Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Шакиров, Многокритериальная оценка альтернатив на основе теории полезности в условиях неопределенности предпочтений лица, принимающего решения, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2018, том 13, выпуск 1, 17–35

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:08:34

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА АЛЬТЕРНАТИВ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ В УСЛОВИЯХ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЛИЦА,
ПРИНИМАЮЩЕГО РЕШЕНИЯ**

Шакиров В.А.

Братский государственный университет, г. Братск

Поступила 13.12.2017, после переработки 14.04.2018.

Предложено развитие методов многокритериальной теории полезности для случая неопределенности предпочтений лица, принимающего решения, в отношении ценности оценок по критериям и важности критериев. Рассмотрены основные этапы методов многокритериальной теории полезности MAUT, MAVT. Предложены процедуры построения нечетких однокритериальных функций полезности и ценности. Предложен подход к определению полезности исходов альтернатив при точных, интервальных и нечетких оценках по критериям, а также при описании последствий функцией плотности распределения вероятностей. Рассмотрен подход к определению шкалирующих коэффициентов в условиях неопределенности предпочтений лица, принимающего решения. В результате применения предложенного подхода при аддитивной функции полезности или ценности, может быть сформирована система линейных уравнений с нечеткими коэффициентами. Для ее решения предлагается использовать подход, основанный на представлении системы нечетких линейных уравнений в виде множества систем интервальных уравнений, получаемых при разбиении нечетких множеств по α -уровням. Результат внешнего оценивания множества решений интервальной системы линейных уравнений позволит установить интервалы изменения шкалирующих коэффициентов в условиях неопределенности предпочтений ЛПР и, далее, получить нечеткие шкалирующие коэффициенты многокритериальных функций полезности, ценности.

Ключевые слова: принятие решений, теория полезности, нечеткое число, интервал, система уравнений.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 17–35.
<https://doi.org/10.26456/fssc37>

1. Введение

Методы многокритериальной теории полезности MAUT (Multi-Attribute Utility Theory), MAVT (Multi-Attribute Value Theory) служили основой поддержки принятия решений во многих исследованиях в области энергетики, медицины, транспортной безопасности, развития городской инфраструктуры [1, 2], анализа чрезвычайных ситуаций [3], охраны окружающей среды [4].

Для принятия решений в условиях неполной и неточной информации методы MAVT, MAUT были расширены до нечетких версий. Можно выделить два подхода. В первом подходе была обеспечена возможность использования нечетких весов критериев и нечеткой ценности критериальных оценок в рамках метода FMAVT. При этом использовались обычные однокритериальные функции ценности [5, 6]. Впоследствии была обеспечена возможность использования нечетких однокритериальных функций ценности в рамках метода FMAVT [7]. В рамках второго подхода развитие получил метод MAUT путем использования лингвистических переменных и лингвистических лотерей [8].

Статья продолжает развитие методов MAUT и MAVT в рамках первого подхода – предлагаются процедуры построения нечетких однокритериальных функций полезности и ценности, а также подход к определению шкалирующих коэффициентов.

2. Применение методов MAUT, MAVT в условиях неопределенности предпочтений ЛПР

На Рис. 1 представлены основные этапы методов MAUT, MAVT.

Рис. 1: Этапы методов MAUT, MAVT

На первом этапе при взаимодействии с лицом, принимающим решения (ЛПР), формируется основная и составные цели, преследуемые при решении проблемы. Формируются критерии, которые служат для оценки степени достижения целей при сравнении альтернатив.

На втором этапе формируется набор альтернатив, проводится сбор информации для их оценки по критериям. В связи с ограниченными финансовыми, трудовыми и временными ресурсами получение точной информации, как правило, затруднительно. Для принятия решений в таких условиях, называемых условиями риска, используют метод MAUT. В случае, если по критериям могут быть получены точные оценки, следует использовать метод MAVT.

