Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Панюшев, О неприводимости коммутаторных многообразий, связанных с инволюциями простых алгебр Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 47–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:35:11

УДК 512.745

О неприводимости коммутаторных многообразий, связанных с инволюциями простых алгебр Ли*

© 2004. Д. И. ПАНЮШЕВ

Введение

Основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. В данной работе мы рассматриваем коммутаторные многообразия для представлений изотропии симметрических пространств. А именно, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ — произвольная $\mathbb{Z}_2$ -градуировка, то нас интересует многообразие $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \mid [x, y] = 0\} \subset \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. В моей статье [6] было доказано, что $\mathcal{C}_1$ неприводимо, если $\mathbb{Z}_2$ -градуировка имеет максимальный ранг, т. е. $\mathfrak{g}_1$ содержит картановскую подалгебру из $\mathfrak{g}$. Здесь мы покажем, что $\mathcal{C}_1$ неприводимо для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ или $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$. В случае симметрических пар ранга 1 будет показано, что число неприводимых компонент многообразия $\mathcal{C}_1$ равно числу ненулевых нильпотентных G_0 -орбит в $\mathfrak{g}_1$ не максимальной размерности. Мы также обсудим общую задачу о неприводимости коммутаторных многообразий.

§1. Напоминания о симметрических парах

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебраическая алгебра Ли и ϑ — ее инволютивный автоморфизм. Собственные подпространства автоморфизма ϑ задают в $\mathfrak{g}$ $\mathbb{Z}_2$ -градуировку:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{где } \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid \vartheta(x) = (-1)^i x\}.$$

В этом случае мы также говорим, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ — симметрическая пара. Если G_0 — связная алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$, то $\mathfrak{g}_1$ — это G_0 -модуль. Центризатор в $\mathfrak{g}$ произвольного подмножества $M \subset \mathfrak{g}$ обозначается через $\mathfrak{z}(M)$. Если $M \subset \mathfrak{g}_1$, то $\mathfrak{z}(M)$ ϑ -инвариантен и наследует $\mathbb{Z}_2$ -градуировку от $\mathfrak{g}$. В частности, если элемент $s \in \mathfrak{g}_1$ полупрост, то $(\mathfrak{z}(s), \mathfrak{z}(s)_0)$ — это некоторая новая симметрическая пара, которая называется *подсимметрической парой* для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ или для ϑ . Пусть $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_1$ — какое-либо максимальное подпространство, состоящее из коммутирующих полупростых элементов. Оно называется *картановским*. Все такие подпространства G_0 -сопряжены. В следующем утверждении собраны другие полезные результаты из теории орбит и инвариантов группы G_0 в пространстве $\mathfrak{g}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (Костант–Раллис [3]). Пусть $x \in \mathfrak{g}_1$.

(1) Орбита $G_0 \cdot x$ замкнута $\iff G_0 \cdot x \cap \mathfrak{c} \neq \emptyset$; замыкание орбиты $G_0 \cdot x$ содержит $0 \in \mathfrak{g}_1 \iff x$ — нильпотентный элемент.

(2) $\dim G \cdot x = 2 \dim G_0 \cdot x$.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 01-01-00756 и 02-01-01041.

(3) $G_0 \cdot \mathfrak{c}$ плотно в $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1 = \mathfrak{c}$.

(4) $\mathfrak{g}_1 // G_0 = \text{Spec } \mathbb{k}[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$ — аффинное пространство размерности $\dim \mathfrak{c}$ и морфизм факторизации $\pi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1 // G_0$ равноразмерен; каждый слой морфизма π содержит конечное число G_0 -орбит.

Из утверждения (2) предложения 1.1 следует, что $\dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{z}(x)_0 = \dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{z}(x)_1$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $x \in \mathfrak{g}_1$. Тогда x называется ϑ -регулярным, если его G_0 -орбита имеет максимальную размерность; нильпотентный элемент x называется ϑ -отмеченным, если $\mathfrak{z}(x)_1$ не содержит нецентральных полупростых элементов.

Из утверждения (4) предложения 1.1 следует, что число ϑ -регулярных нильпотентных орбит равно числу неприводимых компонент нуль-конуса $\mathcal{N}_1 = \pi^{-1}(\pi(0))$. Следующее утверждение известно, однако для удобства читателя мы приведем его короткое (новое) доказательство.

