентов характеристического полинома матрицы A) с целыми коэффициентами, делящимися на p :

$$(\text{tr } A)^p - \text{tr}(A^p) = pF_p(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \quad F_p \in \mathbb{Z}[\sigma],$$

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, где σ_k — k -я основная симметрическая функция от корней характеристического уравнения:

$$\sigma_1 = \text{tr } A = \sum \lambda_j, \quad \sigma_2 = \sum \lambda_j \lambda_m, \quad \dots, \quad \sigma_r = \det A = \prod \lambda_j = 1.$$

Теорема 1 в сущности эквивалентна аналогичному ей утверждению о многочленах:

ТЕОРЕМА 1'. *Имеет место тождество*

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^p - (\lambda_1^p + \dots + \lambda_r^p) = pF_p(\sigma(\lambda)), \quad F_p \in \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_p]$$

*Частично поддержано грантом РФФИ 02-01-00655.

(в котором взвешенно-однородный многочлен Ньютона–Жирара F_p взвешенной степени p при $\deg \sigma_k = k$ не зависит вдобавок от числа аргументов r).

ПРИМЕР 1. $(\lambda_1 + \lambda_2)^3 - (\lambda_1^3 + \lambda_2^3) = 3(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2$. Наши теоремы обобщают это соответствующее $r = 2$, $p = 3$ тождество (и другие аналогичные теоремы о делимости элементов треугольника Паскаля) на случай больших значений r и p .

ПРИМЕР 2. Для единичной матрицы A (или для набора $\lambda_j \equiv 1$) наши теоремы принимают вид сравнения

$$r^p \equiv r \pmod{p},$$

т. е. вид малой теоремы Ферма. В этом смысле теорема 1 является матричным аналогом малой теоремы Ферма.

ПРИМЕР 3. Для $p = 2, 3, 5$ и 7 явные формулы для многочленов Ньютона–Жирара F_p теорем 1 и 1' оказываются удивительно короткими (см. [4, 5]):

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^2 - (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2) &= 2\sigma_2, \\ (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^3 - (\lambda_1^3 + \dots + \lambda_r^3) &= 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3), \\ (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^5 - (\lambda_1^5 + \dots + \lambda_r^5) &= 5(\sigma_1^3\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 - \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_5), \\ (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^7 - (\lambda_1^7 + \dots + \lambda_r^7) &= 7(\sigma_1^5\sigma_2 - \sigma_1^4\sigma_3 + \sigma_1^3\sigma_4 - 2\sigma_1^3\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_5 \\ &\quad + 3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_6 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1\sigma_3^2 \\ &\quad + \sigma_1\sigma_2^3 - \sigma_7 + \sigma_2\sigma_5 + \sigma_3\sigma_4 - \sigma_2^2\sigma_3). \end{aligned}$$

В этих формулах неожиданно много коэффициентов многочлена F_p оказываются равными $+1$ и -1 (причем числа положительных и отрицательных коэффициентов для $F_{p>2}$ одинаковы при $p \leq 7$), и все коэффициенты малы.

Эти коэффициенты можно считать функциями от диаграмм Юнга разбиений $p = \sum a_k$, соответствующих одночленам $\prod \sigma_{a_k}$. Коэффициент при «одночлене» $\prod(\sigma_s^{m_s})$ в многочлене $\sum \lambda_j^n$ равен произведению

$$\text{Coeff}[\prod(\sigma_s^{m_s})] = (-1)^{n-m}(n/m)C(\{m_s\}), \quad (*)$$

где число $n = \sum sm_s$ — квазиоднородная степень одночлена, т. е. его степень по переменным λ , число $m = \sum m_s$ — число перемножаемых базисных симметрических функций, а C — мультиномиальный коэффициент, вычисляемый по формуле

$$C(\{m_s\}) = m! / (\prod(m_s!)).$$

Коэффициент C равен числу m -буквенных слов с m_s вхождениями буквы s . Асимптотика его логарифма (при $m_s \rightarrow \infty$, $m_s/m \rightarrow p_s$) порождает энтропию $\sum(p_s \log p_s)$ в теории информации:

$$\lim(\log C(\{m_s\})/m) = \sum(p_s \log p_s).$$

Эти коэффициенты C образуют многомерный аналог треугольника Паскаля.

Степень n в предыдущих формулах — число не обязательно простое, так что они пригодны для перехода от малой теоремы Ферма к обобщающей ее теореме Эйлера, $a^n \equiv a^{n-\varphi(n)} \pmod{n}$.

ПРИМЕРЫ.

$$\text{Coeff}[\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3] = 54 \quad (\text{где } n = 9, m = 5),$$

$$\text{Coeff}[\sigma_1^a \sigma_2 \sigma_3] = -n(n-4) \quad (\text{где } n = a+5, m = a+2),$$

$$\text{Coeff}[\sigma_u^a \sigma_v^b] = \pm(n/(a+b))C_{a+b}^a \quad (\text{где } u \neq v).$$

