Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вершинин, В. А. Курлин, Трехстраничные
вложения сингулярных узлов, *Функц. анализ и его
прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 16–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:35:32

Трехстраничные вложения сингулярных узлов*

© 2004. В. В. Вершинин, В. А. Курлин

§1. Введение

1.1. Постановка задачи и результаты. Мы развиваем метод трехстраничных вложений Дынникова для *зацеплений с особенностями* следующего типа: допускается конечное число точек двойного пересечения в общем положении. Более точно, решается задача изотопической классификации неориентированных сингулярных узлов в $\mathbb{R}^3$. Ключевая идея — конструкция трехстраничного вложения для окрестности особой точки сингулярного узла. В частности, эта конструкция позволила сократить число образующих и соотношений в классифицирующей полугруппе для сингулярных узлов.

1.2. Обзор предыдущих результатов. Вложения зацеплений в объект, напоминающий книжку с конечным числом страниц, возможно, впервые рассматривались Брунном в 1898 г. [2]. А именно, Брунн доказал, что любой узел изотопен узлу, проекция которого на плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет ровно одну особую точку. Позднее такие вложения изучались в работах [5–7] и использовались в [4]. Эти исследования привели к новому инварианту зацеплений — *дуговому индексу* [5, 7, 19]. Оказалось, что любое зацепление можно вложить в книжку только с тремя страницами. В 1999 г. Дынников классифицировал неориентированные зацепления в $\mathbb{R}^3$ с точностью до объемлющей изотопии с помощью кодирования *трехстраничными диаграммами* [9, 10]. Чтобы быть более точными, мы будем называть эти диаграммы *трехстраничными вложениями* (см. определение в разд. 2.1). Дынников построил полугруппу, все центральные элементы которой находятся во взаимно однозначном соответствии с изотопическими классами всех неориентированных (регулярных) зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Применяя вложения в книжку с произвольным числом страниц, Дынников уменьшил число соотношений в своей полугруппе [11]. Аналогичным образом, второй автор настоящей статьи получил изотопическую классификацию неориентированных заузленных 3-валентных графов в $\mathbb{R}^3$ [18].

1.3. Мотивировки. В работе [15] сингулярные узлы названы *химерическими графами* (*chimerical graphs*), а в работе [16] — 4-валентными графами с жесткими вершинами. Изучение сингулярных узлов и кос было мотивировано теорией инвариантов Васильева [3]. Соответствующий алгебраический объект в косах называется *моноидом Баеса–Бирман* или *сингулярным моноидом кос* [1, 3]. Некоторые его свойства изучались в [8, 12, 14]. Для сингулярных кос был доказан аналог теоремы Маркова [13]. Многие инварианты регу-

*Первому автору была оказана частичная финансовая поддержка согласно Французско-Российской программе исследований EGIDE (грант No 04495UL), а второму автору — по гранту INTAS YS 2001/2-30.

лярных зацеплений (без особенностей), в частности, многочлены Александера–Конвея и Джонса, и инварианты Васильева были построены для сингулярных узлов [15–17, 20]. Гомологические свойства сингулярных кос из бесконечного числа нитей изучались первым автором в [22, 23].

1.4. Основные определения. Мы работаем в кусочно-линейной категории, т.е. образы окружностей при погружении в $\mathbb{R}^3$ — это конечные ломаные. Формально *сингулярный узел* — это погружение нескольких окружностей в $\mathbb{R}^3$, в котором возможны только двойные пересечения в общем положении в конечном числе *особых точек* (рис. 1, 2). Через каждую особую точку проходят две *ветви* данного сингулярного узла. Всюду в нашей работе (кроме разд. 3.5) рассматриваются только неориентированные сингулярные узлы, возможно несвязные. Заметим, что сингулярные узлы являются 4-валентными графами, вложенными в $\mathbb{R}^3$. *Объемлющая кусочно-линейная изотопия* между двумя графами — это непрерывное семейство кусочно-линейных гомеоморфизмов $\phi_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, таких, что $\phi_0 = \text{id}$, а гомеоморфизм ϕ_1 переводит один граф в другой. Сингулярные узлы рассматриваются с точностью до объемлющей кусочно-линейной изотопии, которая сохраняет жесткой окрестность (или *шаблон* по терминологии работы [15]) каждой особой точки сингулярного узла. Если опустить последнее ограничение на изотопию, то мы получим определение *шарнирного графа* (графа с *нежесткими* вершинами по терминологии работы [16]). В отличие от случая сингулярных узлов изотопия шарнирных графов может произвольно переставлять ребра в вершине. В разд. 3.5 мы формулируем классификационную теорему 5 для *шарнирных* 4-валентных графов. Как и регулярные зацепления, сингулярные узлы можно представлять плоскими диаграммами по модулю преобразований Райдемайстера $R1$ – $R5$ (рис. 1) [15]. Мы приводим кусочно-линейные аналоги соответствующих гладких движений, опуская подразделения и изломы ребер. В случае шарнирных 4-валентных графов берется движение $R5'$ вместо $R5$.

Рис. 1. Движения Райдемайстера для сингулярных узлов и шарнирных графов

1.5. Универсальная полугруппа для сингулярных узлов. Всюду индекс i принадлежит группе $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Введем алфавит $\mathbb{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, i \in \mathbb{Z}_3\}$ из 15 букв (на рис. 3 дана их геометрическая интерпретация). Пусть SK — полугруппа, заданная 15 образующими из алфавита $\mathbb{A}$ и следующими соотношениями (1)–(10), которые описывают некоторые «элементарные объемлющие изотопии» сингулярных узлов в $\mathbb{R}^3$:

$$a_i = a_{i+1}d_{i-1}, \quad b_i = a_{i-1}c_{i+1}, \quad c_i = b_{i-1}c_{i+1}, \quad d_i = a_{i+1}c_{i-1}, \quad (1)$$

$$x_i = d_{i+1}x_{i-1}b_{i+1}, \quad (2)$$

$$d_0d_1d_2 = 1, \quad (3)$$

$$b_id_i = d_ib_i = 1, \quad (4)$$

$$d_ix_id_i = a_i(d_ix_id_i)c_i, \quad b_ix_ib_i = a_i(b_ix_ib_i)c_i, \quad (5)$$

$$x_i(d_{i+1}d_id_{i-1}) = (d_{i+1}d_id_{i-1})x_i, \quad (6)$$

$$(d_ic_i)w = w(d_ic_i), \quad \text{где } w \in \{c_{i+1}, x_{i+1}, b_id_{i+1}d_i\}, \quad (7)$$

$$(a_ib_i)w = w(a_ib_i), \quad \text{где } w \in \{a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, x_{i+1}, b_id_{i+1}d_i\}, \quad (8)$$

$$t_iw = wt_i, \quad \text{где } t_i = b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}, \quad w \in \{a_i, b_i, c_i, x_i, b_{i-1}d_id_{i-1}\}, \quad (9)$$

$$(d_ix_ib_i)w = w(d_ix_ib_i), \quad \text{где } w \in \{a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, x_{i+1}, b_id_{i+1}d_i\}. \quad (10)$$

Одно соотношение в (4) избыточно: его можно получить из соотношения (3) и остальных соотношений в (4). Поэтому количество соотношений (1)–(10) равно 84.

1.6. Алгебраическая классификация сингулярных узлов.

ТЕОРЕМА 1. *Любой сингулярный узел представляется некоторым элементом полугруппы SK .*

ТЕОРЕМА 2. *Два сингулярных узла объемлюще изотопны в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда соответствующие элементы полугруппы SK равны.*

ТЕОРЕМА 3. *Произвольный элемент полугруппы SK отвечает некоторому сингулярному узлу тогда и только тогда, когда этот элемент — центральный, т. е. коммутирует с каждым элементом полугруппы SK .*

Как будет доказано в теореме 4, вся полугруппа SK описывает более широкий класс *трехстраничных сингулярных связок*. Подполугруппа в полугруппе SK , порожденная 12 образующими a_i, b_i, c_i, d_i ($i \in \mathbb{Z}_3$) и 48 соотношениями из (1)–(10), которые не содержат букв x_i ($i \in \mathbb{Z}_3$), совпадает с полугруппой Дынникова DS из [9, 10]. Центр полугруппы DS классифицирует все неориентированные (регулярные) зацепления в $\mathbb{R}^3$ с точностью до объемлющей изотопии.

1.7. План работы. В разд. 2.1 мы определяем трехстраничные вложения сингулярных узлов. Такие вложения строятся из плоских диаграмм узлов в разд. 2.2 и кодируются в разд. 2.3. Теорема 1 доказывается в разд. 2.5. В разд. 3.1 вводятся обычные сингулярные связки, а в разд. 3.2 — трехстраничные сингулярные связки. Последнее понятие обобщает понятие трехстраничных вложений сингулярных узлов и помогает в доказательстве теоремы 2. В разд. 3.3 классифицируются трехстраничные связки (теорема 4). Тогда теорема 2 вытекает из теоремы 4 как частный случай. Теорема 2 применяется при доказательстве теоремы 3 в разд. 3.4. В разд. 3.5 формулируется классификационная теорема 5 для шарнирных 4-валентных графов. В §4 мы выводим лемму 3, которая используется в доказательстве теоремы 4.