ЛЕММА 1.3. *Любой ϑ -регулярный нильпотентный элемент является ϑ -отмеченным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $x \in \mathcal{N}_1$ не является ϑ -отмеченным, и пусть $s \in \mathfrak{z}(x)_1$ — нецентральный полупростой элемент. Тогда $a = x + s$ — это разложение Жордана для $a \in \mathfrak{g}_1$, и $2 \dim G_0 \cdot (x + s) = \dim G \cdot (x + s) > \dim G \cdot x = 2 \dim G_0 \cdot x$. Это значит, что размерность G_0 -орбиты точки x не максимальна, т. е. x не является ϑ -регулярным. $\square$

§2. Коммутаторные многообразия

Напомним, что коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{g}$ — это множество пар коммутирующих элементов, $\mathfrak{C} = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$. Аналогично,

$$\mathfrak{C}_1 = \{(x, y) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \mid [x, y] = 0\}$$

— это коммутаторное многообразие, ассоциированное с симметрической парой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ (или с $\mathfrak{g}_1$). Если требуется подчеркнуть зависимость коммутаторных многообразий от $\mathfrak{g}$, то мы пишем $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ соответственно.

Фундаментальный результат Ричардсона [9] утверждает, что $\mathfrak{C}$ неприводимо и, более точно, $\mathfrak{C} = \overline{G \cdot (t \times t)}$, где t — произвольная картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Однако до сих пор неизвестно, является ли $\mathfrak{C}$ нормальным и порождается ли идеал подмногообразия $\mathfrak{C}$ квадратиками. Ситуация для симметрических пар сложнее и интереснее. С одной стороны, для некоторых ϑ удастся доказать больше; с другой стороны, $\mathfrak{C}_1$ иногда бывает приводимым, а в некоторых случаях вопрос о неприводимости является открытым. Эффективный метод изучения коммутаторных многообразий, восходящий к Ричардсону [9], состоит в использовании разложения Жордана, индукции по $\dim \mathfrak{c}$ (переход к подсимметрическим парам) и рассмотрении проекции $p: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ коммутаторного многообразия на первый сомножитель. В работе [6] мы уже применяли этот метод к симметрическим парам и, более общо, к коммутаторным многообразиям, связанным с произвольными ϑ -группами Э. Б. Винберга.

Число $\dim \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_1$ — картановское подпространство, называется *рангом* симметрической пары. В [6] было доказано, что $\mathfrak{C}_1 = \overline{G_0 \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})}$, если ϑ — инволюция максимального ранга (= инволюция Г. Вейля), причем $\mathfrak{C}_1$ — нормальное полное пересечение и его идеал в $\mathbb{k}[\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1]$ порождается квадратиками. С другой

стороны, в [6, 3.5] приводится пример инволюции в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, для которой $\mathfrak{C}_1$ имеет три неприводимых компоненты разных размерностей.

Ниже мы собираемся предъявить новые симметрические пары, для которых $\mathfrak{C}_1$ неприводимо, а также полностью разобрать случай симметрических пар ранга 1. Начнем с положительного результата, обеспечивающего неприводимость $\mathfrak{C}_1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть ϑ — инволютивный автоморфизм редуktивной алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ — соответствующая симметрическая пара. Пусть для самой этой пары и для любой ее подсимметрической пары выполнено условие, что любой ϑ -отмеченный нильпотентный элемент является ϑ -регулярным. Тогда коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неприводимое подмногообразие

$$\mathfrak{C}_1^c := \overline{G_0 \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})} \subset \mathfrak{C}_1.$$

Легко видеть (ср. [6, Sec. 3]), что

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{C}_1^c &= \dim G_0 + 2 \dim \mathfrak{c} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{c})_0 \\ &= \dim \mathfrak{g}_1 + 2 \dim \mathfrak{c} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1 = \dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Здесь используется тот факт, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1 = \mathfrak{c}$ и для точки общего положения $x \in \mathfrak{c}$ мы имеем $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(\mathfrak{c})$. Как показано в [6, 3.7], $\mathfrak{C}_1^c$ — неприводимая компонента многообразия $\mathfrak{C}_1$. Будем называть ее *стандартной*. Все остальные компоненты (если они есть) назовем *странными*. Покажем, что странных компонент быть не может. Обозначим через $\hat{p}$ ограничение проекции p на $\mathfrak{C}_1^c$. Так как $\overline{G \cdot \mathfrak{c}} = \mathfrak{g}_1$, то проекция $\hat{p}$ сюръективна. Поэтому $\dim \hat{p}^{-1}(x) \geq \dim \mathfrak{c}$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$. С другой стороны, $\hat{p}^{-1}(x) \subset p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathfrak{z}(x)_1$. Заметим, что $\dim \mathfrak{z}(x)_1 \geq \dim \mathfrak{c}$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$, причем равенство как раз характеризует ϑ -регулярные элементы. Для ϑ -регулярного нильпотентного элемента $e \in \mathfrak{g}_1$ это нам дает, что $p^{-1}(e) = \hat{p}^{-1}(e) \subset \mathfrak{C}_1^c$. Следовательно, G_0 -орбита ϑ -регулярного нильпотентного элемента $e \in \mathfrak{g}_1$ никогда не порождает странной компоненты многообразия $\mathfrak{C}_1$ (в том смысле, что $G_0 \cdot (\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1) \subset \mathfrak{C}_1^c$). Иначе говоря, если $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$ и x — это ϑ -регулярный нильпотентный элемент, то $(x, y) \in \mathfrak{C}_1^c$.