Доказательство приведенной формулы (*) для Coeff получается из рекуррентной формулы Ньютона–Жирара для $s_n = \sum(\lambda_j^n)$, вытекающей из уравнения теоремы Виета $\lambda^n = \sigma_1 \lambda^{n-1} - \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots$:

$$s_n = \sum (-1)^{q+1} \sigma_q s_{n-q} \quad (\text{где } s_0 = n).$$

Указанные значения Coeff удовлетворяют этим соотношениям вследствие следующего обобщения определяющего свойства треугольника Паскаля (для чисел $C(a, b) = \text{Coeff}[\sigma_u^a \sigma_v^b]$ и аналогичных чисел $C(a_1, \dots, a_r)$ с попарно различными весами $(u_1, \dots, u_r)$):

$$C(a_1, \dots, a_r) = \sum (-1)^{u_s+1} C(a_1, \dots, a_{s-1}, a_s - 1, a_{s+1}, \dots, a_r). \quad (**)$$

Это тождество (**) выводится из рекуррентного соотношения Ньютона–Жирара, приведенного выше, заменой входящих в последнее величин s_k их выражениями $s_k = \sum(C\Pi)$ (и приравнованием коэффициентов при одинаковых произведениях базисных симметрических функций).

Рекуррентное соотношение (**) для коэффициентов C влечет за собой выражение (*) этих коэффициентов в терминах мультиномиальных коэффициентов.

Действительно, при замене коэффициентов C в формуле (**) их выражениями (*) мы получим для мультиномиальных коэффициентов правильное тождество (типа соотношения Паскаля для биномиальных коэффициентов), в справедливости которого легко убедиться либо считая, как Паскаль, пути (в многомерном пространстве), либо прямо складывая выражения мультиномиальных коэффициентов через факториалы.

Итак, числа (*) удовлетворяют тождеству (**).

Из этого вытекает справедливость формулы (*), так как рекуррентные соотношения (**) типа Паскаля, очевидно, имеют только одно решение, а числа (*) этим рекуррентным соотношениям удовлетворяют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 1'. Произведение p одинаковых сомножителей $\lambda_1 + \dots + \lambda_r$ является суммой r^p одночленов степени p , каждый из которых имеет вид произведения степеней различных аргументов, $\mu^a = \mu_1^{a_1} \dots \mu_s^{a_s}$, где $\mu_k = \lambda_j(k)$, причем $\sum a_k = p$, $s \leq p$.

Выписанный одночлен μ^a повторяется в сумме несколько раз, так как, например, $\mu_1^{a_1}$ может быть вкладом какого-то набора из a_1 сомножителей, из числа p сомножителей, $\mu_2^{a_2}$ — вкладом какого-то (не пересекающегося с первым) другого набора из a_2 сомножителей, и так далее. Но выбор этих непересекающихся поднаборов произволен.

Поэтому общее число повторений выписанного одночлена μ^a в нашей сумме r^p слагаемых дается произведением чисел сочетаний, считающих последовательные выборы отдельных поднаборов,

$$N(a) = C_{p_1}^{a_1} C_{p_2}^{a_2} \dots C_{p_s}^{a_s}$$

(где $p_1 = a_1 + \dots + a_s = p$, $p_2 = a_2 + \dots + a_s$, $\dots$, $p_s = a_s$). Действительно, для выбора первого набора имеется $C_{p_1}^{a_1}$ возможностей. Элементы второго поднабора, из a_2 сомножителей, равных μ_2 , выбираются из $p_2 = p - a_1$ не входящих в первый поднабор сомножителей, и так далее.

Заметим теперь, что число сочетаний

$$C_{p_1}^{a_1} = \frac{p(p-1) \cdots (p-a_1+1)}{a_1!}$$

делится на p , так как число p простое, а число $a_1!$ не имеет простого делителя p при $a_1 < p$.

Следовательно, выписанное выше произведение целых сомножителей, N , делится на p .

Аналогичный исследованному одночлену μ^a одночлен $\tilde{\mu}^a$, получающийся из него при замене попарно различных аргументов μ_k попарно различными аргументами $\tilde{\mu}_k$ (из тех же λ_j), входит в сумму с такой же кратностью, как исследованный одночлен μ^a (например, $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3$ входит столько же раз, сколько $\lambda_1^2 \lambda_4^2 \lambda_2$).

Поэтому вся наша сумма представляет собой сумму симметрических многочленов от λ с делящимися на p коэффициентами $N(a)$ (соответствующих разным диаграммам Юнга a площади $p = \sum a_k$). Выражая эти многочлены через элементарные, мы и получим представление их суммы в указанном в теореме 1' виде (а тем самым докажем и теорему 1, вытекающую из теоремы 1').

ДОБАВЛЕНИЕ. Число сочетаний C_m^k , где m и k взаимно просты, делится на m , причем число сочетаний C_{m-1}^{k-1} делится на k .

Первое доказывается при отождествлении числа сочетаний с числом k -элементных подмножеств X в $\mathbb{Z}_m$. Сдвиги $x \mapsto x + a$ (где $a = 1, \dots, m$) переводят X в m различных k -элементных подмножеств. Ибо иначе нашелся бы сдвиг, переводящий X в себя. Его период T должен быть делителем и m и k , вопреки их взаимной простоте (так как m -кратное повторение этого сдвига — тождественное преобразование, а X разбивается на T -элементные орбиты этого сдвига). Второе утверждение следует из первого.

Так же доказывается делимость на m мультиномиального коэффициента $m!/(k_1!) \cdots (k_s!)$, $m = \sum k_i$, если одно из чисел k_i взаимно просто с m .