На третьем этапе проводится проверка условий, необходимых для возможности применения методов MAUT, MAVT [1]. При выполнении условий взаимной независимости критериев по полезности может быть получена многокритериаль-

ная функция полезности в аддитивном [1]:

$$u(y) = u(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n k_i u_i(y_i), \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1, \quad k_i > 0 \quad (1)$$

или мультипликативном виде [1]:

$$ku(y) = ku(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n (k k_i u_i(y_i) + 1), \quad 1 > k_i > 0, \quad k > -1, \quad (2)$$

где $u_i(y_i)$ – однокритериальная функция полезности; y_i – исход альтернативы по критерию i ; k, k_i – шкалирующие коэффициенты.

Если рассматривается выбор в условиях определенности, функцию полезности $u(y)$ называют функцией ценности $v(y)$. Выполнение условия взаимной независимости критериев по предпочтению позволяет получить функцию ценности в аддитивном виде [1]:

$$v(y) = v(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n k_i v_i(y_i), \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1, \quad k_i > 0. \quad (3)$$

где $v_i(y_i)$ – однокритериальная функция ценности; y_i – оценка альтернативы по i -му критерию.

На четвертом этапе проводится построение однокритериальных функций полезности или ценности.

Построение однокритериальной функции ценности ведется по нескольким опорным точкам (Рис. 2а). Вначале проводится нормализация – лучшей оценке y_i^1 по критерию i присваивается ценность $v_i(y_i^1) = 1$, худшему значению y_i^0 присваивается ценность $v_i(y_i^0) = 0$. Далее следует привлечь другой критерий j для поиска точки, субъективно средней по ценности в интервале от y_i^0 до y_i^1 . Эта оценка y_i^a будет иметь ценность $v_i(y_i^a) = 0.5$. Аналогично определяются точки с ценностью 0.25 и 0.75. Пяти точек, как правило, достаточно для построения функции ценности.

Построение однокритериальной функции полезности также осуществляется по нескольким опорным точкам (Рис. 2б). После нормализации для определения промежуточных значений функции необходимо предложить ЛПР лотерею. Например, ЛПР необходимо задать детерминированный эквивалент $\hat{y}_i^a$, который оно считает равноценным лотерее с двумя исходами y_i^0 и y_i^1 , вероятность которых $p_1 = 50\%$, $p_2 = 50\%$. Полезность детерминированного эквивалента равна 0.5. Аналогично определяются точки с полезностью 0.25 и 0.75. Пяти точек, как правило, достаточно для построения функции полезности.

Следует отметить, что определение средней по ценности точки при построении функции ценности, или детерминированного эквивалента лотереи при построении функции полезности является сложным для ЛПР процессом [9]. При анализе человек может ошибаться, допускать неточности, несогласованные ответы [10]. Например, использование методов вербального анализа или метода анализа иерархий предлагает ЛПР меньшее количество запросов в более простых формулировках. Применение МАУТ, с учетом сложности и объема процедур выявления предпочтений ЛПР, может быть обоснованным в задачах с возможными тяжелыми и долгими последствиями неэффективных решений. Примеры таких

Рис. 2: Однокритериальные функции а) ценности, б) полезности

задач приводились во введении к статье. Например, последствия выбора площадки размещения атомной электростанции будут проявляться в течение многих десятилетий на протяжении всех этапов жизненного цикла, и даже после ликвидации объекта. При решении таких задач трудоемкость оправдывается научной обоснованностью решений МАУТ, проработанностью способов выявления предпочтений ЛПР [10]. Кроме того, МАУТ создает модель предпочтений ЛПР, которая позволит сравнивать любое число альтернатив, в отличие от методов, направленных на сопоставление ограниченного числа альтернатив. Для преодоления описанных выше сложностей при построении функций ценности или полезности с назначением точных оценок целесообразно дать ЛПР возможность указать оценки неточно, с использованием интервалов возможных отклонений оценок.

