Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Заброда, И. Б. Симоненко, Асимптотическая обратимость и коллективное асимптотическое поведение спектра обобщенных одномерных дискретных сверток, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 81–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:31:07

Асимптотическая обратимость и коллективное асимптотическое поведение спектра обобщенных одномерных дискретных сверток

© 2004. О. Н. ЗАБРОДА, И. Б. СИМОНЕНКО

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $\mathfrak{F}$ — множество функций $a: X \times X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, равномерно непрерывных по совокупности первых двух переменных и удовлетворяющих условию

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in X, y \in X} |a(x, y, j)| < +\infty,$$

$S = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, s — мера-длина на S и $\sigma: \mathfrak{F} \rightarrow C(X \times S)$ — отображение, определяемое равенством

$$[\sigma(a)](x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a(x, x, j) t^j.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ множество, состоящее из всех $a \in \mathfrak{F}$, таких, что замыкание области значений функции $\sigma(a)$ не содержит нуля и $[\sigma(a)](x_0, t)$ имеет нулевое приращение аргумента по $t \in S$.

Последовательность линейных операторов $A_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ будем называть асимптотически обратимой, если существуют такие $N \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что A_n обратим и $\|(A_n)^{-1}\| \leq C$ для каждого натурального $n > N$. При этом пространство $\mathbb{C}^n$ мы считаем снабженным евклидовой нормой.

Пусть $E: \mathbb{N} \rightarrow (0, +\infty)$, $E(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ и выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) $X = [0, 1]$ и $E(n) = n$;
- 2) $X = (0, +\infty)$ и $n/E(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a \in \mathfrak{F}_0$. Тогда последовательность операторов A_n ($n \in \mathbb{N}$), действующих в пространствах $\mathbb{C}^n$ по правилу

$$(A_n v)(k) = \sum_{j=1}^n a\left(\frac{k}{E(n)}, \frac{j}{E(n)}, k-j\right) v(j), \quad (1)$$

асимптотически обратима.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, \delta \in \mathfrak{F}$, δ не зависит от первых двух переменных, $\delta(x, y, 0) = 1$ и $\delta(x, y, j) = 0$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Пусть, далее, G — множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $a - \lambda \delta \in \mathfrak{F}_0$, $F = \mathbb{C} \setminus G$, D — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, содержащее в себе F , и A_n — последовательность операторов, определяемая равенством (1). Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для каждого натурального $n > N$ спектр оператора A_n вложен в D .

Для линейного оператора A , действующего в конечномерном пространстве, и функции f комплексного переменного положим $\Phi_f(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) f(\lambda)$, где Λ — множество собственных чисел оператора A , находящихся в области определения функции f , а $\rho(\lambda)$ — кратность собственного числа λ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и f — аналитическая функция комплексного переменного, определенная в D . Тогда

$$\frac{\Phi_f(A_n)}{n} - \frac{E(n)}{2\pi n} \int_{[0, n/E(n)] \times S} \psi(x, t) dx ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

где $\psi(x, t) = f([\sigma(a)](x, t))$.

Комментарии. Впервые коллективное асимптотическое поведение спектра для самосопряженных теплицевых матриц, т.е. для матриц вида $b_{k,j} = a_{k-j}$ ($k, j \in \{1, \dots, n\}$), где a_k удовлетворяют условию $a_{-k} = \bar{a}_k$, исследовал Сегё [1; 2, гл. 5]. Критерий асимптотической обратимости операторов умножения на теплицевы матрицы (не обязательно самосопряженные) получили Гохберг и Фельдман [3, 4]. Используя специальную конструкцию асимптотически обратного, Видом [5] существенно усилил результаты Сегё, освободившись от условий самосопряженности. Асимптотическую обратимость и коллективное асимптотическое поведение спектра для операторов вида (1) в случае 1) ($E(n) = n$, $X = [0, 1]$), когда функция a не зависит от второго аргумента, изучили Эрхард и Шао [6]. Значительную трудность при этом представляет эффективное построение асимптотически обратного оператора специального вида, удобного для последующего исследования асимптотического поведения спектра. Мы используем несколько иную конструкцию. Она позволяет провести исследование и в случае 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Szego G. Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl. Band Festkrift Marcel Riesz, 228–238 (1952).
2. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М., 1961.
3. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Докл. АН СССР, **165**, №2, 268–271 (1965).
4. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Наука, М., 1971.
5. Widom H. Adv. in Math., **21**, 1–29 (1976).
6. Ehrhardt T., Shao B. J. Fourier Analysis Application, **7**, No. 1, 71–92 (2001).

Ростовский госуниверситет,
механико-математический факультет
e-mail: isim@math.rsu.ru

Поступило в редакцию
17 октября 2002 г.

УДК 512.544.6

Квазиинвариантные меры и неприводимые представления индуктивного предела специальных линейных групп*

© 2004. А. В. Косяк

1. С каждым действием $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ группы G на G -пространстве X и G -квазиинвариантной мерой μ на X можно связать унитарное представление $\pi^{\alpha, \mu, X}: G \rightarrow U(L^2(X, d\mu))$ группы G по формуле

$$(\pi_t^{\alpha, \mu, X} f)(x) = (d\mu(\alpha_{t-1}(x))/d\mu(x))^{1/2} f(\alpha_{t-1}(x)), \quad f \in L^2(X, d\mu).$$

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта DFG 436 UKR 113/72.