ПРИМЕР. Для матриц A порядка $n = 2$ с определителем 1 теорему 1 можно переписать следующим образом. Обозначим след матрицы A^m через $t_m = \text{tr}(A^m)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. След t_m — многочлен с целыми коэффициентами от $t = t_1 = \text{tr } A$.

Действительно, матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению,

$$A^2 = At - 1, \quad A^{m+1} = A^m t - A^{m-1}.$$

Следовательно, если $\text{tr}(A^m) = t_m(t)$, то

$$t_{m+1}(t) = t t_m(t) - t_{m-1}(t),$$

так что из начальных условий $t_0(t) = \text{tr}(1) = 2$, $t_1(t) = t$ мы находим последовательность многочленов от одной переменной t :

$$\begin{aligned} t_0 &= 2, & t_1 &= t, & t_2 &= t^2 - 2, & t_3 &= t^3 - 3t, & t_4 &= t^4 - 4t^2 + 2, \\ t_5 &= t^5 - 5t^3 + 5t, & t_6 &= t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2, & t_7 &= t^7 - 7t^5 + 14t^3 - 7t. \end{aligned}$$

Общий член этой последовательности имеет вид

$$t_m(t) = \sum A_{k,l} t^k, \quad \text{где } k + 2l - 2 = m, \quad 0 \leq k \leq m$$

(разумеется, суммирование по k той же четности, что m), где коэффициенты

$$A_{k,l} = \frac{l(l+1) \cdots (l+k-2)(2l+k-2)}{k!} (-1)^{l-1}$$

образуют треугольник типа Паскаля. Начальная ($k = 0, 1, \dots, 4$) часть этого треугольника, без знакового множителя $(-1)^{l-1}$, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 20 & 50 & 105 \\ -5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 14 & 30 & 55 & 91 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \end{array}$$

Строки этого «треугольника» задаются формулами

$$\begin{aligned} \pm A_{0,l} &= 2, & \pm A_{1,l} &= 2l - 1, & \pm A_{2,l} &= l^2, & \pm A_{3,l} &= (2l^3 + 3l^2 + l)/6, \\ \pm A_{4,l} &= l(l+1)(l+2)(2l+2)/24. \end{aligned}$$

Наши теоремы делимости относятся к вертикалям, расположенным ниже диагонали из единиц над простыми нечетными числами в ряду $\pm A_{1,l}$: это вертикали

$$\{3\} \text{ для } p = 3, \quad \{5, 5\} \text{ для } p = 5, \quad \{7, 14, 7\} \text{ для } p = 7;$$

видно, что и дальше 55 делится на 11, а 91 на 13, как и должно быть по теореме 1.

Наша последовательность доставляет также полезные многочлены p_m и q_m , определяемые условиями $A^m = p_m \cdot A + q_m \cdot 1$, вытекающими из характеристического уравнения.

Для них характеристическое уравнение матрицы A доставляет рекуррентные соотношения

$$p_{m+1} = tp_m + q_m, \quad q_{m+1} = -p_m,$$

так что первые из этих полезных многочленов суть

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, & q_1 &= 0, \\ p_2 &= t, & q_2 &= -1, \\ p_3 &= t^2 - 1, & q_3 &= -t, \\ p_4 &= t^3 - 2t, & q_4 &= -t^2 + 1, \\ p_5 &= t^4 - 3t^2 + 1, & q_5 &= -t^3 + 2t, \\ p_6 &= t^5 - 4t^3 + 3t, & q_6 &= -t^4 + 3t^2 - 1, \\ p_7 &= t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1, & q_7 &= -t^5 + 4t^3 - 3t. \end{aligned}$$

Многочлены p_m , q_m и t_m связаны очевидным соотношением аддитивности следов: $t_m = tp_m + 2q_m$.

§2. Круговая группа C_p на конечной плоскости

Рассмотрим конечную окружность $C_p: \{x^2 + y^2 = 1\}$ на конечной плоскости $\mathbb{Z}_p^2$, где p — простое число. Хорошо известна

ЛЕММА 1. Число точек на окружности C_p равно

$$|C_p| = \begin{cases} p+1 & \text{при } p = 4c-1, \\ p-1 & \text{при } p = 4c+1. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Для $p = 5$ это 4 точки $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$, а для $p = 7$ — еще и 4 точки $(\pm 2, \pm 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Параметризуем рациональную кривую C_p «тангенсом t половинного угла», т. е. угла наклона прямой, соединяющей точку кривой (x, y) с ее точкой $(-1, 0)$:

$$t = y/(1+x), \quad x = (1-t^2)/(1+t^2), \quad y = 2t/(1+t^2).$$

Число точек на окружности равно числу допустимых здесь значений проективного параметра $t = (1, 2, \dots, p; \infty)$, при которых $1+t^2 \neq 0$ (точка $(-1, 0)$ соответствует значению параметра $t = \infty$).

Чтобы решить уравнение асимптот, $t^2 + 1 = 0$, выразим t через первообразный вычет ρ по модулю p , положив $t = \rho^\lambda$, $0 < \lambda < p$. Поскольку $-1 = \rho^{(p-1)/2}$, для асимптотической точки t показатель λ должен удовлетворять сравнению

$$2\lambda = (p-1)/2 \pmod{p-1}, \quad \text{т. е. } 4\lambda = (p-1)(1+2a), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку нечетное число $2a+1$ на 2 не делится, то $p-1 = 4c$.