1.8. Благодарности. Второй автор благодарит за гостеприимство И. К. Бабенко, Ж. Лафонтена, а также Университет Монпелье II (Франция), где эта работа была написана. Он также благодарен И. А. Дынникову за внимание к работе и своему научному руководителю профессору В. М. Бухштаберу за поддержку.

§2. Трехстраничные вложения

2.1. Формальное определение трехстраничных вложений. Под *дугой* сингулярного узла $K \subset \mathbb{R}^3$ в точке $A \in K$ понимается любой достаточно маленький отрезок $J \subset K$ с концом A . Таким образом, из каждой особой точки узла выходит ровно 4 дуги. Пусть P_0, P_1 и P_2 — три полуплоскости в $\mathbb{R}^3$ с общей ориентированной границей: $\partial P_0 = \partial P_1 = \partial P_2 = \alpha$ (все построения в разд. 2.1–2.2 иллюстрируются рис. 2). Положим $\mathbb{Y} = P_0 \cup P_1 \cup P_2$ и назовем это объединение *книжкой с тремя страницами*. Вложение узла K в книжку $\mathbb{Y}$ называется *трехстраничным*, если выполняются следующие условия:

- 1) все особые точки узла K лежат на оси α ;
- 2) *конечность*: пересечение $K \cap \alpha = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — конечное непустое множество точек;
- 3) две дуги в каждой неособой точке $A_j \in K \cap \alpha$ лежат в различных полуплоскостях;
- 4) окрестность любой особой точки A_j лежит в плоскости $P_{i-1} \cup P_{i+1}$ при некотором $i \in \mathbb{Z}_3$;
- 5) *монотонность*: при каждом $i \in \mathbb{Z}_3$ ограничение ортогональной проекции $\mathbb{Y} \rightarrow \alpha \approx \mathbb{R}$ на любую компоненту связности пересечения $K \cap P_i$ является монотонной функцией.

2.2. Построение трехстраничного вложения из плоской диаграммы. Пусть D — плоская диаграмма сингулярного узла K , т. е. плоский 4-валентный граф с вершинами двух типов: первые отвечают особым точкам узла K , вторые обозначают обычные *перекрестки* плоской диаграммы зацепления. Для каждой особой точки B отметим две маленькие выходящие из нее дуги (*особый мост* L_B), лежащие на разных ветвях нашего сингулярного узла. Кроме того, для каждого перекрестка диаграммы D отметим небольшой отрезок (*регулярный мост*) дуги, проходящей сверху.

тогда одна из этих дуг должна пересекаться вторым концом с путем α слева от моста L_B , а другая — справа.

Такой путь α легко найти следующим образом. Оставим на плоскости только мосты, т.е. конечное число дуг, и проведем через них произвольный путь α со свойствами 1) и 2). Тогда свойство трансверсальности 3) будет выполнено, если наш путь α привести в общее положение относительно диаграммы D . Пусть для построенного пути свойство сбалансированности 4) не выполняется для некоторой особой точки B , т.е. обе неотмеченные дуги L_1, L_2 , выходящие из B , пересекаются с путем α слева от моста L_B , например. Тогда пошевелим путь α справа от моста L_B движением, аналогичным $R2$ на рис. 1, так, чтобы одна из неотмеченных дуг L_1, L_2 (на рис. 2 это дуга L_2) стала пересекаться с путем α справа от моста L_B .

Теперь продеформируем плоскость диаграммы так, чтобы путь α стал отрезком прямой и было выполнено такое условие *монотонности*: ограничение ортогональной проекции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \alpha \approx \mathbb{R}$ на каждую компоненту связности диаграммы $D - \alpha$ является монотонной функцией. Обозначим верхнюю полуплоскость над α через P_0 , а нижнюю полуплоскость — через P_2 . Наконец, приклеим третью полуплоскость P_1 к оси α (со стороны читателя) и вытолкнем в нее все мосты по следующим правилам. Каждый регулярный мост превращается в тривиальную арку, а каждый особый мост L — в ломаную, похожую на букву W , которая пересекается с осью α в трех верхних точках, средняя из которых — особая вершина B . На самом деле окрестность особой точки можно вложить в плоскость $P_0 \cup P_2$, не выталкивая отмеченные дуги в третью. Мы воспользовались понятием особого моста для упрощения рассуждений.

2.3. Кодирование трехстраничных вложений. Любое трехстраничное вложение сингулярного узла однозначно задается своим образом в маленькой окрестности оси α в книжке $\mathbb{Y}$. Действительно, чтобы восстановить все вложение целиком, достаточно соединить противоположно направленные дуги в каждой полуплоскости, начиная с внутренних дуг. Мы считаем, что полуплоскость P_0 расположена выше оси α , а полуплоскости P_1, P_2 — ниже оси α . Кроме того, предполагаем, что полуплоскость P_1 лежит выше P_2 , т.е. дуги в P_2 рисуются пунктирными линиями. Около оси α в трехстраничном вложении сингулярного узла могут возникнуть только 15 картинок, изображенных на рис. 3.

Пусть W — множество всех слов в алфавите $\mathbb{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, i \in \mathbb{Z}_3\}$, включая пустое слово $\emptyset$. Для данного трехстраничного вложения узла K выпишем последовательно буквы из $\mathbb{A}$, отвечающие точкам пересечения $K \cap \alpha$. Получим слово $w_K \in W$ (рис. 2).

2.4. Сбалансированные слова. Заметим, что с помощью кодировки, описанной в разд. 2.3, нельзя получить все слова из множества W . Назовем слово *сбалансированным*, если оно кодирует некоторое трехстраничное вложение. Есть простой геометрический критерий сбалансированности слова: в каждой полуплоскости все дуги должны соединяться друг с другом. Дуги несбалансированного трехстраничного вложения могут уходить в бесконечность, не соединяясь друг с другом. Можно легко переформулировать этот критерий алгебраически в терминах алфавита $\mathbb{A}$. Для $i \in \mathbb{Z}_3$ слово w называется *i -сбалансированным*, если после подстановки

$$a_i, b_i, c_i, d_i, x_i \rightarrow \emptyset, \quad a_{i\pm 1}, b_{i-1}, d_{i+1} \rightarrow (, \quad b_{i+1}, c_{i\pm 1}, d_{i-1} \rightarrow), \quad x_{i\pm 1} \rightarrow)$$

Рис. 3. Геометрическая интерпретация букв алфавита $\mathbb{A}$

получится выражение с *полностью сбалансированными скобками* (или, по другой терминологии, с *правильно расставленными скобками*). Это означает, что перед каждым символом число левых скобок не меньше, чем число правых, и их общие количества равны. Множество всех i -сбалансированных слов в алфавите $\mathbb{A}$ обозначим через W_i . Тогда слово w называется *сбалансированным*, если оно i -сбалансированно для каждого $i \in \mathbb{Z}_3$. Таким образом, множество всех сбалансированных слов — это $W_b = W_0 \cap W_1 \cap W_2 \subset W$.

2.5. Доказательство теоремы 1. Возьмем плоскую диаграмму D данного сингулярного узла K . Начиная с диаграммы D , построим трехстраничное вложение узла $K \subset \mathbb{Y}$, как описано в разд. 2.2. Закодируем полученное вложение узла K сбалансированным словом $w_K \in W_b$ по правилам разд. 2.3. Наконец, рассмотрим слово w_K как элемент полугруппы SK . $\square$

§3. Сингулярные связки

3.1. Полугруппа ST сингулярных связок. Для доказательства теоремы 2 введем понятие сингулярной связки. Категория связок без особенностей изучалась В. Г. Тураевым в [21]. Возьмем два горизонтальных луча $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$, например, заданные координатами $(r, 0, 0)$ и $(r, 0, 1)$, где $r \in \mathbb{R}_+$. При всех $j \in \mathbb{N}$ отметим целые точки $(j, 0, 0)$, $(j, 0, 1)$ на обоих лучах. Пусть Γ — произвольный несвязный неориентированный бесконечный граф с вершинами валентности 1 и 4. *Сингулярная связка* — это такое вложение графа Γ в трехмерный слой $\{0 \leq z \leq 1\}$, что (см. рис. 4):

1) 1-валентные вершины графа Γ совпадают с отмеченными точками $\{(j, 0, 0), (j, 0, 1)\}_{j \in \mathbb{N}}$;

2) все связные компоненты графа Γ , лежащие достаточно далеко от начала координат, являются прямолинейными отрезками, которые соединяют точки $(j, 0, 0)$ и $(k, 0, 1)$, причем разность $k - j$ постоянна при больших j ;

3) для каждой 4-валентной вершины графа Γ существует окрестность этой вершины в графе Γ , которая лежит в некоторой плоскости.

Мы рассматриваем сингулярные связки с точностью до объемлющей изотопии в слое $\{0 \leq z \leq 1\}$, которая неподвижна на его границе $\{z = 0\} \cup \{z = 1\}$ и при которой выполняется условие 3). Сингулярные связки можно представлять с помощью плоских диаграмм аналогично сингулярным узлам (рис. 4). Можно построить *произведение* сингулярных связок $\Gamma_1 \Gamma_2$, если приклеить верхний луч связки Γ_2 к нижнему лучу связки Γ_1 . Тогда изотопические классы сингулярных связок образуют полугруппу ST . *Единица* полугруппы ST — это сингулярная связка, состоящая из вертикальных отрезков. Введем сингулярные связки ξ_k , η_k , σ_k , σ_k^{-1} , τ_k ($k \in \mathbb{N}$):

Рис. 4. Образующие сингулярных связок

Следующая лемма переносит результаты работы [21] с классического случая на наш.