Число $\dim(\mathfrak{c} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ будем называть *полупростым рангом* симметрической пары. Копируя рассуждения Ричардсона, покажем индукцией по полупростому рангу, что $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1^c$. Пусть $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$ и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана.

1) Если $x_s \neq 0$ и $x_s \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, то рассмотрим подсимметрическую пару $(\mathfrak{z}(x_s), \mathfrak{z}(x_s)_0)$. Ясно, что $x_n, y \in \mathfrak{z}(x_s)_1$ и даже $(x_n, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{z}(x_s)_1)$. Не теряя общности, можно считать, что $x_s \in \mathfrak{c}$. Тогда $\mathfrak{c}$ является картановским подпространством и в $\mathfrak{z}(x_s)_1$. Однако полупростой ранг подсимметрической пары $(\mathfrak{z}(x_s), \mathfrak{z}(x_s)_0)$ меньше, чем ранг пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$. По предположению индукции $(x_n, y) \in \overline{Z(x_s)_0 \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})}$. Но тогда и $(x_s + x_n, y) \in \overline{Z(x_s)_0 \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})} \subset \mathfrak{C}_1^c$.

2) Если $x_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, то задача сводится к рассмотрению случая $x = x_n$.

3) Пусть $x = x_n$. Если $\mathfrak{z}(x_n)_1$ содержит нецентральный полупростой элемент, скажем s , то $cs + x_n \notin \mathcal{N}_1$ при $c \neq 0$ и $(cs + x_n, y) \in \mathfrak{C}_1$ при всех $c \in \mathbb{k}$. Как следует из п. 1), $(cs + x_n, y) \in \mathfrak{C}_1^c$ при $c \neq 0$. Следовательно, $(x_n, y) \in \mathfrak{C}_1^c$.

4) Осталось только рассмотреть случай, когда $x = x_n$ является ϑ -отмеченным нильпотентным элементом. Но тогда, ввиду предположения теоремы, x будет

ϑ -регулярным. Однако выше мы уже показали, что все пары коммутирующих элементов, включающие ϑ -регулярные нильпотентные элементы, лежат в $\mathfrak{C}_1^c$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В сущности, индуктивные рассуждения *à la* Ричардсон показывают, что приводимость многообразия $\mathfrak{C}_1$ всегда связана с тем, что для некоторой подсимметрической пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}_0)$ в $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и для некоторого ϑ -отмеченного нильпотентного элемента $\bar{e} \in \bar{\mathfrak{g}}_1$ окажется, что $\bar{G}_0 \cdot (\{\bar{e}\} \times (\bar{\mathfrak{z}}(\bar{e}) \cap \bar{\mathfrak{g}}_1))$ не лежит в стандартной компоненте многообразия $\mathfrak{C}(\bar{\mathfrak{g}}_1)$.

§3. Новые примеры неприводимых коммутаторных многообразий

Симметрическая пара $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$. Наша цель — доказать, что в этом случае применима теорема 2.1 и, следовательно, $\mathfrak{C}_1$ неприводимо. Начнем с явной матричной модели $\mathbb{Z}_2$ -градуировки в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$. Пусть Υ_n есть $n \times n$ -матрица с единицами вдоль побочной диагонали и нулями на остальных местах. Положим $J = \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon_n \\ -\Upsilon_n & 0 \end{pmatrix}$ и $\vartheta(X) = JX^tJ$. Тогда $\mathfrak{sp}_{2n} \simeq \mathfrak{g}_0 = \{X \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid XJ \text{ симметрична}\}$ и $\mathfrak{g}_1 = \{X \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid XJ \text{ кососимметрична}\}$. Для $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ положим $\hat{A} = \Upsilon_n A^t \Upsilon_n$. Легко видеть, что преобразование $A \mapsto \hat{A}$ — это транспонирование относительно побочной диагонали. В этих обозначениях мы имеем