Рассмотрим предлагаемую процедуру построения нечеткой однокритериальной функции ценности (НОФЦ). Необходимость ее построения возникает в связи с неопределенностью, имеющейся у ЛПР в отношении ценности критериальных оценок. Неопределенность может возникать в связи с несколькими сценариями развития решаемой проблемы, наличием нескольких мнений при групповом принятии решений.

Примем следующие обозначения оценок по критериям y и ценности оценок по критериям v . Верхний индекс W соответствует большей, а B – меньшей оценке, если ЛПР стремится получить меньшие оценки по критерию. И наоборот, верхний индекс W соответствует меньшей, а B – большей оценке, если ЛПР стремится получить большие оценки по критерию (*worst* – худшая, *best* – лучшая оценки). Верхний индекс R – означает правую границу ценности (большее значение). Верхний индекс L – означает левую границу ценности (меньшее значение). Верхний индекс C (*core*) соответствует ядру нечеткой оценки.

Построение НОФЦ ведется по пяти опорным точкам. После нормализации, на интервале от $[y_i^0, y_i^1]$ определяется средняя по ценности точка $y_i^{0.5C}$, а также возможные граничные значения $y_i^{0.5W}$, $y_i^{0.5B}$ (Рис. 3). ЛПР считает, что изменение оценки по критерию с y_i^0 до $y_i^{0.5C}$ равноценно изменению с $y_i^{0.5C}$ до y_i^1 , но допуска-

ет возможное изменение точки равной ценности от $y_i^{0.5W}$ до $y_i^{0.5B}$. По сравнению со стандартной процедурой ЛПР необходимо дать дополнительные два ответа о возможных граничных значениях. Анализ диалоговых процедур [1, 2] показывает, что эти границы фактически выявляются при поиске ответа на первый вопрос о точке равной ценности путем сужения исходного интервала предполагаемых значений. Также, граничные значения позволяют убедиться в согласованности ответов ЛПР, тем самым исключив эту процедуру в дальнейшем.

Рис. 3: Этап определения средней по ценности точки $y_i^{0.5C}$, а также возможных граничных значений $y_i^{0.5W}$, $y_i^{0.5B}$

Таким образом, от ЛПР будет получена нечеткая оценка с функцией принадлежности $f(y_i^{0.5W}, y_i^{0.5C}, y_i^{0.5B})$. Оценки $y_i^{0.5W}, y_i^{0.5C}, y_i^{0.5B}$ имеют одинаковую ценность для ЛПР, равную 0.5, но с разной степенью принадлежности. Оценка $y_i^{0.5C}$ имеет ценность 0.5 со степенью принадлежности $\mu = 1$, а $y_i^{0.5W}, y_i^{0.5B}$ имеют ценность 0.5 с $\mu = 0$, поскольку являются граничными для ЛПР значениями. Указанные оценки отмечены на Рис. 3 соответственно $v_i^C(y_i^{0.5C})$, $v_i^R(y_i^{0.5W})$, $v_i^L(y_i^{0.5B})$. Аналогичным образом устанавливаются средние по ценности точки на интервале $[y_i^0, y_i^{0.5C}]$ для определения соответственно $y_i^{0.25W}, y_i^{0.25C}, y_i^{0.25B}$, а также – на интервале $[y_i^{0.5C}, y_i^1]$ для определения соответственно $y_i^{0.75W}, y_i^{0.75C}, y_i^{0.75B}$. На Рис. 4 представлен пример НОФЦ.

Для нахождения нечетких оценок ценности по построенным функциям были предложены процедуры определения образов при нечетком отображении точных и нечетких оценок по критериям [7].

Рассмотрим построение нечеткой однокритериальной функции полезности (НОФП). После нормализации, для определения промежуточных значений НОФП ЛПР может задать детерминированный эквивалент неточной оценкой, а нечеткой $f(\hat{y}_i^{0.5W}, \hat{y}_i^{0.5C}, \hat{y}_i^{0.5B})$. По сравнению со стандартной процедурой ЛПР необходимо дать дополнительные два ответа о возможных граничных значениях детерминированного эквивалента. Анализ диалоговых процедур [1, 2] показывает, что эти границы могут определяться в процессе поиска ответа на первый вопрос при постепенном сужении исходного предполагаемого интервала.