ЛЕММА 1. *Полугруппа ST сингулярных связок задается образующими ξ_k , η_k , σ_k , σ_k^{-1} , τ_k , $k \in \mathbb{N}$ (рис. 4), и следующими соотношениями, в которых считается, что $k, l \in \mathbb{N}$:*

$$\xi_k \xi_l = \xi_{l+2} \xi_k, \quad \xi_k \eta_l = \eta_{l+2} \xi_k, \quad \xi_k \sigma_l = \sigma_{l+2} \xi_k, \quad \xi_k \tau_l = \tau_{l+2} \xi_k \quad (l \geq k), \quad (11)$$

$$\eta_k \xi_l = \xi_{l-2} \eta_k, \quad \eta_k \eta_l = \eta_{l-2} \eta_k, \quad \eta_k \sigma_l = \sigma_{l-2} \eta_k, \quad \eta_k \tau_l = \tau_{l-2} \eta_k \quad (l \geq k+2), \quad (12)$$

$$\sigma_k \xi_l = \xi_l \sigma_k, \quad \sigma_k \eta_l = \eta_l \sigma_k, \quad \sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k, \quad \sigma_k \tau_l = \tau_l \sigma_k \quad (l \geq k+2), \quad (13)$$

$$\tau_k \xi_l = \xi_l \tau_k, \quad \tau_k \eta_l = \eta_l \tau_k, \quad \tau_k \sigma_l = \sigma_l \tau_k, \quad \tau_k \tau_l = \tau_l \tau_k \quad (l \geq k+2), \quad (14)$$

$$\eta_{k+1} \xi_k = 1 = \eta_k \xi_{k+1}, \quad (15)$$

$$\eta_{k+2} \sigma_{k+1} \xi_k = \sigma_k^{-1} = \eta_k \sigma_{k+1} \xi_{k+2}, \quad (16)$$

$$\eta_{k+2} \tau_{k+1} \xi_k = \tau_k = \eta_k \tau_{k+1} \xi_{k+2}, \quad (17)$$

$$\eta_k \sigma_k = \eta_k, \quad \sigma_k \xi_k = \xi_k, \quad (18)$$

$$\sigma_k \sigma_k^{-1} = 1 = \sigma_k^{-1} \sigma_k, \quad (19)$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad (20)$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \tau_k = \tau_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad (21)$$

$$\tau_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \tau_{k+1}, \quad (22)$$

$$\sigma_k \tau_k = \tau_k \sigma_k. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что мы работаем в кусочно-линейной категории. Это означает, что данная сингулярная связка в слое $\{0 \leq z \leq 1\}$ состоит из конечных ломаных. Локальные минимумы и максимумы функции высоты на компонентах сингулярной связки будем называть *экстремальными* точками. Назовем *особенностями* диаграммы связки все ее 4-валентные вершины, перекрестки и экстремальные точки. Скажем, что сингулярная связка находится в *общем положении*, если для ее диаграммы выполнены следующие условия:

- 1) множество особенностей диаграммы конечно;
- 2) перекрестки не являются экстремальными точками;
- 3) из каждой 4-валентной вершины две дуги идут вверх, а две — вниз;
- 4) каждая горизонтальная прямая (параллельная оси Ox) содержит не более одной особенности.

Очевидно, что любую связку малым шевелением можно привести в общее положение. Тогда диаграмма связки разбивается горизонтальными прямыми на полосы, каждая из которых содержит только одну особенность. Перебирая все особенности нашей связки сверху вниз по одной, выпишем соответствующие образующие, изображенные на рис. 4, слева направо. А именно, образующие ξ_k и η_k представляют экстремальные точки, σ_k и σ_k^{-1} — перекрестки и τ_k — 4-валентную вершину. Осталось доказать, что любая изотопия сингулярных связок разлагается на «элементарные изотопии», отвечающие соотношениям (11)–(23). Из теоремы Райдемайстера [15] и соображений общего положения следует, что любая изотопия сингулярных связок общего положения реализуется такими преобразованиями:

- 1) изотопия в классе диаграмм общего положения;
- 2) изотопия, переставляющая две особенности по высоте;
- 3) рождение или уничтожение пары соседних экстремальных точек;
- 4) изотопия перекрестка или 4-валентной вершины в окрестности экстремальной точки;
- 5) движения Райдемайстера $R1$ – $R5$ (рис. 1).

Изотопия 1-го типа не меняет построенного слова от образующих ξ_k , η_k , σ_k , σ_k^{-1} , τ_k , $k \in \mathbb{N}$. Изотопии 2-го типа описываются соотношениями (11)–(14), изотопии 3-го типа — соотношениями (15). В [21, доказательство леммы 3.4] показано, что в гладкой категории все изотопические перемещения перекрестка в окрестности экстремальной точки разлагаются чисто геометрически на соотношения вида (16). Точно также и в нашем кусочно-линейном случае для реализации изотопических перемещений 4-валентной вершины в окрестности экстремальной точки достаточно соотношений (17). Наконец, движениям Райдемайстера $R1$ – $R5$ отвечают соотношения (18)–(23) соответственно. $\square$

3.2. Трехстраничные сингулярные связки. Понятие трехстраничной сингулярной связки понадобится нам для доказательства теорем 2 и 3. Рассмотрим три луча в одной горизонтальной плоскости $\{z = 0\}$ с общим концом. Пусть, например,

$$T = \{x \geq 0, y = z = 0\} \cup \{y \geq 0, x = z = 0\} \cup \{x \leq 0, y = z = 0\} \subset \{z = 0\}.$$

Отметим на лучах целые точки $\{(j, 0, 0), (0, k, 0), (-l, 0, 0) \mid j, k, l \in \mathbb{N}\}$. Пусть I — отрезок, соединяющий точки $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Положим

$$P_0 = \{x \geq 0, y = z = 0\} \times I, \quad P_1 = \{y \geq 0, x = z = 0\} \times I, \\ P_2 = \{x \leq 0, y = z = 0\} \times I.$$

Формально здесь P_i (где $i \in \mathbb{Z}_3$) — не полуплоскость, а полоса $I \times \mathbb{R}$, которую мы будем называть *страницей*. Книжка $\mathbb{Y}$ из разд. 2.1 является внутренностью множества $T \times I$, т. е. в разд. 2 рассматривались вложения $K \subset T \times I$, для которых узел K не пересекается с граничными лучами. Пусть Γ — произвольный несвязный неориентированный бесконечный граф с вершинами валентности

1, 2 и 4. *Трехстраничная сингулярная связка* — это вложение графа Γ в книжку $T \times I$, такое, что (рис. 5):

1) множество 1-валентных вершин графа Γ совпадает с множеством отмеченных точек

$$\{(j, 0, 0), (j, 0, 1), (0, k, 0), (0, k, 1), (-l, 0, 0), (-l, 0, 1) \mid j, k, l \in \mathbb{N}\};$$

2) все 4-валентные вершины графа Γ лежат на отрезке I ;

3) *конечность*: пересечение $\Gamma \cap I = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — конечное множество точек;

4) две дуги в каждой 2-валентной вершине $A_k \in \Gamma \cap I$ лежат в различных полуплоскостях;

5) окрестность каждой 4-валентной вершины графа Γ лежит в точности в двух страницах из трех: P_0, P_1, P_2 ;

6) *монотонность*: для любого $i \in \mathbb{Z}_3$ ограничение ортогональной проекции $T \times I \rightarrow I \approx [0, 1]$ на каждую компоненту связности пересечения $\Gamma \cap P_i$ является монотонной функцией.

7) для любого $i \in \mathbb{Z}_3$ все связные компоненты графа Γ , лежащие в странице P_i достаточно далеко от начала координат, являются прямолинейными отрезками, параллельными друг другу.

Рис. 5. Трехстраничные сингулярные связки

Как и для сингулярных связок из разд. 3.1, изотопические классы трехстраничных связок в слое $\{0 \leq z \leq 1\}$ образуют полугруппу. Любую трехстраничную связку можно закодировать словом в алфавите $\mathbb{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, i \in \mathbb{Z}_3\}$ (см. рис. 3), в точности как в разд. 2.3. Сейчас мы определим подполугруппу трехстраничных связок, которая изоморфна полугруппе ST , введенной в разд. 3.1. Трехстраничная связка называется *почти сбалансированной*, если соответствующее ей слово в алфавите $\mathbb{A}$ является 1-сбалансированным и 2-сбалансированным (см. разд. 2.4). Отметим, что у i -сбалансированных трехстраничных связок все отрезки, соединяющие отмеченные точки в странице P_i , можно считать вертикальными. Обозначим через BT полугруппу, которую образуют почти сбалансированные связки. Зададим отображение $\varphi: ST \rightarrow BT$ на образующих следующим образом, где $k \in \mathbb{N}$ (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_k) &= d_2^k c_2 b_2^{k-1}, & \varphi(\eta_k) &= d_2^{k-1} a_2 b_2^k, & \varphi(\sigma_k) &= d_2^{k-1} b_1 d_2 d_1 b_2^k, \\ \varphi(\sigma_k^{-1}) &= d_2^k b_1 b_2 d_1 b_2^{k-1}, & \varphi(\tau_k) &= d_2^k x_2 b_2^k. \end{aligned} \quad (24)$$

Каждая связка переходит в соответствующее трехстраничное вложение плюс вертикальные отрезки. Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3 из [11].