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\hat{A} \end{pmatrix} \mid \hat{B} = B, \hat{C} = C \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} N & P \\ Q & \hat{N} \end{pmatrix} \mid \hat{P} = -P, \hat{Q} = -Q, \text{tr } N = 0 \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. (i) Пусть $e \in \mathfrak{g}_1$ — нильпотентный элемент. Тогда $SL_{2n} \cdot e \cap \mathfrak{g}_1$ — это единственная Sp_{2n} -орбита.

(ii) Если $\mathcal{O}$ — произвольная нильпотентная SL_{2n} -орбита, то $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда любая часть разбиения, соответствующего $\mathcal{O}$, встречается четное число раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это утверждение хорошо известно. Чисто классификационное доказательство можно найти в [5]. Более концептуальное рассуждение имеется в [8, 4.3].

(ii) Инволюция ϑ , выделяющая $\mathfrak{sp}_{2n}$, имеет следующую диаграмму Сатаке:

(n черных кружков и $n - 1$ белых). Как отмечено в [7, р. 1469], результат Антоняна [1, теорема 1] показывает, что нильпотентная G -орбита пересекает $\mathfrak{g}_1$ тогда и только тогда, когда ее характеристика имеет нулевые отметки на черных кружках диаграммы Сатаке и равные отметки на белых кружках, соединенных стрелками, если последние имеются. В данной ситуации это как раз означает, что все части соответствующего разбиения встречаются четное число раз. (Следует воспользоваться алгоритмом написания характеристики по разбиению, см. [11, IV.1.13].) $\square$

Далее нам потребуются подалгебра $\mathfrak{s} = \{B = C = 0\} \subset \mathfrak{g}_0$ и подпространство $V = \{P = Q = 0\} \subset \mathfrak{g}_1$. Очевидно, что $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{gl}_n$, $V \simeq \mathfrak{sl}_n$ и по модулю центра

представление алгебры $\mathfrak{s}$ на V изоморфно присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{sl}_n$.

ТЕОРЕМА 3.2. (i) *Имеются естественные биекции между множествами*
 — *нильпотентных SL_{2n} -орбит в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$, пересекающих $\mathfrak{g}_1$,*
 — *нильпотентных G_0 -орбит в $\mathfrak{g}_1$,*
 — *нильпотентных $\mathfrak{s}$ -орбит в V .*

Эти биекции задаются отображениями

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1 \mapsto \mathcal{O} \cap V,$$

где $\mathcal{O}$ — *нильпотентная орбита в $\mathfrak{g}$. При этом, если $\mathcal{O}$ задается разбиением $(n_1^{2k_1}, \dots, n_t^{2k_t})$, то $\mathcal{O} \cap V$ дается разбиением $(n_1^{k_1}, \dots, n_t^{k_t})$;*

(ii) *Биекции из п. (i) уважают замыкания орбит, т. е.*

$$\overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}' \iff \overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1} \supset \mathcal{O}' \cap \mathfrak{g}_1 \iff \overline{\mathcal{O} \cap V} \supset \mathcal{O}' \cap V.$$

(iii) *В $\mathfrak{g}_1$ есть единственная ϑ -регулярная nilьпотентная орбита, и любой ϑ -отмеченный nilьпотентный элемент в $\mathfrak{g}_1$ является регулярным;*

(iv) *Любая подсимметрическая пара в $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ есть прямая сумма пар такого же вида и тривиальной пары.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Обозначим через $\mathcal{M}^{(2n)}$, $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}^{(n)}$ три множества nilьпотентных орбит, фигурирующих в условии. О биекции между первыми двумя говорится в предложении 3.1(i). Имеется также естественное отображение $\nu: \mathcal{M}^{(n)} \rightarrow \mathcal{M}^{(2n)}$, при котором $n \times n$ -матрица N переходит в $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \hat{N} \end{pmatrix} \in V$.

Очевидно, это отображение удваивает разбиение (т. е. количество жордановых блоков каждого размера). Поэтому, согласно предложению 3.1(ii), ν — биекция.