Итак, доказана

ЛЕММА 2. Если p имеет вид $4c-1$, то у уравнения $t^2 + 1 = 0$ решений в $\mathbb{Z}_p$ нет. Если же p имеет вид $4c+1$, то указанный выше выбор λ доставляет (единственные) два решения уравнения $t^2 + 1 = 0$ (одно из них соответствует $\lambda = c$, $a = 0$).

Вычитая из общего числа $p+1$ точек проективной оси t указанное леммой 2 число не доставляющих точек окружности асимптотических значений параметра (это вычитаемое число асимптотических значений равно 0 или 2 соответственно для $p = -1$ и $+1$ по модулю 4), получаем лемму 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Круговой группой C_p называется множество всех матриц порядка 2 определителя 1, составленных из вычетов по простому модулю p , имеющих вид матрицы умножения на комплексное число, т. е. вид

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Такая матрица имеет определитель 1, если и только если (x, y) — точка окружности C_p . Все такие матрицы образуют, очевидно, конечную коммутативную группу, которую мы будем также называть «окружностью C_p ». Эта круговая группа является подгруппой группы унимодулярных матриц $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$.

ТЕОРЕМА 2. *Круговая группа C_p является циклической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и каждая конечная коммутативная группа, круговая группа является прямым произведением циклических групп примарных порядков $q_k^{a_k}$, где q_k — простые числа, вообще не обязательно разные. Докажем, что все эти простые числа, соответствующие разным примарным сомножителям, для круговой группы различны (например, что недопустимы произведения $\mathbb{Z}_3^2$ и $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_9$).

ЛЕММА 3. *Для любого натурального числа m число решений A уравнения $A^m = B$ на окружности C_p не превосходит его степени $m > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле тангенса суммы параметр t_m точки A^m связан с параметром t точки A соотношением $t_m = f_m(t)/g_m(t)$, где многочлен f_m имеет степень m и многочлен g_m степень $m - 1$ при нечетном m (степени $m - 1$ и m при четном m). Поэтому уравнение $A^m = B$ записывается в обоих случаях как алгебраическое уравнение степени m относительно параметра t : $t_m g_m(t) = f_m(t)$, а потому имеет не более m корней. Лемма 3 доказана.

Но в группе $\mathbb{Z}_{q^a}$ имеется q элементов степени q , так что в произведении h примарных сомножителей $\mathbb{Z}_{q^{a_k}}$ с общим q число элементов степени q равно $q^h > q$ при $h > 1$.

Это доказывает, что $h_k = 1$ и все числа q_k в примарных сомножителях круговой группы различны. Значит, она является циклической, будучи прямым произведением циклических групп взаимно простых порядков. Теорема 2 тем самым доказана, и мы вычислили круговые группы:

$$C_p \approx \begin{cases} \mathbb{Z}_{p+1} & \text{при } p = 4c - 1, \\ \mathbb{Z}_{p-1} & \text{при } p = 4c + 1. \end{cases}$$

Порядок круговой группы (с $p \neq 2$) всегда кратен 4, как и должно быть вследствие 4-симметрии окружности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Группа C_2 , исключенная в теореме, изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и состоит из двух матриц перестановок координат, соответствующих точкам $(1, 0)$ и $(0, 1)$, составляющим $\mathbb{Z}_2$ -окружность.

§3. Динамика квадратов матриц порядка 2

Рассмотрим операцию возведения в квадрат, $A \mapsto A^2$, матриц порядка 2 с определителем 1, составленных из вычетов по простому модулю p ($A \in G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$).

Итерируя эту операцию, мы строим по матрице A последовательность матриц-квадратов из той же группы G :

$$A_s = A_{s-1}^2 = A^{2^s}, \quad A_0 = A, \quad A_1 = A^2, \quad \dots$$

— траекторию «динамики квадратов».

ПРИМЕР. Для $p = 7$ мы строим, например, цепочку квадратов

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Длиной цепочки мы будем называть число r шагов ($r = 3$ возведения в квадрат в этом примере).

ТЕОРЕМА 3. *Цепочка квадратов длины r (в которой $A_r = 1$, $A_{s < r} \neq 1$) существует в группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$, если и только если простое число p имеет вид $p = 2^r c \pm 1$.*

ПРИМЕР. Для $p = 7$ и 17 цепочки длины $r = 3$ существуют, а для $p = 5$ и 11 — нет, хотя есть цепочки длины $r = 2$. Наибольшая длина цепочки равна r , если и только если $p = 2^r c \pm 1$, где c нечетно.

Доказательство теоремы состоит из ряда легких шагов.

ЛЕММА 1. *Порядок группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ с простым p равен $p(p^2 - 1)$.*

ПРИМЕР. $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)| = 24$, $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_5)| = 120$, $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_7)| = 336$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из G имеем $ad - bc = 1$. Обозначим произведение ad через $u \in \mathbb{Z}_p$. Тогда условие унимодулярности матрицы A принимает вид

$$ad = u, \quad bc = u - 1.$$

Число способов упорядоченного разложения вычета u на два множителя равно $p - 1$, если $u \neq 0$, и $2p - 1$, если $u = 0$. Подсчитывая отдельно вклады двух исключительных значений $u = 0$ и $u = 1$ и вклады остальных $p - 2$ значений произведения u (путем суммирования произведений чисел разложений обоих слагаемых ad и $-bc$), мы получаем для порядка группы G выражение

$$\begin{aligned} |G| &= 2(p-1)(2p-1) + (p-2)(p-1)^2 = (p-1)[(4p-2) + (p^2-3p+2)] \\ &= (p-1)(p^2+p), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму 1.