ЛЕММА 2. *Отображение $\varphi: ST \rightarrow BT$ корректно определено и является изоморфизмом полугрупп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что при отображении $\varphi: ST \rightarrow BT$ изотопные связки переходят в изотопные. Действительно, связки из обеих полугрупп ST и BT по определению рассматриваются с точностью до изотопии в слое $\{0 < z < 1\}$. Отсюда же следует инъективность отображения φ . Теперь построим обратное отображение $\psi: BT \rightarrow ST$. Сопоставим каждой почти сбалансированной трехстраничной связке $\Gamma \in BT$ некоторую сингулярную связку $\psi(\Gamma) \in ST$, точнее, ее диаграмму на плоскости. Благодаря свойству почти сбалансированности, отрезки связки Γ , соединяющие отмеченные точки в страницах P_1 и P_2 , можно считать вертикальными. Выбросив из связки Γ все эти вертикальные отрезки, мы получим сингулярную связку $\psi(\Gamma) \in ST$ в смысле разд. 3.1. Очевидно, что композиция $\psi \circ \varphi: ST \rightarrow ST$ тождественна на образующих (см. рис. 5). Поэтому отображения φ и ψ взаимно обратны. $\square$

3.3. Классификация трехстраничных сингулярных связок. Через $\varphi(11) - \varphi(23)$ обозначим соотношения между словами в алфавите $\mathbb{A}$, которые получаются из соотношений (11)–(23) полугруппы ST при изоморфизме $\varphi: ST \rightarrow BT$ (лемма 2). Следующая лемма будет доказана в разд. 4.3.

ЛЕММА 3. *Соотношения $\varphi(11) - \varphi(23)$ являются следствием соотношений (1)–(10) полугруппы SK .*

Теорема 2 является частным случаем следующей классификационной теоремы для трехстраничных сингулярных связок, которую мы доказываем аналогично теореме 1 из [11].

ТЕОРЕМА 4. *Полугруппа изотопических классов трехстраничных сингулярных связок изоморфна полугруппе SK .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В разд. 3.2 уже отмечалось, что каждой трехстраничной сингулярной связке можно сопоставить слово в алфавите $\mathbb{A}$, а тогда и элемент полугруппы SK . Обратно, любой элемент полугруппы SK легко достроить до трехстраничной связки, добавив три семейства параллельных отрезков в каждой из страниц P_i , $i \in \mathbb{Z}_3$. Например, на рис. 5 изображены трехстраничные связки, которые отвечают следующим элементам из SK : d_2c_2 , a_2b_2 , $b_1d_2d_1b_2$, $d_2x_2b_2$. Соотношения (1)–(10) полугруппы SK реализуются объемлющей изотопией в слое $\{0 < z < 1\}$.

Поэтому осталось доказать только, что любую изотопию трехстраничной сингулярной связки можно разложить на «элементарные изотопии», отвечающие соотношениям (1)–(10) полугруппы SK . Это достаточно сделать лишь для почти сбалансированных трехстраничных связок. Действительно, пусть для данной связки, задаваемой словом $w \in W$, n_1 и m_1 (соответственно n_2 и m_2) — максимальные номера точек на лучах $P_1 \cap \{z = 0\}$ и $P_1 \cap \{z = 1\}$ (соответственно на лучах $P_2 \cap \{z = 0\}$ и $P_2 \cap \{z = 1\}$), которые соединяются дугами с точками на отрезке I . Например, для связки $w = a_0$ получится $n_1 = n_2 = 0$, $m_1 = m_2 = 1$. Для всех почти сбалансированных связок (например, см. рис. 5) имеем $n_1 = m_1 = n_2 = m_2 = 0$. Тогда слово $b_1^{n_2} d_2^{n_1} w b_2^{m_1} d_1^{m_2}$ является почти сбалансированным. В силу обратимости образующих b_i , d_i такое преобразование и его обратное эквивалентные слова переводят в эквивалентные.

По лемме 2 каждому почти сбалансированному слову можно сопоставить сингулярную связку в смысле разд. 3.1. А для таких связок любая изотопия

уже разложена на «элементарные изотопии», отвечающие соотношениям $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ (см. леммы 1 и 2). Таким образом, лемма 3 заканчивает доказательство теоремы 4. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 3. Далее будем отождествлять произвольную трехстраничную сингулярную связку с соответствующим элементом подгруппы SK . Трехстраничная связка называется *узловой*, если она содержит какой-то сингулярный узел около оси α , а остаток состоит только из вертикальных отрезков. Очевидно, узловые сингулярные связки соответствуют сбалансированным словам из $W_b \subset W$.

ЛЕММА 4. *Элемент $w \in SK$ задает узловую трехстраничную сингулярную связку тогда и только тогда, когда элемент w центральный в подгруппе SK .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть «только тогда» геометрически очевидна: сингулярный узел можно переместить изотопией в любое место связки, т. е. узловой элемент коммутирует с остальными по теореме 4. Пусть w — центральный элемент в подгруппе SK . Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем $b_i^k d_i^k w = w b_i^k d_i^k$. Обозначим через m (соответственно n) число дуг трехстраничной связки w , уходящих в странице P_{i-1} влево (соответственно вправо) на границу. Тогда для достаточно большого k число дуг трехстраничной связки $b_i^k d_i^k w$, уходящих в странице P_{i-1} влево на границу, равно k , а для связки $w b_i^k d_i^k$ равно $m + k - n$, т. е. $m = n$. Следовательно, для достаточно большого $l \in \mathbb{N}$ и любого $j = i - 1 \in \mathbb{Z}_3$ слово $a_0^l a_1^l w c_1^l c_0^l$ является j -сбалансированным, т. е. это слово сбалансированно. Поскольку элемент w центральный, то слово $w a_0^l a_1^l c_1^l c_0^l$ также сбалансированно. Отсюда геометрически очевидно, что элемент w задает узловую связку. $\square$

Теорема 3 следует из леммы 4.

3.5. Классификация шарнирных 4-валентных графов. Задача изотопической классификации таких графов рассматривалась в работе [16]. Метод Дынникова позволяет решить ее аналогично случаю сингулярных узлов. Введем подгруппу FG , которая имеет те же образующие и соотношения, что и подгруппа SK , только соотношение (6) мы заменяем на

$$x_i(d_{i+1}d_id_{i-1}) = x_i. \quad (6')$$

Тогда подгруппа FG имеет 15 образующих и 84 соотношения.

ТЕОРЕМА 5. *Центр подгруппы FG классифицирует все неориентированные шарнирные 4-валентные графы в $\mathbb{R}^3$ с точностью до обхватывающей изотопии.*

Теорема 5 доказывается дословно, как теоремы 1–3, с заменой соотношения (6) на (6') и соотношения (23) в лемме 1 на следующее соотношение:

$$\sigma_k \tau_k = \tau_k. \quad (23')$$

§ 4. Доказательство леммы 3

В предложении 1 выводятся новые эквивалентности слов из соотношений (1)–(10) подгруппы SK . В разд. 4.2, используя предложения 1–3, мы докажем лемму 5 о разложении произвольного i -сбалансированного слова. Лемма 5 и

предложение 6 позволяют редуцировать бесконечное число соотношений $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ к конечному числу соотношений (1)–(10). Доказательство леммы 3 завершается в разд. 4.3 с помощью предложений 5 и 6. Все соотношения выводятся формальным образом, но имеют геометрическую интерпретацию (рис. 3).

4.1. Следствия из соотношений (1)–(10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Соотношения (1)–(10) влекут за собой следующие эквивалентности слов (всюду считается, что $i \in \mathbb{Z}_3$ и $w_i \in \mathbb{B}_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}b_id_{i-1}, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$):*

$$\begin{aligned} b_i \sim d_{i+1}d_{i-1}, \quad \text{или} \quad b_{i+1} \sim d_{i-1}d_i, \quad b_{i-1} \sim d_id_{i+1}, \\ \text{или} \quad b_0 \sim d_1d_2, \quad b_1 \sim d_2d_0, \quad b_2 \sim d_0d_1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} d_i \sim b_{i-1}b_{i+1}, \quad \text{или} \quad d_{i-1} \sim b_{i+1}b_i, \quad d_{i+1} \sim b_ib_{i-1}, \\ \text{или} \quad d_0 \sim b_2b_1, \quad d_1 \sim b_0b_2, \quad d_2 \sim b_1b_0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$d_{i+1}b_{i-1} \sim b_{i-1}d_{i+1}t_i, \quad b_{i+1}d_{i-1} \sim t_id_{i-1}b_{i+1}, \quad \text{где } t_i = b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}, \quad (27)$$