(ii) Обе импликации « $\iff$ » очевидны. Поэтому достаточно установить, что из $\overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}'$ следует $\overline{\mathcal{O} \cap V} \supset \mathcal{O}' \cap V$. А это, в свою очередь, следует из того, что замыкание nilьпотентных орбит определяется стандартным частичным порядком на множестве разбиений [2, 6.2] и связью между разбиениями, задающими орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O} \cap V$.

(iii) Предыдущие биекции показывают, что *единственная ϑ -регулярная орбита в $\mathfrak{g}_1$ происходит из nilьпотентной орбиты в $\mathfrak{sl}_{2n}$ с разбиением (n, n) , иначе говоря, из регулярной nilьпотентной SL_n -орбиты в V . Любая же другая орбита происходит из нерегулярной SL_n -орбиты. Централизатор нерегулярного nilьпотентного элемента в $\mathfrak{sl}_n$ всегда содержит полупростые элементы. При отождествлении $\mathfrak{sl}_n$ с пространством V (посредством «удвоения», как в п. (i)) это дает нам полупростой элемент в $\mathfrak{z}(e)_1$ для любого $e \in V \subset \mathfrak{g}_1$, не являющегося ϑ -регулярным.*

(iv) Подпространство $\mathfrak{c} = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n, t_n, \dots, t_1) \mid \sum t_i = 0\} \subset V$ является картановским в $\mathfrak{g}_1$. Ввиду сопряженности картановских подпространств достаточно рассматривать централизаторы элементов из $\mathfrak{c}$. В этом случае структура централизатора $\mathfrak{z}(x)$, $x \in \mathfrak{c}$, видна непосредственно из матричного описания алгебр $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Для $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1$ неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из теоремы 2.1 и теоремы 3.2(iii)–(iv). $\square$

Симметрическая пара $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$. Будем следовать тем же путем, что и выше. Сначала немного нумерологии. В данном случае $\dim \mathfrak{g}_0 = 52$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 26$, $\dim \mathfrak{c} = 2$. Диаграмма Сатаке данной пары — это

В $\mathbf{E}_6$ есть только две ненулевые нильпотентные орбиты с характеристиками, имеющими нулевые отметки на черных кружках:

$$2-0-0-0-2 \underset{0}{\rightsquigarrow} \tilde{\mathcal{O}}_{48} \quad \text{и} \quad 1-0-0-0-1 \underset{0}{\rightsquigarrow} \tilde{\mathcal{O}}_{32},$$

где индекс обозначает размерность. Так как инволюция ϑ связана с диаграммным автоморфизмом алгебры $\mathbf{E}_6$, то ввиду [8, 4.3] пересечения $\tilde{\mathcal{O}}_i \cap \mathfrak{g}_1$ — это в точности $\mathbf{F}_4$ -орбиты (половинной размерности). Таким образом, $\mathfrak{g}_1$ имеет две ненулевые нильпотентные $\mathbf{F}_4$ -орбиты: $\mathcal{O}_{24}$ и $\mathcal{O}_{16}$. Очевидно, что $\mathcal{O}_{24}$ — это ϑ -регулярная орбита. Что касается $\mathcal{O}_{16}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}_{32}$), то мы сравним редуktивные части централизаторов $\mathfrak{z}(e)$ и $\mathfrak{z}(e)_0$ для $e \in \mathcal{O}_{16}$. По таблицам Элашвили [12, табл. 4] находим, что $\mathfrak{z}(e)^{\text{red}} = \mathbf{B}_3 \times T_1$. Здесь T_1 — это алгебра Ли одномерного тора. С другой стороны, e — старший вектор в 26-мерном неприводимом представлении алгебры $\mathbf{F}_4$. Поэтому $(\mathfrak{z}(e)_0)^{\text{red}} = \mathbf{B}_3$. Следовательно, $\mathfrak{z}(e)_1 \supset T_1$ и e не является ϑ -отмеченным.

Единственная нетривиальная собственная подсимметрическая пара, связанная с $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$ — это $(\mathbf{D}_5, \mathbf{B}_4)$. У последней есть единственная нетривиальная нильпотентная орбита. Следовательно, здесь применима теорема 2.1, и мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$ коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1$ неприводимо.*

§4. Коммутаторные многообразия для симметрических пар ранга 1

В этом параграфе мы рассматриваем симметрические пары, для которых $\dim \mathfrak{c} = 1$. Поэтому стандартная неприводимая компонента $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ имеет размерность $\dim \mathfrak{g}_1 + 1$. Напомним, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ — нуль-конус и что, как показано в доказательстве теоремы 2.1, ϑ -регулярная орбита из $\mathcal{N}_1$ никогда не порождает странной неприводимой компоненты.