Рис. 4: НОФЦ, образованная треугольными функциями принадлежности

Полезность исходов $\hat{y}_i^{0.5W}$, $\hat{y}_i^{0.5C}$, $\hat{y}_i^{0.5B}$ равна 0.5 со степенью принадлежности $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 0$ соответственно.

Детерминированные эквиваленты $\hat{y}_i^{0.25W}$, $\hat{y}_i^{0.25C}$, $\hat{y}_i^{0.25B}$ для соответствующей лотереи с исходами y_i^0 , $y_i^{0.5C}$ позволяют установить точки с полезностью 0.25. Детерминированные эквиваленты $\hat{y}_i^{0.75W}$, $\hat{y}_i^{0.75C}$, $\hat{y}_i^{0.75B}$ для соответствующей лотереи с исходами $y_i^{0.5C}$, y_i^1 позволяют установить точки с полезностью 0.75.

По точкам $(y_i^0, 0)$, $(\hat{y}_i^{0.25W}, 0.25)$, $(\hat{y}_i^{0.5W}, 0.5)$, $(\hat{y}_i^{0.75W}, 0.75)$, $(y_i^1, 1)$; $(y_i^0, 0)$, $(\hat{y}_i^{0.25C}, 0.25)$, $(\hat{y}_i^{0.5C}, 0.5)$, $(\hat{y}_i^{0.75C}, 0.75)$, $(y_i^1, 1)$ и $(y_i^0, 0)$, $(y_i^0, 0.25)$, $(\hat{y}_i^{0.5B}, 0.5)$, $(\hat{y}_i^{0.75B}, 0.75)$, $(y_i^1, 1)$ могут быть построены функции $u_i^R(y_i)$, $u_i^C(y_i)$, $u_i^L(y_i)$ соответственно. Эти функции позволяют определить полезность критериальной оценки с достоверностью $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 0$, соответственно. Графическое представление процедуры построения нечеткой функции полезности аналогично НОФЦ (Рис. 4).

Рассмотрим процедуры определения полезности исходов. В общем случае, альтернативам по сформулированным ЛПР критериям могут назначаться субъективные оценки экспертов или оценки, полученные с помощью различных моделей измерения. Если оценки альтернатив по критериям не характеризуются вероятностями исходов, а выражаются точными, интервальными или нечеткими оценками, то определение полезности проводится, соответственно:

$$\tilde{u}_i(y_i^k) = f(u_i^L(y_i^k), u_i^C(y_i^k), u_i^R(y_i^k)), \quad (4)$$

$$\tilde{u}_i(\bar{y}_i) = f\left(u_i^L(y_i^W), u_i^C\left(\frac{1}{2}(y_i^W + y_i^B)\right), u_i^R(y_i^B)\right), \quad (5)$$

$$\tilde{u}_i(\tilde{y}_i) = f(u_i^L(y_i^W), u_i^C(y_i^C), u_i^R(y_i^B)). \quad (6)$$

Если последствия выбора альтернативы описываются векторами исходов по i -му критерию $y_i^k = y_i^{k1}, y_i^{k2}, \dots, y_i^{kq}$ и вероятностями их наступления $p_i^k = p_i^{k1} p_i^{k2}, \dots, p_i^{kq}$, то предлагается следующий подход к определению полез-

ности альтернативы:

$$\tilde{u}_i(y_i^k) = f \left(\sum_{j=1}^q u_i^L(y_i^{kj}) p_i^{kj}, \sum_{j=1}^q u_i^C(y_i^{kj}) p_i^{kj}, \sum_{j=1}^q u_i^R(y_i^{kj}) p_i^{kj} \right). \quad (7)$$