$$a_i \sim a_{i-1}b_{i+1}, \quad c_i \sim d_{i+1}c_{i-1}, \quad (28)$$

$$a_ib_i \sim a_{i-1}d_{i-1}, \quad d_ic_i \sim b_{i-1}c_{i-1}, \quad (29)$$

$$b_i \sim a_ib_ic_i, \quad d_i \sim a_id_ic_i, \quad (30)$$

$$b_{i-1}x_{i+1}d_{i-1} \sim x_i, \quad (31)$$

$$b_ix_id_i \sim d_{i+1}x_{i+1}b_{i+1}, \quad (32)$$

$$(d_ic_i)w_{i+1} \sim w_{i+1}(d_ic_i), \quad (33)$$

$$(b_ic_i)w_{i-1} \sim w_{i-1}(b_ic_i), \quad (34)$$

$$(a_ib_i)w_{i+1} \sim w_{i+1}(a_ib_i), \quad (35)$$

$$(a_id_i)w_{i-1} \sim w_{i-1}(a_id_i), \quad (36)$$

$$t_iw_i \sim w_it_i, \quad t'_iw_i \sim w_it'_i, \quad \text{где } t_i = b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}, \quad t'_i = d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}, \quad (37)$$

$$(d_ix_ib_i)w_{i+1} \sim w_{i+1}(d_ix_ib_i), \quad (38)$$

$$(b_ix_id_i)w_{i-1} \sim w_{i-1}(b_ix_id_i), \quad (39)$$

$$d_{i+1}b_{i-1}w_id_{i-1}b_{i+1} \sim b_{i-1}d_{i+1}w_ib_{i+1}d_{i-1}, \quad (40)$$

$$b_{i-1}^2a_id_{i-1}^2 \sim (b_{i-1}a_id_{i-1})d_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})b_i, \quad (41)$$

$$b_{i-1}^2c_id_{i-1}^2 \sim d_i(b_{i-1}d_id_{i-1})b_i^2(b_{i-1}c_id_{i-1}), \quad (42)$$

$$b_{i-1}^2b_id_{i-1}^2 \sim (b_{i-1}b_id_{i-1})d_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})b_i, \quad (43)$$

$$b_{i-1}^2d_id_{i-1}^2 \sim d_i(b_{i-1}d_id_{i-1})b_i^2(b_{i-1}d_id_{i-1}), \quad (44)$$

$$b_{i-1}^2x_id_{i-1}^2 \sim (b_{i-1}^2b_id_{i-1}^2)(b_{i-1}d_id_{i-1})d_i^2x_ib_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})(b_{i-1}^2d_id_{i-1}^2). \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что эквивалентности (25)–(27) легко следуют из (3)–(4). Согласно (4), имеем $d_i \sim b_i^{-1}$, $b_{i-1}b_id_{i-1} \sim (b_{i-1}d_id_{i-1})^{-1}$ и $t'_i \sim t_i^{-1}$. Тогда (35), (37), (38) сразу вытекают из (8), (9), (10) соответственно. Остальные эквивалентности мы будем доказывать последовательно, применяя уже доказанные ранее. Напомним, что $i \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, т.е. в группе $\mathbb{Z}_3$ имеем $(i+1)+1 = i-1$ и $(i-1)-1 = i+1$.

$$\begin{aligned}
(28): & a_{i-1}b_{i+1} \stackrel{(1)}{\sim} (a_id_{i+1})b_{i+1} \stackrel{(4)}{\sim} a_i, \quad d_{i+1}c_{i-1} \stackrel{(1)}{\sim} d_{i+1}(b_{i+1}c_i) \stackrel{(4)}{\sim} c_i, \\
(29): & a_ib_i \stackrel{(28)}{\sim} (a_{i-1}b_{i+1})b_i \stackrel{(26)}{\sim} a_{i-1}d_{i-1}, \quad d_ic_i \stackrel{(26)}{\sim} (b_{i-1}b_{i+1})c_i \stackrel{(1)}{\sim} b_{i-1}c_{i-1}, \\
(30): & a_ib_ic_i \stackrel{(29)}{\sim} a_i(d_{i+1}c_{i+1}) \stackrel{(1)}{\sim} a_{i-1}c_{i+1} \stackrel{(1)}{\sim} b_i, \quad a_id_ic_i \stackrel{(29)}{\sim} a_i(b_{i-1}c_{i-1}) \stackrel{(28)}{\sim} a_{i+1}c_{i-1} \\
& \stackrel{(1)}{\sim} d_i, \\
(31): & b_{i-1}x_{i+1}d_{i-1} \stackrel{(2)}{\sim} b_{i-1}(d_{i-1}x_ib_{i-1})d_{i-1} \stackrel{(4)}{\sim} x_i, \\
(32): & b_ix_id_i \stackrel{(31)}{\sim} b_i(b_{i-1}x_{i+1}d_{i-1})d_i \stackrel{(25),(26)}{\sim} d_{i+1}x_{i+1}b_{i+1}.
\end{aligned}$$

Ниже при доказательстве соотношений (33) сначала мы коммутируем b_{i+1} с d_ic_i , а потом используем это соотношение для коммутирования a_{i+1} с d_ic_i .

$$\begin{aligned}
(33b): & b_{i+1}(d_ic_i) \stackrel{(30)}{\sim} (a_{i+1}b_{i+1}c_{i+1})(d_ic_i) \stackrel{(7)}{\sim} a_{i+1}b_{i+1}(d_ic_i)c_{i+1} \\
& \stackrel{(26)}{\sim} a_{i+1}b_{i+1}(b_{i-1}b_{i+1})c_ic_{i+1} \stackrel{(1)}{\sim} (a_{i+1}b_{i+1})b_{i-1}c_{i-1}c_{i+1} \\
& \stackrel{(8)}{\sim} b_{i-1}c_{i-1}(a_{i+1}b_{i+1})c_{i+1} \stackrel{(30)}{\sim} b_{i-1}c_{i-1}b_{i+1} \stackrel{(1)}{\sim} b_{i-1}(b_{i+1}c_i)b_{i+1} \stackrel{(26)}{\sim} (d_ic_i)b_{i+1}, \\
(33a): & a_{i+1}(d_ic_i) \stackrel{(1)}{\sim} (a_{i-1}d_i)(d_ic_i) \stackrel{(26)}{\sim} a_{i-1}(b_{i-1}b_{i+1})(d_ic_i) \stackrel{(33b)}{\sim} a_{i-1}b_{i-1}(d_ic_i)b_{i+1} \\
& \stackrel{(35)}{\sim} (d_ic_i)(a_{i-1}b_{i-1})b_{i+1} \stackrel{(26)}{\sim} (d_ic_i)(a_{i-1}d_i) \stackrel{(1)}{\sim} (d_ic_i)a_{i+1}.
\end{aligned}$$

Остальные эквивалентности в (33) следуют из (33a), (33b) и (7). Эквивалентности (34), (36), (39) вытекают соответственно из (29) и (33), (29) и (35), (32) и (38). Последние вычисления тривиальны:

$$\begin{aligned}
(40): & d_{i+1}b_{i-1}w_id_{i-1}b_{i+1} \stackrel{(27)}{\sim} (b_{i-1}d_{i+1}t_i)w_id_{i-1}b_{i+1} \stackrel{(37)}{\sim} b_{i-1}d_{i+1}(w_it_i)d_{i-1}b_{i+1} \stackrel{(27)}{\sim} \\
& b_{i-1}d_{i+1}w_ib_{i+1}d_{i-1}, \\
(41): & b_{i-1}^2a_id_{i-1}^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1}^2a_i(d_ib_i)d_{i-1}^2 \stackrel{(36)}{\sim} b_{i-1}(a_id_i)(b_{i-1}b_i)d_{i-1}^2 \\
& \stackrel{(26)}{\sim} b_{i-1}a_id_i(b_{i-1}b_i)d_{i-1}(b_{i+1}b_i) \stackrel{(37)}{\sim} b_{i-1}a_ib_{i+1}(d_ib_{i-1}b_id_{i-1})b_i \\
& \stackrel{(25)}{\sim} (b_{i-1}a_id_{i-1})d_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})b_i, \\
(42): & b_{i-1}^2b_id_{i-1}^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1}(b_id_i)b_{i-1}b_id_{i-1}^2 \stackrel{(26)}{\sim} b_{i-1}b_i(d_ib_{i-1}b_id_{i-1})(b_{i+1}b_i) \\
& \stackrel{(37)}{\sim} b_{i-1}b_ib_{i+1}(d_ib_{i-1}b_id_{i-1})b_i \stackrel{(25)}{\sim} (b_{i-1}b_id_{i-1})d_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})b_i, \\
(43): & b_{i-1}^2c_id_{i-1}^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1}^2(d_ib_i)c_id_{i-1}^2 \stackrel{(34)}{\sim} b_{i-1}^2d_id_{i-1}(b_ic_i)d_{i-1} \\
& \stackrel{(25)}{\sim} (d_id_{i+1})(b_{i-1}d_id_{i-1}b_i)c_id_{i-1} \stackrel{(37)}{\sim} d_i(b_{i-1}d_id_{i-1}b_i)d_{i+1}c_id_{i-1} \\
& \stackrel{(26)}{\sim} d_i(b_{i-1}d_id_{i-1})b_i^2(b_{i-1}c_id_{i-1}), \\
(44): & b_{i-1}^2d_id_{i-1}^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1}^2d_id_{i-1}(b_id_i)d_{i-1} \stackrel{(25)}{\sim} (d_id_{i+1})b_{i-1}d_id_{i-1}b_id_id_{i-1} \\
& \stackrel{(37)}{\sim} d_i(b_{i-1}d_id_{i-1}b_i)d_{i+1}d_id_{i-1} \stackrel{(26)}{\sim} d_i(b_{i-1}d_id_{i-1})b_i^2(b_{i-1}d_id_{i-1}), \\
(45): & b_{i-1}^2x_id_{i-1}^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1}^2(b_id_i)x_i(b_ib_{i+1}d_{i+1}^2d_id_i)d_{i-1}^2 \stackrel{(10)}{\sim} b_{i-1}^2b_ib_{i+1}^2(d_ix_ib_i)d_{i+1}^2d_id_{i-1}^2 \\
& \stackrel{(25),(26)}{\sim} b_{i-1}^2b_i(d_{i-1}d_i)^2d_ix_ib_i(b_ib_{i-1})^2d_id_{i-1}^2 \\
& \stackrel{(4)}{\sim} (b_{i-1}^2b_id_{i-1}^2)(b_{i-1}d_id_{i-1})d_i^2x_ib_i^2(b_{i-1}b_id_{i-1})(b_{i-1}^2d_id_{i-1}^2). \quad \square
\end{aligned}$$