Цепочка квадратов $\{A_s\}$, заканчивающаяся членом $A_r = 1$, определяет в группе G циклическую подгруппу степеней A_0^k элемента A_0 ($k = 1, \dots, 2^r$).

ЛЕММА 2. *Все эти 2^r элементов группы G различны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае было бы $A_0^m = 1$ при некотором m строго между 0 и 2^r . Представим наибольший общий делитель q чисел m и 2^r в виде $q = 2^u = Um + V2^r$, где $u < r$. Тогда было бы $A_0^q = 1$, т.е. $A_u = 1$ при $u < r$, т.е. цепочка квадратов заканчивалась бы раньше A_r . Лемма 2 доказана.

Итак, группа G порядка $p(p^2 - 1)$ содержит (циклическую) подгруппу порядка 2^r . Из этого уже следует (при нечетном p), что либо $p + 1$, либо $p - 1$ делится на 2^{r-1} . Мы докажем ниже делимость этого сомножителя на 2^r .

ЛЕММА 3. *Если в группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ имеется цепочка квадратов $\{A_s\}$ длины r (так что $A_r = 1$, $A_{r-1} \neq 1$), то такая цепочка квадратов имеется уже и в круговой подгруппе C_p группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность следов матриц цепочки квадратов, $t_s = \mathrm{tr} A_s$. Из формулы возведения матриц в квадрат

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - 1 & bt \\ ct & dt - 1 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где $t = \mathrm{tr} A = a + d$ (для матриц с определителем $ad - bc = 1$), видно, что $t_2 = \mathrm{tr} A^2 = t^2 - 2$, $t_s = t_{s-1}^2 - 2$ ($s = 1, \dots, r$). Значит, цепочка следов квадратов, $\{t_s\}$, заканчивается членом $t_r = \mathrm{tr} 1 = 2$, перед которым стоит след t_{r-1} , для которого $t_{r-1}^2 = 4$. Следовательно, предпоследний след есть $t_{r-1} = 2$ или -2 .

Из формулы (*) (при нечетном p) следует, что для матрицы A_{r-1} элементы b и c равны 0 (поскольку $bt = ct = 0$, ввиду $A_r = 1$). Стало быть, эта матрица диагональная:

$$A_{r-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad ad = 1, \quad a + d = \pm 2.$$

Решая квадратное уравнение $ad = 1$ относительно a , мы находим $a = d = 1$ при $t = 2$ и $a = d = -1$ при $t = -2$. И если $A_{r-1} \neq 1$, то предпоследним членом цепочки квадратов, заканчивающейся матрицей $A_r = 1$, может быть только матрица $A_{r-1} = -1$ следа $t_{r-1} = -2$.

Чтобы закончить доказательство леммы 3, мы сначала исследуем предшествующий член цепочки, A_{r-2} (подобно приведенному выше исследованию предпоследнего члена, A_{r-1}).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица из G с квадратом -1 называется G -комплексной структурой.

ПРИМЕР. Стандартная комплексная структура

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$$

годится при любом p .

ЛЕММА 4. Число G -комплексных структур для группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ равно $p(p \pm 1)$ при $p = 4c \pm 1$, и все они сопряжены стандартной структуре: $A_{r-2} = gIg^{-1}$ для некоторого $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. След t комплексной структуры удовлетворяет, согласно формуле (*), соотношению $t^2 - 2 = -2$, т.е. равен нулю. Обратно, если $t = \mathrm{tr} A = 0$, то формула (*) показывает, что A — комплексная структура ($A^2 = -1$).

Подсчитаем число матриц A со следом нуль в группе G :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + bc = -1.$$

Число упорядоченных разложений вычета $bc = u$ на множители b и c равно $p-1$, если $u \neq 0$, и равно $2p-1$, если $u = 0$. Число решений уравнения $a^2 + 1 = 0$ равно 0 при $p = 4c - 1$ и равно 2 при $p = 4c + 1$ (по лемме 2 из §2). Учитывая раздельно вклады особых значений $u = 0$ и $u \neq 0$, мы получаем при $p = 4c - 1$, где их нет,

$$\#(A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) : \mathrm{tr} A = 0) = p(p-1),$$

в то время как при $p = 4c + 1$ особые значения дают вклад $2(2p-1)$, так что

$$\#A = (p-2)(p-1) + 2(2p-1) = (p^2 - 3p + 2) + (4p - 2) = p(p+1).$$

С другой стороны, элементы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ стационарной группы H стандартной структуры I определяются уравнением

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix},$$

$\alpha = \delta$, $\gamma = -\beta$, с условием унимодулярности $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. По лемме 1 §2 число элементов этой (круговой) группы H равно $p \pm 1$ при $p = 4c \mp 1$. Следовательно, число комплексных структур, сопряженных со стандартной, есть $|G|/|H| = p(p^2 - 1)/(p \pm 1) = p(p \mp 1)$ при $p = 4c \mp 1$.

Это число совпадает с числом унимодулярных матриц со следом 0 в G .

Значит, все матрицы из G со следом нуль сопряжены в группе G стандартной структуре I , что и доказывает лемму 4.