При описании последствий функцией плотности распределения вероятностей предлагается полезность альтернативы определять как:

$$\tilde{u}_i(y_i^k) = f \left(\int u_i^L(y_i^k) p(y_i^k) dy, \int u_i^C(y_i^k) p(y_i^k) dy, \int u_i^R(y_i^k) p(y_i^k) dy \right). \quad (8)$$

На пятом этапе (Рис. 1) определяются шкалирующие коэффициенты. Для этого проводится формирование системы линейных уравнений со шкалирующими коэффициентами, полученными при сопоставлении альтернатив с равной полезностью или ценностью [1]. Процедура формирования каждого уравнения следующая. ЛПР для рассмотрения предлагается пара искусственных альтернатив A и B . Устанавливается, что альтернатива A имеет лучшую оценку по критерию i и худшую оценку по критерию j . Альтернатива B имеет худшую оценку по критерию i и лучшую оценку по критерию j . ЛПР предлагается сделать выбор между альтернативами A и B . Пусть ЛПР определяет альтернативу A как более предпочтительную, что позволяет заключить о большей важности критерия i . Затем ему предлагается определить альтернативу C с худшей оценкой по критерию j по менее важному критерию и оценкой y_i^C по более важному критерию i , равноценную проигравшей в предыдущем сопоставлении альтернативе B . Полученный ответ позволяет, используя (3), составить уравнение:

$$\sum_{i=1}^n k_i v_i(y_i^B) = \sum_{i=1}^n k_i v_i(y_i^C), \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1, \quad k_i > 0. \quad (9)$$

Для упрощения анализа оценки альтернатив A , B и C по всем критериям, кроме i , j , фиксируются на худшем уровне для исключения из уравнения (9):

$$k_i v_i(y_i^B) + k_j v_j(y_j^B) = k_i v_i(y_i^C) + k_j v_j(y_j^C), \quad k_i > 0, \quad k_j > 0. \quad (10)$$

Так как оценка альтернативы B по критерию i худшая, а по критерию j – лучшая, то $v_i(y_i^B) = 0$, $v_j(y_j^B) = 1$. Так как оценка альтернативы C по критерию j худшая, то $v_j(y_j^C) = 0$. В результате уравнение (10) принимает вид:

$$k_j = k_i v_i(y_i^C), \quad k_i > 0, \quad k_j > 0. \quad (11)$$

С учетом условия $\sum_{i=1}^n k_i = 1$ достаточно составить $n - 1$ уравнений такого вида.

В условиях неопределенности предпочтений, ЛПР затрудняется устанавливать соответствия между равноценными альтернативами. Поэтому оценка y_i^C может быть представлена нечетким числом. Для возможности учета этой неопределенности предложен подход к определению шкалирующих коэффициентов [7].

Так, в результате применения предложенного подхода при аддитивной функции полезности или ценности, может быть сформирована система линейных урав-

нений с нечеткими коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_2 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 (\tilde{y}_1^2), \\ \tilde{k}_3 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 (\tilde{y}_1^3), \\ \dots \\ \tilde{k}_j = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 (\tilde{y}_1^j), \\ \dots \\ \tilde{k}_n = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1 (\tilde{y}_1^n), \\ \sum \tilde{k}_i = 1, \\ \tilde{k}_i^L > 0, \\ \tilde{k}_i^R > 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

где $\tilde{y}_1^j$ – нечеткая оценка по 1-му критерию, такая, что альтернативы, отличающиеся оценками только по 1-му и j -му критериям равноценны.

Для формирования системы уравнений вида (12) необходимо наиболее важному критерию присвоить индекс $i = 1$ и при формировании пар альтернатив для сопоставления критериев необходимо всегда использовать наиболее важный критерий.