4.2. Разложение i -сбалансированных слов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого $i \in \mathbb{Z}_3$ произвольное i -сбалансированное слово эквивалентно некоторому i -сбалансированному слову, содержащему только буквы $a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, b_{i-1}, d_{i-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следующие подстановки, можно устранить остальные буквы:

$$\begin{aligned} a_{i-1} &\stackrel{(1)}{\sim} a_i d_{i+1}, & a_{i+1} &\stackrel{(28)}{\sim} a_i b_{i-1}, & c_{i-1} &\stackrel{(1)}{\sim} b_{i+1} c_i, & c_{i+1} &\stackrel{(28)}{\sim} d_{i-1} c_i, \\ b_{i+1} &\stackrel{(25)}{\sim} d_{i-1} d_i, & d_{i+1} &\stackrel{(26)}{\sim} b_i b_{i-1}, & x_{i-1} &\stackrel{(2)}{\sim} d_i x_{i+1} b_i, & x_{i+1} &\stackrel{(2)}{\sim} d_{i-1} x_i b_{i-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Зафиксируем в дальнейшем индекс $i \in \mathbb{Z}_3$. Пусть w есть i -сбалансированное слово из букв $a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, b_{i-1}, d_{i-1}$. Рассмотрим замену $\mu: a_i, b_i, c_i, d_i, x_{m,i} \rightarrow \bullet, b_{i-1} \rightarrow (, d_{i-1} \rightarrow)$. Через $\mu(w)$ обозначим полученный код, состоящий из скобок и кружков. Поскольку данное слово w является i -сбалансированным, то код $\mu(w)$ (без кружков) есть сбалансированное скобочное выражение. Для каждого места k обозначим через $\text{dif}(k)$ разность между числом левых и правых скобок в подслове $\mu(w)$, оканчивающемся в этом месте. Максимум чисел $\text{dif}(k)$ по всем k назовем *глубиной* $d(w)$. Например, слово $w = b_{i-1}^2 a_i d_{i-1}^2$ имеет код $\mu(w) = ((\bullet))$ и глубину $d(w) = 2$.

Звездой глубины k называется код вида $(\bullet \bullet)^k$, у которого k пар скобок. Кружок является звездой глубины 0. Если для слова w его код $\mu(w)$ разлагается на несколько звезд, то w называется *звездно разложимым*. В этом случае глубина $d(w)$ есть максимум среди глубин всех звезд, входящих в разложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каждое i -сбалансированное слово w эквивалентно звездно разложимому слову w' той же глубины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим начало кода $\mu(w)$. После нескольких начальных левых скобок код $\mu(w)$ содержит или правую скобку, или кружок. В первом случае удалим пару скобок $()$ по правилу $b_{i-1} d_{i-1} \stackrel{(4)}{\sim} \emptyset$. Следовательно, можно предполагать, что следующим символом после k последовательных левых скобок является кружок. Поскольку $\mu(w)$ сбалансированно, то после этого кружка может последовательно стоять $j, 0 \leq j \leq k$, правых скобок. Если $j < k$, то вставим в w в это место после последней правой скобки подслово $d_{i-1}^{k-j} b_{i-1}^{k-j} \stackrel{(4)}{\sim} \emptyset$. Эта операция не меняет глубину $d(w)$. Тогда для получившегося слова w_1 код $\mu(w_1)$ содержит в начале звезду глубины k . Продолжая этот процесс, за конечное число шагов получим звездно разложимое слово w_N той же глубины $d(w_N) = d(w)$. $\square$

Для произвольной буквы s через s' будем обозначать слово $b_{i-1} s d_{i-1}$, например, $a'_i = b_{i-1} a_i d_{i-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Каждое звездно разложимое слово w эквивалентно некоторому слову, разложенному на следующие i -сбалансированные подслова: $a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, a'_i, b'_i, c'_i, d'_i, x'_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по глубине $d(w)$. Случай $d(w) = 1$ тривиален. Пусть код $\mu(w)$ содержит звезду глубины $k \geq 2$. Применим одно из следующих преобразований к каждой такой звезде:

$$\begin{aligned} u &= b_{i-1}^2 a_i d_{i-1}^2 \stackrel{(41)}{\sim} a'_i d_i^2 b'_i b_i = v, & \text{т. е. } \mu(u) = ((\bullet)) &\rightarrow \mu(v) = (\bullet) \bullet \bullet (\bullet) \bullet, \\ u &= b_{i-1}^2 b_i d_{i-1}^2 \stackrel{(42)}{\sim} b'_i d_i^2 b'_i b_i = v, & \text{т. е. } \mu(u) = ((\bullet)) &\rightarrow \mu(v) = (\bullet) \bullet \bullet (\bullet) \bullet, \\ u &= b_{i-1}^2 c_i d_{i-1}^2 \stackrel{(43)}{\sim} d_i d_i^2 b_i^2 c'_i = v, & \text{т. е. } \mu(u) = ((\bullet)) &\rightarrow \mu(v) = \bullet (\bullet) \bullet \bullet (\bullet), \end{aligned}$$

$$u = b_{i-1}^2 d_i d_{i-1}^{(44)} \sim d_i d'_i b_i^2 d'_i = v, \quad \text{т. е. } \mu(u) = ((\bullet)) \rightarrow \mu(v) = \bullet(\bullet) \bullet \bullet(\bullet),$$

$$u = b_{i-1}^2 x_i d_{i-1}^{(45)} \sim (b_{i-1}^2 b_i d_{i-1}^2)(b_{i-1} d_i d_{i-1}) d_i^2 x_i b_i^2 (b_{i-1} b_i d_{i-1})(b_{i-1}^2 d_i d_{i-1}^2) \\ \stackrel{(43,44)}{\sim} (b'_i d'_i b'_i b_i) d'_i d_i^2 x_i b_i^2 b'_i (d_i d'_i b_i^2 d'_i) = v, \quad \text{т. е. } \mu(u) = ((\bullet)) \rightarrow \mu(v) \\ = (\bullet) \bullet \bullet(\bullet) \bullet (\bullet) \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet (\bullet) \bullet (\bullet) \bullet \bullet(\bullet).$$

Мы получаем слово $w_1 \sim w$, которое, согласно предложению 3, эквивалентно звездно разложимому слову w_2 глубины $d(w_2) = d(w) - 1$. Это завершает шаг индукции. $\square$

ЛЕММА 5. Для каждого $i \in \mathbb{Z}_3$ произвольное i -сбалансированное слово эквивалентно некоторому слову, которое разлагается на i -сбалансированные слова из множества $\mathbb{B}_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, x_i, b_{i-1} b_i d_{i-1}, b_{i-1} d_i d_{i-1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря предложениям 3 и 4 осталось устранить только следующие слова:

$$a'_i = b_{i-1} a_i d_{i-1} \stackrel{(25)}{\sim} (d_i d_{i+1}) a_i d_{i-1} \stackrel{(4)}{\sim} d_i d_{i+1} a_i (b_i d_i) d_{i-1} \stackrel{(35)}{\sim} d_i (a_i b_i) d_{i+1} d_i d_{i-1} \\ \stackrel{(26)}{\sim} d_i a_i b_i^2 (b_{i-1} d_i d_{i-1}), \\ c'_i = b_{i-1} c_i d_{i-1} \stackrel{(26)}{\sim} b_{i-1} c_i (b_{i+1} b_i) \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1} (b_i d_i c_i) b_{i+1} b_i \stackrel{(33)}{\sim} b_{i-1} b_i b_{i+1} (d_i c_i) b_i \\ \stackrel{(25)}{\sim} (b_{i-1} b_i d_{i-1}) d_i^2 c_i b_i, \\ x'_i = b_{i-1} x_i d_{i-1} \stackrel{(4)}{\sim} b_{i-1} (b_i b_{i+1} d_{i+1} d_i) x_i (b_i d_i) d_{i-1} \stackrel{(38)}{\sim} b_{i-1} b_i b_{i+1} (d_i x_i b_i) d_{i+1} d_i d_{i-1} \\ \stackrel{(25)}{\sim} (b_{i-1} b_i d_{i-1}) d_i^2 x_i b_i d_{i+1} d_i d_{i-1} \stackrel{(26)}{\sim} (b_{i-1} b_i d_{i-1}) d_i^2 x_i b_i^2 (b_{i-1} d_i d_{i-1}). \quad \square$$