Вернемся к окончанию доказательства леммы 3. Мы уже знаем, что цепочка квадратов $\{A_s\}$ заканчивается матрицами $A_{r-1} = -1$ и $A_r = 1$. Если $r \geq 2$, то им предшествует комплексная структура A_{r-2} , сопряженная по лемме 4 стандартной структуре I : $A_{r-2} = gIg^{-1}$. Сопрягая всю цепочку квадратов $\{A_s\}$ тем же элементом g группы G , мы получим новую цепочку квадратов, $\tilde{A}_s = gA_sg^{-1}$, заканчивающуюся тройкой $\tilde{A}_{r-2} = I$, $\tilde{A}_{r-1} = I^2 = -1$, $\tilde{A}_r = 1$.

Заметим, что след ни одной из матриц $\tilde{A}_s$ (или A_s) с $s < r - 2$ нулю не равен, так как иначе мы получили бы $A_s^2 = -1$, $A_{s+2} = 1$ при $s + 2 < r$, т. е. исходная цепочка имела бы меньшую r длину.

Формула (*) при $bt + ct = 0$, $t \neq 0$, показывает, что $b + c = 0$. Поэтому все матрицы полученной цепочки квадратов $\tilde{A}_s$ при $s \leq r - 2$ имеют $b + c = 0$.

Точно так же формула (*) при $(at - 1) - (dt - 1) = 0$, $t \neq 0$, показывает, что $a = d$. Значит, все матрицы цепочки квадратов $\{\tilde{A}_s\}$ при $s \leq r - 2$ принадлежат круговой группе $C_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$. Лемма 3 доказана. Причем, согласно теореме о цикличности из §2, в случаях $p = 2^r c \pm 1$ мы получаем в C_p цепочку квадратов длины r ($A_r = 1$).

Теорема 3 вытекает из этой леммы, так как порядок круговой группы C_p равен $p \pm 1$ (при $p = 4c \mp 1$) по теореме 2, а порядок построенной выше ее циклической подгруппы $\{\tilde{A}_0^k\}$ равен 2^r . Значит, число $p \pm 1$ делится на 2^r . В зависимости от остатка при делении p на 4, мы приходим к выводам

$$\begin{aligned} p + 1 &= 2^r q & \text{при } p = 4c - 1 & \quad (\text{и тогда } p = 2^r q - 1), \\ p - 1 &= 2^r q & \text{при } p = 4c + 1 & \quad (\text{и тогда } p = 2^r q + 1). \end{aligned}$$

И обратно, для таких значений p цепочка квадратов длины r предъявлена выше.

Тем самым теорема 3 доказана полностью.

§4. Уравнение $A^p = 1$ в группе $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ и геометрия Лобачевского

Из матричной теоремы Ферма §1 мы получаем по модулю p сравнение для A из G

$$\text{tr}(A^p) \equiv (\text{tr } A)^p = t^p, \quad \text{где } t = \text{tr } A.$$

Из обычной теоремы Ферма следует числовое сравнение $t^p \equiv t \pmod{p}$. Мы получаем матричную теорему Ферма в виде сравнения по модулю p

$$\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr } A.$$

Для решения уравнения $A^p = 1$ в G начнем поэтому с исследования матриц A со следом $\text{tr } A = \text{tr } 1 = 2$.

ЛЕММА 1. Матрицы со следом 2 образуют в группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ подмножество M из p^2 элементов, замкнутое относительно операции возведения матриц в квадрат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (*) из §3 $\mathrm{tr}(A^2) = (\mathrm{tr} A)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$, если $\mathrm{tr} A = 2$. Чтобы сосчитать число элементов множества M , запишем эти матрицы в виде $A = 1 + B$, $\mathrm{tr} B = 0$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$. Условие унимодулярности $\det A = 1$ принимает вид $1 - x^2 - yz = 1$, т.е. $yz = -x^2$. Если $x \neq 0$, то получаем $p - 1$ упорядоченных разложений $yz = u$ числа $u = -x^2$. Если $x = 0$, то число разложений равно $2p - 1$. Итого число элементов множества M равно сумме произведений чисел возможных выборов числа x и чисел разложений, $(p - 1)^2 + (2p - 1) = p^2$.

Разумеется, в M входят матрица 1 и жорданова матрица $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (порядка p).

Собственные числа матрицы из M определяются из характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ и потому оба равны 1 для любой матрицы из M . И обратно, любая матрица с двукратным собственным числом 1 принадлежит M .

ТЕОРЕМА 4. Множество M матриц со следом 2 в $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ с нечетным простым p состоит из трех классов сопряженных элементов: 1, M^+ и M^- , где $(p^2 - 1)/2$ элементов класса M^+ сопряжены жордановой матрице J , а элементы класса M^- сопряжены матрице J^b , где число b — квадратичный невычет по модулю p .

В этом смысле $p^2 - 1$ элементов множества $M \setminus 1$ решений уравнения $A^p = 1$, $A \neq 1$, разбиваются на два равномоощных класса эквивалентности соответственно разбиению неравных нулю вычетов по модулю p на квадратичные и неквадратичные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стационарная группа H жордановой матрицы J состоит из унимодулярных матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, для которых

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ \gamma & \gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

т.е. $\gamma = 0$, $\alpha = \delta$. Условие унимодулярности дает $\alpha^2 = 1$. Число решений, при нечетном p , составляет $2p$ (так как $\alpha = \pm 1$, $\beta \in \mathbb{Z}_p$): $|H| = 2p$.