ТЕОРЕМА 4.1. *Любая нетривиальная G_0 -орбита в $\mathfrak{g}_1$, не являющаяся ϑ -регулярной, порождает странную неприводимую компоненту. Более точно, если $\dim G_0 \cdot e < \dim \mathfrak{g}_1 - 1$, то $\overline{G_0 \cdot (\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1)}$ — странная неприводимая компонента многообразия $\mathfrak{C}_1$ размерности $\dim \mathfrak{g}_1$. При этом разные орбиты порождают разные неприводимые компоненты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У нас $\dim \mathfrak{c} = 1$; поэтому $\dim G_0 \cdot x \leq \dim \mathfrak{g}_1 - 1$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$. Так как $\dim G_0 \cdot x = \dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{z}(x)_0 = \dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{z}(x)_1$, то

$$x \text{ является } \vartheta\text{-регулярным} \iff \dim \mathfrak{z}(x)_1 = 1 \iff \mathfrak{z}(x)_1 = \mathbb{K}x \quad (*)$$

В случае ранга 1 любой элемент в $\mathfrak{g}_1$ либо полупрост, либо нильпотентен, причем все полупростые элементы ϑ -регулярны. Следовательно, нерегулярный элемент обязательно нильпотентен. Кроме того, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ — это просто множество пар пропорциональных элементов из $\mathfrak{g}_1$.

Если $e \in \mathcal{N}_1 \setminus \{0\}$ — нерегулярный элемент, то $\dim \mathfrak{z}(e)_1 \geq 2$. Пусть $e' \in \mathfrak{z}(e)_1 \setminus \mathbb{k}e$. Тогда $(e, e') \in \mathfrak{C}_1 \setminus \mathfrak{C}_1^c$. Точнее, $\overline{G_0 \cdot (\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1)}$ — это $\dim \mathfrak{g}_1$ -мерное неприводимое подмногообразие в $\mathfrak{C}_1$, не лежащее в $\mathfrak{C}_1^c$. Заметим, что $G_0 \cdot (\{x\} \times \mathfrak{z}(x)_1) \subset \mathfrak{C}_1^c$, если x ϑ -регулярен (это следует из (*)) или $x = 0$. Поэтому

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1^c \cup \left(\bigcup_{i \in I} \overline{G_0 \cdot (\{e_i\} \times \mathfrak{z}(e_i)_1)} \right), \quad (**)$$

где e_i пробегает множество представителей всех ненулевых ϑ -нерегулярных G_0 -орбит в $\mathfrak{g}_1$. Положим $\mathfrak{C}^{(i)} = \overline{G_0 \cdot (\{e_i\} \times \mathfrak{z}(e_i)_1)}$. Тогда

- I конечно ввиду конечности множества нильпотентных орбит, см. 1.1(4);
- $\dim \mathfrak{C}^{(i)} = \dim \mathfrak{g}_1$ для любого $i \in I$;
- $\mathfrak{C}^{(i)} \neq \mathfrak{C}^{(j)}$ (ибо они имеют разные проекции на первый сомножитель);
- $\mathfrak{C}^{(i)} \not\subset \mathfrak{C}_1^c$ (см. выше).

Значит, (**) — это разложение на неприводимые компоненты. $\square$

Пример. Следующая табличка содержит все симметрические пары ранга 1 и указывает для каждой число неприводимых компонент у $\mathfrak{C}_1$.

Симметрическая пара	$(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$ $n \geq 3$	$(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sp}_2)$ $n \geq 2$	$(\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4)$	$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{n-1} \times T_1)$ $n \geq 3$
$\# \operatorname{Irr}(\mathfrak{C}_1)$	1	2	2	3

Последний столбец как раз представляет собой пример, рассмотренный в [6, 3.5].

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В случае пар ранга 1 *любой* ненулевой нильпотентный элемент в $\mathfrak{g}_1$ является ϑ -отмеченным (ибо все ненулевые полупростые элементы в $\mathfrak{g}_1$ ϑ -регулярны).

2. Вопрос о неприводимости коммутаторных многообразий для пар ранга 1 рассматривается в недавней работе [10]. Наши результаты были получены одновременно и независимо. Однако наш подход короче и дает явное описание неприводимых компонент.

§5. Что дальше?