Обозначим через (33')–(40') соотношения (33)–(40), в которых считается, что $w_i \in W_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Справедливы обобщенные эквивалентности (33')–(40'), т. е. они выполняются для произвольных i -сбалансированных слов $w_i \in W_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 каждое i -сбалансированное слово из W_i разлагается на элементарные слова из $\mathbb{B}_i$. Так как эквивалентности (33)–(40) выполняются для слов из $\mathbb{B}_i$, они выполняются и для слов из W_i . Отметим, что имеется бесконечно много новых эквивалентностей (33')–(40'). $\square$

4.3. Вывод соотношений $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ из соотношений (1)–(10) подгруппы SK . Для каждого $l \geq 1$ через u_l обозначим произвольный символ из множества образующих $\{\xi_l, \eta_l, \sigma_l, \sigma_l^{-1}, \tau_l\}$ полугруппы ST сингулярных связок. Определим отображения сдвига $\theta_k: ST \rightarrow ST$ и $\rho_k: BT \rightarrow BT$ по формулам $\theta_k(u_l) = u_{k+l}$ и $\rho_k(w) = d_2^k w b_2^k$. Легко видеть, что сдвиг $\theta_k: ST \rightarrow ST$ является корректно определенным гомоморфизмом. Действительно, любое соотношение из (11)–(23) при $k > 1$ получается применением сдвига θ_{k-1} к соответствующему соотношению при $k = 1$. Например, соотношение $\xi_k \xi_l = \xi_{l+2} \xi_k$ получается из $\xi_1 \xi_{l-k+1} = \xi_{l-k+3} \xi_1$ под действием сдвига θ_{k-1} . Согласно соотношениям (4),

сдвиг ρ_k переводит эквивалентные слова в эквивалентные, т. е. ρ_k — тоже гомоморфизм. Кроме того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} ST & \xrightarrow{\theta_k} & ST \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ BT & \xrightarrow{\rho_k} & BT \end{array}$$

коммутативна, откуда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого $k \in \mathbb{N}$ все соотношения $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ выводятся из соотношений $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ при $k = 1$ с помощью эквивалентностей $b_2 d_2 \sim 1 \sim d_2 b_2$ из (4). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Здесь выводятся соотношения $\varphi(11)$ – $\varphi(23)$ подгруппы BT в алфавите $\mathbb{A}$ из соотношений (1)–(10), (25)–(40). Будем использовать обобщенные эквивалентности (33')–(40') из предложения 5. Следующие образы при отображении φ при $k = 1$ обозначим звездочкой $\star$:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1) &= d_2 c_2, & \varphi(\eta_1) &= a_2 b_2, & \varphi(\sigma_1) &= b_1 d_2 d_1 b_2, \\ \varphi(\sigma_1^{-1}) &= d_2 b_1 b_2 d_1, & \varphi(\tau_1) &= d_2 x_2 b_2. \end{aligned} \quad (24')$$

Тогда по формулам (24) имеем $\varphi(u_l) = d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}$. Отметим, что слова $d_2^l \star b_2^l \in W$ являются 1-сбалансированными и 2-сбалансированными (см. рис. 5). Тогда соотношения $\varphi(11)$ – $\varphi(14)$ доказываются по одной схеме:

$$\begin{aligned} (11): \quad & \varphi(\xi_1 u_l) \stackrel{(24)}{=} (d_2 c_2)(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}) \stackrel{(4)}{\sim} d_2^2(b_2 c_2)(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}) \stackrel{(34')}{\sim} d_2^2(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1})(b_2 c_2) \\ & \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(u_{l+2} \xi_1), \\ (12): \quad & \varphi(\eta_1 u_l) \stackrel{(24)}{=} (a_2 b_2)(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}) \stackrel{(4)}{\sim} (a_2 d_2)(d_2^{l-3} \star b_2^{l-3}) b_2^2 \stackrel{(36')}{\sim} (d_2^{l-3} \star b_2^{l-3})(a_2 d_2) b_2^2 \\ & \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(u_{l-2} \eta_1), \\ (13): \quad & \varphi(\sigma_1 u_l) \stackrel{(24)}{=} (b_1 d_2 d_1 b_2)(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}) \stackrel{(4)}{\sim} (b_1 d_2 d_1)(d_2^{l-2} \star b_2^{l-1}) \\ & \stackrel{(25),(2)}{\sim} d_2^2(b_2 d_0 d_2 b_0)(d_2^{l-3} \star b_2^{l-3}) b_2^2 \stackrel{(37')}{\sim} d_2^2(d_2^{l-3} \star b_2^{l-3})(b_2 d_0 d_2 b_0) b_2^2 \\ & \stackrel{(4),(26)}{\sim} (d_2^{l-1} \star b_2^{l-2})(b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(24)}{=} \varphi(u_l \sigma_1), \\ (14): \quad & \varphi(\tau_1 u_l) \stackrel{(24)}{=} (d_2 x_2 b_2)(d_2^{l-1} \star b_2^{l-1}) \stackrel{(4)}{\sim} d_2^2(b_2 x_2 d_2)(d_2^{l-3} \star b_2^{l-3}) b_2^2 \\ & \stackrel{(39')}{\sim} d_2^2(d_2^{l-3} \star b_2^{l-3})(b_2 x_2 d_2) b_2 \stackrel{(4)}{\sim} (d_2^{l-1} \star b_2^{l-1})(d_2 x_2 b_2) \stackrel{(24)}{=} \varphi(u_l \tau_1). \end{aligned}$$

Остальные вычисления выполняются явно:

$$\begin{aligned} (15): \quad & \varphi(\eta_2 \xi_1) \stackrel{(24)}{=} (d_2 a_2 b_2^2)(d_2 c_2) \stackrel{(4)}{\sim} d_2(a_2 b_2 c_2) \stackrel{(30)}{\sim} d_2 b_2 \stackrel{(4)}{\sim} 1 \stackrel{(4)}{\sim} d_2 b_2 \stackrel{(30)}{\sim} (a_2 d_2 c_2) b_2 \\ & \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\eta_1 \xi_2), \\ (16): \quad & \varphi(\eta_3 \sigma_2 \xi_1) \stackrel{(24),(4)}{\sim} d_2^2 a_2 b_2 (b_2 b_1) d_2 d_1 (b_2 c_2) \stackrel{(26)}{\sim} d_2^2(a_2 b_2) d_0 d_2 d_1 (b_2 c_2) \\ & \stackrel{(35)}{\sim} d_2^2 d_0(a_2 b_2) d_2 d_1 (b_2 c_2) \stackrel{(34)}{\sim} d_2(d_2 d_0)(a_2 b_2) d_2 (b_2 c_2) d_1 \stackrel{(4)}{\sim} d_2(d_2 d_0)(a_2 b_2 c_2) d_1 \\ & \stackrel{(25)}{\sim} d_2 b_1(a_2 b_2 c_2) d_1 \stackrel{(30)}{\sim} d_2 b_1 b_2 d_1 \stackrel{(24)}{=} \varphi(\sigma_1^{-1}), \\ & \varphi(\eta_1 \sigma_2 \xi_3) \stackrel{(4)}{\sim} a_2 b_1 d_2 (d_1 d_2) c_2 b_2^2 \stackrel{(25)}{\sim} a_2 b_1 d_2 (b_0 c_2) b_2^2 \stackrel{(1)}{\sim} (a_0 d_1) b_1 d_2 c_1 b_2^2 \\ & \stackrel{(4)}{\sim} a_0 d_2 (b_1 d_1) c_1 b_2^2 \stackrel{(33)}{\sim} a_0 d_2 b_1 b_2 (d_1 c_1) b_2 \stackrel{(37)}{\sim} (d_2 b_1 b_2 d_1)(a_0 c_1) b_2 \stackrel{(1)}{\sim} d_2 b_1 b_2 d_1 d_2 b_2 \\ & \stackrel{(4)}{\sim} d_2 b_1 b_2 d_1 \stackrel{(24)}{=} \varphi(\sigma_1^{-1}), \end{aligned}$$