Особенностью решения уравнений с нечеткими числами является невыполнение, в общем случае, свойства дистрибутивности, отсутствие обратного и противоположного числа [8]. Первые подходы к решению нечетких уравнений заключались во введении дополнительных операций вычитания и деления нечетких чисел [11-13]. Другие подходы к решению уравнений, в случае использования нечетких L - R чисел, основаны на разложении нечетких чисел по системе уровней множеств [14]. Исследования применимости классических подходов, основанных на принципе обобщения [8], показали, что достаточно часто решение не может быть найдено [15].

Широкое распространение получили подходы, основанные на представлении системы нечетких линейных уравнений в виде множества систем интервальных уравнений, получаемых при разбиении нечетких множеств по α -уровням [15,16].

Множеством уровня α нечеткого множества A в X называют множество в обычном смысле, составленное из элементов $x \in X$, степени принадлежности которых нечеткому множеству A не меньше числа α [17]:

$$A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (13)$$

Нечеткое число $\tilde{x}_i$ можно представить [18]:

$$\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \bar{x}_{i,\alpha}. \quad (14)$$

Таким образом, из системы уравнений (12) можно получить множество интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{2,\alpha} = \bar{k}_{1,\alpha} \bar{v}_{1,\alpha} (\bar{y}_{1,\alpha}^2), \\ \bar{k}_{3,\alpha} = \bar{k}_{1,\alpha} \bar{v}_{1,\alpha} (\bar{y}_{1,\alpha}^3), \\ \dots \\ \bar{k}_{n,\alpha} = \bar{k}_{1,\alpha} \bar{v}_{1,\alpha} (\bar{y}_{1,\alpha}^n), \\ \sum \bar{k}_{i,\alpha} = 1, \end{array} \right. \quad (15)$$

где $\alpha \in [0; 1]$.

Объединенное множество решений ИСЛАУ будет включать множество решений, полученных из линейных систем вида:

$$\begin{cases} k_{2,\alpha} = k_{1,\alpha} v_{1,\alpha} (y_{1,\alpha}^2), \\ k_{3,\alpha} = k_{1,\alpha} v_{1,\alpha} (y_{1,\alpha}^3), \\ \dots \\ k_{j,\alpha} = k_{1,\alpha} v_{1,\alpha} (y_{1,\alpha}^j), \\ \dots \\ k_{n,\alpha} = k_{1,\alpha} v_{1,\alpha} (y_{1,\alpha}^n), \\ \sum k_{i,\alpha} = 1, \end{cases} \quad (16)$$

где $v_{1,\alpha} (y_{1,\alpha}^j) \in [v_{1,\alpha}^L (y_{1,\alpha}^{jW}); v_{1,\alpha}^R (y_{1,\alpha}^{jB})]$, $k_{j,\alpha} \in [k_{j,\alpha}^L; k_{j,\alpha}^R]$.

Прямое вычисление и описание множеств решений ИСЛАУ оказывается, как правило, трудоемким, а часто и просто невозможным [19]. Множество решений может иметь сложную структуру [20]. Практическим следствием этих фактов является необходимость более грубого описания множеств решений, т.е. их замена на более простые множества – их приближения с меньшей сложностью описания [19]. В современном интервальном анализе популярными способами оценивания являются внешнее и внутреннее оценивание [19].

Для многокритериальной оценки альтернатив в условиях неопределенности предпочтений ЛПР представляет интерес именно внешнее оценивание множества решений ИСЛАУ. К настоящему времени разработаны методы Гаусса, Гаусса-Зейделя, Кравчика, Хансена-Блика-Рона, формальный подход [19]. Результат внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ позволит установить интервалы изменения шкалирующих коэффициентов в условиях неопределенности предпочтений ЛПР и, далее, позволит получить нечеткие шкалирующие коэффициенты многокритериальных функций полезности, ценности. Следует учесть, что внешняя оценка ИСЛАУ особенно просто находится в случаях, когда имеет специальную форму [19].

На шестом этапе (Рис. 1) проводится многокритериальная оценка альтернатив с помощью (1), (2) или (3), которые при использовании нечетких однокритериальных функций и шкалирующих коэффициентов будут иметь измененный соответствующий вид.