Отбрасывая симметрические пары максимального ранга, два случая, рассмотренных в §3, и пары ранга 1, мы видим, что вопрос о неприводимости коммутаторного многообразия остается открытым для следующих симметрических пар:

$$\begin{aligned}
 &(\mathfrak{sl}_{n+m}, \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_m \times T_1), \quad 1 < m \leq n, \quad (\mathfrak{so}_{n+m}, \mathfrak{so}_n \times \mathfrak{so}_m), \quad m \geq 2, \quad n - m \geq 2, \\
 &(\mathfrak{sp}_{n+m}, \mathfrak{sp}_n \times \mathfrak{sp}_m), \quad 1 < m \leq n, \quad (\mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{sl}_n \times T_1), \quad n \geq 4, \quad (\mathbf{E}_6, \mathbf{D}_5 \times T_1), \\
 &(\mathbf{E}_7, \mathbf{E}_6 \times T_1), \quad (\mathbf{E}_6, \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_1), \quad (\mathbf{E}_7, \mathbf{D}_6 \times \mathbf{A}_1), \quad (\mathbf{E}_8, \mathbf{E}_7 \times \mathbf{A}_1).
 \end{aligned}$$

Можно проверить, что каждая из этих пар содержит ϑ -отмеченные нильпотентные элементы, не являющиеся ϑ -регулярными, так что теорема 2.1 здесь неприменима. Однако я полагаю, что $\mathfrak{C}_1$ неприводимо во всех этих случаях. (Для классических серий и малых значений параметров m, n неприводимость можно проверять непосредственно.) Это может быть сформулировано и в более красивых и инвариантных терминах.

Рассмотрим представление $\rho_0: G_0 \rightarrow GL(\mathfrak{g}_1)$, ассоциированное с симметрической парой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$. Пусть $\tilde{G}_0$ — наибольшая связная подгруппа в $GL(\mathfrak{g}_1)$, такая, что $\mathbb{K}[\mathfrak{g}_1]^{G_0} = \mathbb{K}[\mathfrak{g}_1]^{\tilde{G}_0}$.

ГИПОТЕЗА. Многообразие $\mathfrak{E}_1$ неприводимо тогда и только тогда, когда симметрическая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ удовлетворяет условию $G_0 = \tilde{G}_0$.

Все случаи, когда $G_0 \neq \tilde{G}_0$, были найдены в [4]. Оказывается (если $\mathfrak{g}$ простая), это в точности симметрические пары ранга 1, отличные от $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$! Таким образом, теорема 4.1 и классификация, полученная в [4], доказывают необходимость условия в гипотезе 5.1. Отметим также, что эта гипотеза, в частности, утверждает, что если ранг неразложимой симметрической пары ≥ 2 , то $\mathfrak{E}_1$ неприводимо.

На эту ситуацию можно взглянуть и с более общей точки зрения. Забудем пока о симметрических парах и рассмотрим какое-нибудь представление $\rho: G \rightarrow GL(V)$ связной редуктивной группы G . Следуя работе [6], рассмотрим «коммутаторное» многообразие $\mathfrak{E}_V \subset V \times V^*$. По определению

$$\mathfrak{E}_V = \{(v, \xi) \in V \times V^* \mid \langle \xi, \mathfrak{g} \cdot v \rangle = 0\}.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает естественное спаривание между V и V^* . Иначе говоря, если $\varphi: V \times V^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ — отображение момента (см. [6, Сес. 1]), то $\mathfrak{E}_V = \varphi^{-1}(0)$. Напомним, что действие $(G:V)$ называется *обозримым*, если все слои орбитного морфизма $\pi_{G,V}: V \rightarrow V//G$ содержат конечное число орбит; действие называется *стабильным*, если среди G -орбит максимальной размерности найдется замкнутая. Как и выше, определим группу $\tilde{G}$ как максимальную связную подгруппу в $GL(V)$, обладающую тем свойством, что $\mathbb{K}[V]^G = \mathbb{K}[V]^{\tilde{G}}$. При этом не предполагается, что группа $\tilde{G}$ обязательно редуктивна.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть действие $(G:V)$ стабильно и обозримо. Предположим что $\tilde{G} \not\supseteq G$ и, более того, найдется точка $v \in V$, такая, что $\dim \tilde{G} \cdot v > \dim G \cdot v$. Тогда $\mathfrak{E}_V$ приводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G и $\tilde{G}$ имеют одинаковые инварианты в V , то $V//G \simeq V//\tilde{G}$ и слои орбитных морфизмов у них одинаковы. Ввиду стабильности действия группы G слой общего положения является замкнутой G -орбитой и, следовательно, замкнутой $\tilde{G}$ -орбитой. Таким образом, действие $(\tilde{G}:V)$ также стабильно и обозримо. Рассмотрим коммутативную диаграмму, включающую отображения момента для действий групп G и $\tilde{G}$:

$$\begin{array}{ccc} V \times V^* & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{\mathfrak{g}}^* \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Здесь вертикальная стрелка — это отображение, двойственное к вложению $\mathfrak{g} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$. Положим $\tilde{\mathfrak{E}}_V = \tilde{\varphi}^{-1}(0)$. Ясно, что $\mathfrak{E}_V \supset \tilde{\mathfrak{E}}_V$. Согласно [6, 3.7], из обозримости и стабильности обоих рассматриваемых действий следует, что

$$\dim \mathfrak{E}_V = \dim V + \dim V//G = \dim \tilde{\mathfrak{E}}_V.$$

(Соответствующее утверждение в [6] формулируется для редутивных групп. Однако, по существу, редутивность там нигде не используется.) Поэтому достаточно показать, что $\tilde{\mathfrak{C}}_V \neq \mathfrak{C}_V$. По нашему предположению найдется точка $v \in V$, такая, что $\tilde{\mathfrak{g}} \cdot v \not\supseteq \mathfrak{g} \cdot v$. Выберем $\xi \in V^*$ так, чтобы $\langle \xi, \mathfrak{g} \cdot v \rangle = 0$ и $\langle \xi, \tilde{\mathfrak{g}} \cdot v \rangle \neq 0$. Тогда $(v, \xi) \in \mathfrak{C}_V \setminus \tilde{\mathfrak{C}}_V$. $\square$

Заметим, что может случиться так, что $\tilde{G} \supsetneq G$ и $\mathbb{k}[V]^{\tilde{G}} = \mathbb{k}[V]^G \neq \mathbb{k}$, но все орбиты этих групп одинаковы! Например, пусть $G = \mathbf{G}_2$ и V — пространство 7-мерного представления. Тогда $\tilde{G} = SO_7$.

Возвращаясь теперь к симметрическим парам, мы видим, что теорема 5.2 частично объясняет ситуацию с симметрическими парами ранга 1. Если пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ имеет ранг 1 и отлична от $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$, то $\tilde{G}_0 = SO(\mathfrak{g}_1) \neq G_0$. При этом любая ϑ -нерегулярная G_0 -орбита в $\mathfrak{g}_1$ порождает нильпотентную $SO(\mathfrak{g}_1)$ -орбиту большей размерности. И в этом-то и состоит причина появления странных неприводимых компонент у $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$.

Интересно было бы найти все обозримые и стабильные действия $(G:V)$, для которых $\tilde{G} \neq G$. Возможно, таких просто не бывает, если $\dim V // G > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонян Л. В.* О классификации однородных элементов $\mathbb{Z}_2$ -градуированных полупростых алгебр Ли. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №2, 29–34 (1982).
2. *Collingwood D. H., McGovern W.* Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
3. *Kostant B., Rallis S.* Orbits and representations associated with symmetric spaces. Amer. J. Math., **93**, 753–809 (1971).
4. *Levasseur T., Ushirobira R.* Adjoint vector fields on the tangent space of semisimple symmetric spaces. J. Lie Theory, **9**, 293–304 (1999).
5. *Ohta T.* Closures of nilpotent orbits in classical symmetric pairs and their singularities. Tohoku Math. J., **43** (2), 161–213 (1991).
6. *Panyushev D.* The Jacobian modules of a Lie algebra and geometry of commuting varieties. Compositio Math., **94**, 181–199 (1994).
7. *Panyushev D.* On spherical nilpotent orbits and beyond. Ann. Inst. Fourier, **49**, 1453–1476 (1999).
8. *Reeder M.* Desingularizations of some unstable orbit closures. Pacific J. Math., **167**, 327–343 (1995).
9. *Richardson R. W.* Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups. Compositio Math., **38**, 311–327 (1979).
10. *Sabourin H., Yu R. W. T.* Sur l'irréductibilité de la variété commutante d'une paire symétrique réductive de rang 1. Bull. Sci. Math., **126**, 143–150 (2002).
11. *Спрингер Т. А., Штейнберг Р.* Классы сопряженных элементов, В кн.: Семинар по алгебраическим группам. Мир, М., 162–262, 1973.
12. *Элашвили А. Г.* Централизаторы нильпотентных элементов в полупростых алгебрах Ли. Труды Тбилисского матем. института им. Размадзе, **46**, 109–132 (1975).