- (17): $\varphi(\eta_3\tau_2\xi_1) \stackrel{(24),(4)}{\sim} d_2^2 a_2 b_2 x_2 b_2 c_2 \stackrel{(5)}{\sim} d_2^2 (b_2 x_2 b_2) \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\tau_1) \stackrel{(4)}{\sim} (d_2 x_2 d_2) b_2^2$
 $\stackrel{(5)}{\sim} a_2 d_2 x_2 d_2 c_2 b_2^2 \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\eta_1\tau_2\xi_3),$
- (18): $\varphi(\sigma_1\xi_1) \stackrel{(24)}{=} (b_1 d_2 d_1 b_2)(d_2 c_2) \stackrel{(4)}{\sim} b_1 d_2 (d_1 c_2) \stackrel{(28)}{\sim} b_1 (d_2 c_0) \stackrel{(28)}{\sim} b_1 c_1 \stackrel{(29)}{\sim} a_2 b_2$
 $\stackrel{(24)}{=} \varphi(\xi_1),$
 $\varphi(\eta_1\sigma_1) \stackrel{(4)}{\sim} a_2 (b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(26)}{\sim} (a_2 d_0) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(1)}{\sim} (a_1 d_2) d_1 b_2 \stackrel{(1)}{\sim} (a_0 d_1) b_2$
 $\stackrel{(1)}{\sim} \varphi(\eta_k),$
- (19): $\varphi(\sigma_1\sigma_1^{-1}) \stackrel{(24)}{=} (b_1 d_2 d_1 b_2)(d_2 b_1 b_2 d_1) \stackrel{(4)}{\sim} (b_1 d_2 d_1)(b_1 b_2 d_1) \stackrel{(4)}{\sim} 1$
 $\stackrel{(4)}{\sim} (d_2 b_1 b_2 d_1)(b_1 d_2 d_1 b_2) \stackrel{(24)}{=} \varphi(\sigma_1^{-1}\sigma_1),$
- (20): $\varphi(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) \stackrel{(4)}{\sim} d_2 b_1 d_2 d_1 b_2^2 b_1 d_2^2 d_1 b_2^2 \stackrel{(26)}{\sim} d_2 (b_1 d_2 d_1 b_2) d_0 d_2^2 d_1 b_2^2$
 $\stackrel{(37)}{\sim} d_2 d_0 (b_1 d_2 d_1 b_2) d_2^2 d_1 b_2^2 \stackrel{(25),(4)}{\sim} b_1^2 d_2 (d_1 d_2) d_1 b_2^2 \stackrel{(26)}{\sim} b_1^2 d_2 (d_1 d_2) d_1 (d_0 d_1) b_2$
 $\stackrel{(25)}{\sim} b_1^2 d_2 b_0 d_1 (d_0 d_1) b_2 \stackrel{(4)}{\sim} b_1^2 (d_2 b_0 d_1 d_0 b_2) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(40)}{\sim} b_1^2 (b_0 d_2 d_1 b_2 d_0) d_2 d_1 b_2$
 $\stackrel{(25),(26)}{\sim} b_1^2 (d_1 d_2) d_2 d_1 b_2 (b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(4)}{\sim} b_1 d_2^2 d_1 b_2 (b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\sigma_1\sigma_2\sigma_1),$
- (21): $\varphi(\tau_2\sigma_1\sigma_2) \stackrel{(4)}{\sim} d_2^2 x_2 b_2^2 b_1 d_2^2 d_1 b_2^2 \stackrel{(26)}{\sim} d_2 (d_2 x_2 b_2) d_0 d_2^2 d_1 b_2^2 \stackrel{(38)}{\sim} d_2 d_0 (d_2 x_2 b_2) d_2^2 d_1 b_2^2$
 $\stackrel{(4)}{\sim} (d_2 d_0) (d_2 x_2 d_2) d_1 b_2^2 \stackrel{(25)}{\sim} b_1 (d_2 x_2 d_2) d_1 b_2^2 \stackrel{(4)}{\sim} b_1 d_2^2 (b_2 x_2 d_2) d_1 b_2^2$
 $\stackrel{(39)}{\sim} b_1^2 d_2^2 d_1 (b_2 x_2 d_2) b_2^2 \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\sigma_1\sigma_2\tau_1).$
- (22): $\varphi(\tau_1\sigma_2\sigma_1) \stackrel{(4)}{\sim} d_2 x_2 (b_1 d_2 d_1 b_2) (b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(26)}{\sim} d_2 x_2 (b_1 d_2 d_1 b_2) d_0 d_2 d_1 b_2$
 $\stackrel{(37),(4)}{\sim} d_2 (d_0 b_0) x_2 d_0 (b_1 d_2 d_1^2) b_2 \stackrel{(31)}{\sim} d_2 d_0 x_1 (b_1 d_2 d_1^2) b_2 \stackrel{(4)}{\sim} d_2 d_0 b_1 (d_1 x_1 b_1) d_2 d_1^2 b_2$
 $\stackrel{(38)}{\sim} d_2 d_0 b_1 d_2 (d_1 x_1 b_1) d_1^2 b_2 \stackrel{(2),(4)}{\sim} d_2 d_0 b_1 d_2 d_1 (b_0 x_2 d_0) d_1 b_2$
 $\stackrel{(25),(4)}{\sim} d_2 d_0 (b_1 d_2 d_1 b_2) d_2 b_0 x_2 b_2^2 \stackrel{(37)}{\sim} d_2 (b_1 d_2 d_1 b_2) d_0 d_2 b_0 x_2 b_2^2$
 $\stackrel{(25),(26)}{\sim} d_2 b_1 d_2 d_1 b_2 (b_2 b_1) d_2 (d_1 d_2) x_2 b_2^2 \stackrel{(4)}{\sim} \varphi(\sigma_2\sigma_1\tau_2),$
- (23): $\varphi(\sigma_1\tau_1) \stackrel{(4)}{\sim} b_1 d_2 d_1 x_2 b_2 \stackrel{(25)}{\sim} (d_2 d_0) d_2 d_1 x_2 b_2 \stackrel{(6)}{\sim} d_2 x_2 (d_0 d_2 d_1) b_2$
 $\stackrel{(26)}{\sim} d_2 x_2 (b_2 b_1) d_2 d_1 b_2 \stackrel{(24)}{=} \varphi(\tau_1\sigma_1).$

ЛИТЕРАТУРА

1. Baez J. C. Link Invariants of Finite Type and Perturbation Theory. Lett. Math. Phys., **26**, 43–51 (1992).
2. Brunn H. Über verknotete Kurven. Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses (Zurich 1897). Leipzig, 1898, pp. 256–259.
3. Birman J. S. New points of view in knot theory. Bull. Amer. Math. Soc., **28**, No. 2, 253–387 (1993).
4. Birman J. S., Menasco W. W. Special positions for essential tori in link complements. Topology, **33**, No. 3, 525–556 (1994).
5. Cromwell P. R. Embedding knots and links in an open book. I. Basic properties. Topology Appl., **64**, No. 1, 37–58 (1995).
6. Cromwell P. R. Arc presentations of knots and links. In: Knot Theory. Proc. Conference Warsaw, 1995 (V. F. R. Jones et. al., eds.), Banach Center Publ., 42, Warsaw, 1998, pp. 57–64.
7. Cromwell P. R., Nutt I. J. Embedding knots and links in an open book. II. Bounds on arc index. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **119**, No. 2, 309–319 (1996).

8. *Dasbach O. T., Gemein B.* A faithful representation of the singular braid monoid on three strands. In: *Knots in Hellas '98 (Delphi)* (Proc. of the international conference on knot theory and its ramifications), Ser. *Knots Everything*, 24, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000, pp. 48–58.
9. *Дынников И. А.* Трехстраничный подход в теории узлов. Кодирование и локальные движения. *Функц. анализ и его прил.*, **33**, вып. 4, 25–37 (1999).
10. *Дынников И. А.* Трехстраничный подход в теории узлов. Универсальная полугруппа. *Функц. анализ и его прил.*, **34**, вып. 1, 29–40 (2000).
11. *Дынников И. А.* Конечно-представленные группы и полугруппы в теории узлов. *Труды МИАН*, **231**, 231–248 (2000).
12. *Fenn R., Keyman E., Rourke C.* The singular braid monoid embeds in a group. *J. Knot Theory Ramifications*, **7**, No. 7, 881–892 (1998).
13. *Gemein B.* Singular braids and Markov's theorem. *J. Knot Theory Ramifications*, **6**, No. 4, 441–454 (1997).
14. *B. Gemein*, Representations of the singular braid monoid and group invariants of singular knots. *Topology Applications*, **114**, No. 2, 117–140 (2001).
15. *Jonish D., Millett K. C.* Isotopy invariants of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **327**, No. 2, 655–702 (1991).
16. *Kauffman L.* Invariants of graphs in three-space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**, No. 2, 697–710 (1989).
17. *Kauffman L., Vogel P.* Link polynomials and a graphical calculus. *J. Knot Theory Ramifications*, **1**, No. 1, 59–104 (1992).
18. *Курлин В. А.* Трехстраничные диаграммы Дынникова заузленных 3-валентных графов. *Функц. анализ и его прил.*, **35**, вып. 3, 84–88 (2001).
19. *Morton H. R., Beltrami E.* Arc index and the Kauffman polynomial. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **123**, 41–48 (1998).
20. *Stanford T.* Finite-type invariants of knots, links, and graphs. *Topology*, **35**, No. 4, 1027–1050 (1996).
21. *Тыраев В. Г.* Операторные инварианты связок и R-матрицы. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **53**, вып. 5, 1073–1107 (1989).
22. *Vershinin V. V.* On homological properties of singular braids. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**, No. 6, 2431–2455 (1998).
23. *Вершинин В. В.* Группы кос и пространства петель. *УМН*, **54**, вып. 2, 3–84 (1999).

Département des Sciences Mathématiques,
Université Montpellier II

Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева
e-mail: vershini@math.univ-montp2.fr, versh@math.nsc.ru

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии
e-mail: kurlin@mccme.ru

Поступило в редакцию
27 сентября 2002 г.