На седьмом этапе проводится анализ чувствительности, который сводится, в целом, к повторным оценкам альтернатив при изменении некоторой исходной информации. Целью является изучение зависимости оценок альтернатив от исходной информации модели принятия решений. Анализ чувствительности может проводиться в отношении объективной и субъективной информации – исходной и получаемой в процессе принятия решений от ЛПР [2]. В случае использования нечетких однокритериальных функций полезности или ценности, нечетких шкалирующих коэффициентов, необходимость в анализе чувствительности к изменению структуры ценностей ЛПР отсутствует. Более того, полученные в результате нечеткие многокритериальные оценки альтернатив в большей мере отражают возможные изменения системы ценностей ЛПР.

3. Пример

Рассмотрим отдельные этапы многокритериальной оценки альтернатив в условиях неопределенности предпочтений ЛПР на гипотетическом примере.

Пусть перед ЛПР стоит задача многокритериального оценивания множества альтернатив по трем критериям в условиях определенности. В Таблице 1 представлена информация по оценкам альтернатив.

Таблица 1: Оценки альтернатив

Критерий	Худшая оценка	Лучшая оценка
$K1$	20	80
$K2$	10	50
$K3$	15	90

В результате проверки условий-аксиом установлено, что функция ценности имеет аддитивный вид. В соответствии с Рис. 1 четвертым этапом проводится построение однокритериальных функций ценности. Рассмотрим процедуру построения нечеткой однокритериальной функции ценности для первого критерия.

Построение НОФЦ проведем по пяти опорным точкам. Худшей оценке по первому критерию y_1^0 соответствует ценность $v_1(y_1^0) = 0$, а лучшей оценке y_1^1 соответствует ценность $v_1(y_1^1) = 1$. Далее определяется средняя по ценности точка $y_1^{0.5C}$, а также возможные граничные значения $y_1^{0.5W}$, $y_1^{0.5B}$. ЛПР предлагается ответить на вопрос: «Предположим, имеется альтернатива с оценкой по первому критерию 20. За какое изменение Вы заплатили бы больше – от 20 до 50 или от 50 до 80?». Предположим, ЛПР предпочитает заплатить больше за первое изменение. Вопрос повторяется в аналогичной формулировке: «За какое изменение Вы заплатили бы больше – от 20 до 30 или от 30 до 80?». При достаточно сильном снижении первого интервала ЛПР может предпочесть второе изменение. Вопрос повторяется в аналогичной формулировке: «За какое изменение Вы заплатили бы больше – от 20 до 40 или от 40 до 80?». ЛПР может ответить, что данные изменения имеют равную значимость. После этого можно предложить ЛПР предположить расширить границы оценки $y_1^{0.5C} = 40$ и получить оценки $y_1^{0.5W}$, $y_1^{0.5B}$. Эти оценки отражают неуверенность ЛПР в выражении точной оценки $y_1^{0.5C} = 40$. Например, $y_1^{0.5W} = 35$; $y_1^{0.5B} = 45$. Далее необходимо предложить ЛПР установить точку равной ценности на интервале $[20, 40]$ для определения $y_1^{0.25W}$, $y_1^{0.25C}$, $y_1^{0.25B}$, а также – на интервале $[40, 80]$ для определения $y_1^{0.75W}$, $y_1^{0.75C}$, $y_1^{0.75B}$. После нескольких процедур установления точек равной ценности, число вопросов может быть снижено и предложено ЛПР устанавливать нечеткие оценки без дополнительных вопросов. Пусть в результате опроса получены следующие оценки: $y_1^{0.25W} = 25$; $y_1^{0.25C} = 27$; $y_1^{0.25B} = 29$; $y_1^{0.75W} = 58$; $y_1^{0.75C} = 60$; $y_1^{0.75B} = 62$. Аналогично могут быть построены НОФЦ критериев $K2$ и $K3$. На Рис. 5 представлены полученные НОФЦ трех критериев.