Поэтому число элементов, сопряженных в G с J , равно $|G|/|H| = p(p^2 - 1)/(2p) = (p^2 - 1)/2$.

В частности, матрица J^b сопряжена матрице J , если и только если $b \neq 0$ — квадратичный вычет. Сопряженность всех отличных от 1 матриц следа 2 либо матрице J , либо матрице J^b проверяется прямой выкладкой, аналогичной приведенной выше. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. С матрицей $A \neq 1$ из M можно естественно связать ее единственную инвариантную прямую, πA , проходящую через 0 на конечной плоскости $\mathbb{Z}_p^2$, т.е. точку конечной проективной прямой $P = P^1(\mathbb{Z}_p)$. Обратно, по такой точке $\pi A \in P$ матрица A из $M \setminus 1$ восстанавливается со следующей точностью: прообраз при отображении π каждой из $p + 1$ точек прямой P среди

$(p^2 - 1)/2$ точек множества M^+ состоит из $(p - 1)/2$ матриц с общим собственным вектором (например, вместе с матрицей J в него входят матрицы J^b , для которых b — квадратичный вычет по модулю p).

Каждый элемент g группы G действует на $p + 1$ точек множества P , переставляя их некоторой специальной — проективной — четной перестановкой. Это проективное действие специальными четными перестановками g_* точек конечной проективной прямой P над $\mathbb{Z}_p$, состоящей из $p + 1$ точек, гомоморфно действию группы G на множестве матриц M^+ сопряжениями (в том смысле, что $\pi(gAg^{-1}) = g_*(\pi A)$).

Если матрица g принадлежит множеству M^+ , то перестановка g_* оставляет точку πg проективной прямой P на месте.

Все проективные преобразования конечной проективной прямой P , оставляющие на месте одну ее точку, образуют конечную группу L . Если выбрать координаты так, чтобы остающаяся на месте точка имела аффинную координату $u = \infty$ на P^1 , то преобразования, образующие группу L , станут аффинными: $u \mapsto au + b$, $a \neq 0$.

Поэтому число этих преобразований есть $|L| = p(p - 1)$. Но поднимаются из проективной группы в группу $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ только те из них, для которых вычет a квадратичен. Так что образом группы G при описанном гомоморфизме в перестановки точек прямой P является подгруппа L^+ индекса 2 в L , $|L^+| = p(p - 1)/2$, состоящая из преобразований вида $u \mapsto au + b$, где $a = c^2$, $c \neq 0$, — квадратичный вычет.

Конечная группа L^+ является (mod p) аналогом обычной плоскости Лобачевского. Эту плоскость можно ведь (см. [1]) определять как группу аффинных (и сохраняющих ориентацию) преобразований вещественной прямой: $\{u \mapsto au + b\}$, где $a > 0$, т. е. $a = c^2$, $c \neq 0$ (снабженной левоинвариантной римановой метрикой). Условие положительности, нужное в вещественном случае, заменяется в теории чисел квадратичностью вычета.

Можно надеяться, что указанная здесь связь уравнения $A^p = 1$ в G с конечной плоскостью Лобачевского (из $p(p - 1)/2$ точек) окажется полезной для анализа комбинаторики операции возведения матриц из G в квадрат и соответствующих римановых поверхностей (описанных для $p = 5$ и 7 в статье [2]) и их кубов Кеплера. Например, точкам и прямым плоскости Лобачевского и двойственного ей мира де Ситтера из [3] можно сопоставлять решения уравнений $A^p = 1$ и $A^3 = 1$, о втором из которых сказано ниже.

Но идея заменять входящие в аналитические теории неравенства условиями квадратичности вычетов в теории чисел может иметь и другие приложения, кроме геометрии Лобачевского.

§5. Уравнение $A^3 = 1$ в группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$

Будем решать это уравнение, записав его в виде $A^2 = A^{-1}$, что приводит для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ к системе уравнений

$$at - 1 = d, \quad bt = -b, \quad ct = -c, \quad dt - 1 = a$$

(где $t = a + d$ — след), поскольку $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Мы заключаем, что $b(t+1) = c(t+1) = 0$, поэтому либо $t = -1$, либо $b = c = 0$.

В первом случае условие $A^2 = A^{-1}$ выполнено. Во втором случае мы находим $(a+d)t - 2 = t$, $t^2 - t - 2 = 0$, $(t+1)(t-2) = 0$, $t = 2$. При $a+d = 2$, $ad = 1$ мы заключаем, что $a = d = 1$, так что второй случай доставляет лишь матрицу $A = 1$. Итак, доказана

ЛЕММА 1. *Отличные от 1 решения уравнения $A^3 = 1$ в G суть в точности матрицы следа -1 и определителя 1 из G :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix}, \quad -bc = a^2 + a + 1.$$

ПРИМЕР. Матрица $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ имеет куб 1 при любом p .

Чтобы найти число всех таких матриц A , исследуем по отдельности случаи $u = 0$ и $u \neq 0$, где $u = a^2 + a + 1$.

ЛЕММА 2. *Число решений a уравнения $a^2 + a + 1 = 0$ в $\mathbb{Z}_p$ равно 2 при $p = 3c + 1$ (например, при $p = 7, 13$) и равно 0 при $p = 3c - 1$ (например, при $p = 5, 11$); при $p = 3$ решение одно, $a = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a^2 + a + 1 = 0$, то $a^3 = 1$. Обозначая через ρ первообразный по модулю p вычет, мы получаем $a = \rho^\lambda$, $a^3 = \rho^{3\lambda}$, и показатель λ должен удовлетворять условию

$$3\lambda = k(p-1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если число k кратно 3, то $a = 1$. Условие $a^3 = 1$ всегда выполнено для этого a , но этот корень — лишний, так как при $a = 1$ число $a^2 + a + 1 = 3$ равно 0 только при $p = 3$.

Если же целое число k не делится на 3, то $p-1 = 3c$, $p = 3c + 1$. Выбирая $k = 1$, $\lambda = c$, мы находим один из корней a_1 квадратного уравнения для a (второй корень есть $a_2 = 1/a_1 = -a_1 - 1$). Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Все отличные от 1 решения уравнения $A^3 = 1$ в $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ сопряжены решению F , и их число равно, в зависимости от остатка при делении простого числа p на 3,*

$$p(p-1) \quad \text{при } p = 3c - 1, \quad p(p+1) \quad \text{при } p = 3c + 1.$$

Интересно, что эти числа, а возможно и решения, связаны с точками и прямыми на конечных плоскостях Лобачевского и на их накрытиях L , описанных выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 находим число матриц следа -1 и определителя 1 в зависимости от остатка от деления числа p на 3:

$$\begin{aligned} & p(p-1) \quad \text{при } p = 3c - 1, \\ & (p-2)(p-1) + 2(2p-1) = (p^2 - 3p + 2) + (4p - 2) = p(p+1) \quad \text{при } p = 3c + 1. \end{aligned}$$

Стационарную подгруппу H матрицы F в G ищем из уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\beta & \alpha - \beta \\ -\delta & \gamma - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha - \gamma & -\beta - \delta \end{pmatrix},$$

т.е. $\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha - \beta$. Из условия унимодулярности $\det A = 1$ получаем рациональную кривую $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 1$. Полагая $\alpha = x - 1$, $\beta = tx$, находим для второй точки пересечения этой кривой с прямой $\beta = tx$, проходящей через точку $(\alpha = -1, \beta = 0)$ нашей кривой, уравнение

$$x^2(1 - t + t^2) + x(t - 2) = 0,$$

$$x = \frac{2 - t}{1 - t + t^2}, \quad \alpha = \frac{1 - t^2}{1 - t + t^2}, \quad \beta = \frac{2t - t^2}{1 - t + t^2}.$$

Чтобы исключить бесконечно удаленные (в направлениях асимптот) точки из числа $p + 1$ точек, получаемых при $t = 1, 2, \dots, p, \infty$, решаем квадратное уравнение $1 - t + t^2 = 0$ (из которого следует $t^3 = -1$, что исследовать легче).

Если $t = \rho^\lambda$ для первообразного по модулю p вычета ρ , то показатель λ должен удовлетворять сравнению

$$3\lambda \equiv (p - 1)/2 \pmod{p - 1}, \quad 6\lambda = (p - 1)(2k + 1).$$

Если целое число $2k + 1$ делится на 3, то $t = \pm 1$. В этих случаях $1 - t + t^2 = 0$ только для $p = 3$, $t = +1$.

Если целое число $2k + 1$ не делится на 3, то $p - 1 = 3c$, $p = 3c + 1$. В этом случае наша формула для λ доставляет (два) решения t нашего квадратного уравнения в $\mathbb{Z}_p$, тогда как при $p = 3c - 1$ их нет.

Окончательно мы получаем для порядка стационарной группы величину, зависящую от остатка при делении p на 3:

$$|H| = \begin{cases} p + 1 & \text{при } p = 3c - 1, \\ p - 1 & \text{при } p = 3c + 1. \end{cases}$$

Следовательно, число сопряженных матрице F элементов группы G равно $|G|/|H| = p(p \mp 1)$ при $p = 3c \mp 1$, как и число матриц следа -1 в G . Значит, все эти матрицы сопряжены матрице F , и теорема 5 доказана (при $p \neq 3$).

При $p = 3$ число матриц с $A^3 = 1$ в $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ равно 8 (это все матрицы следа -1), в том числе 4 сопряжены матрице F , а 4 — матрице F^2 .

Все это видно, например, из строения графа монады возведения в квадрат для группы G , имеющего вид $T_{1,1,6} + 8A_2$ (в обозначениях статьи [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск, 1999, приложение 20, с. 168–176 (Arnold V., Avez A. Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique. Paris, Gautier-Villars, 1967.)
2. Арнольд В. И. Топология и статистика формул арифметики. УМН, **58**, вып. 4 (352), 3–28 (2003).

3. *Arnold V. I.* Arithmetics of binary quadratic forms, symmetry of their continued fractions and geometry of their de Sitter world. Bull. Braz. Math. Soc., N.S., **34**, No. 1, 1–41 (2003); MCCME, Dubna, 2002.
4. *Girard A.* Invention nouvelle en l'algèbre. Amsterdam, 1629.
5. *Newton I.* Arithmetica universalis. Cambridge, 1707, pp. 57–63.

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
3 октября 2003 г.