На этапе 5 (Рис. 1) проводится определение шкалирующих коэффициентов. Вначале необходимо упорядочить критерии по предпочтению. Для этого ЛПР предлагается определить приоритет повышения оценок по критериям от худшего до лучшего уровня. Пусть в результате опроса установлено, что критерий $K1$ важнее критерия $K2$, критерий $K2$ важнее критерия $K3$. Критерий $K1$ объявляется базовым для проведения парных сравнений альтернатив. ЛПР для рассмотрения предлагается следующая ситуация. Рассматривается пара искусственных альтернатив $A1$ и B , отличающиеся оценками по критериям $K1$ и $K2$, оценки альтернатив по критерию $K3$ фиксируются на худшем уровне. Альтернатива $A1$ имеет худшую оценку по критерию $K2$. Альтернатива B имеет худшую оценку

Рис. 5: Нечеткие однокритериальные функции ценности трех критериев

по критерию $K1$ и лучшую оценку по критерию $K2$. ЛПР предлагается определить оценку y_1^{A1} по более важному критерию $K1$ альтернативы $A1$, такую, что альтернативы A и B были бы равноценны (Рис. 6а). На первом шаге ЛПР могут быть предложены заведомо неравноценные пары, например $A1$ (25, 10, 15) и B (20, 50, 15); $A1$ (75, 10, 15) и B (20, 50, 15). Далее постепенно интервал оценок по критерию $K1$ в вопросах сужается. Так, на Рис. 6а равноценными по мнению ЛПР являются альтернативы $A1$ (60, 10, 15) и B (20, 50, 15). Однако ЛПР может допускать, в виду различных возможных влияющих факторов, изменения предпочтений в границах оценок по критерию $K1$ от 55 до 65. В результате получена нечеткая оценка $\tilde{y}_1^{A1}$. Аналогично проводится опрос для установления соотношений между критериями $K1$ и $K3$ (Рис. 6б).

Рис. 6: Процедура формирования уравнений для оценки шкалирующих коэффициентов

Полученные ответы позволяют, используя (10) и (11), составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{k}_2 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1(\tilde{y}_1^{A1}), \\ \tilde{k}_3 = \tilde{k}_1 \tilde{v}_1(\tilde{y}_1^{A2}), \\ \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 = 1. \end{cases} \quad (17)$$

В системе (17) нечеткие шкалирующие коэффициенты $\tilde{k}_1 > 0$, $\tilde{k}_2 > 0$, $\tilde{k}_3 > 0$.

Полученную систему нечетких линейных уравнений представим в виде множества систем интервальных уравнений, получаемых при разбиении нечетких множеств по α -уровням:

$$\begin{cases} \bar{k}_{2,\alpha} = \bar{k}_{1,\alpha} \bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A1}), \\ \bar{k}_{3,\alpha} = \bar{k}_{1,\alpha} \bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A2}), \\ \bar{k}_{1,\alpha} + \bar{k}_{2,\alpha} + \bar{k}_{3,\alpha} = 1, \end{cases} \quad (18)$$

где $\alpha \in [0; 1]$.

Определим интервальные значения шкалирующих коэффициентов решением системы при $\alpha = 0$. Прежде всего, необходимо определить интервальную ценность интервальных оценок $\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A1}$, $\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A2}$ (Рис. 7).

Рис. 7: Процедура определения интервальной ценности интервальных оценок альтернатив

Запишем систему (18) в следующем виде:

$$\begin{cases} [k_{2,\alpha=0}^L; k_{2,\alpha=0}^R] = [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [v_{1A1,\alpha=0}^L; v_{1A1,\alpha=0}^R], \\ [k_{3,\alpha=0}^L; k_{3,\alpha=0}^R] = [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [v_{1A2,\alpha=0}^L; v_{1A2,\alpha=0}^R], \\ [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] + [k_{2,\alpha=0}^L; k_{2,\alpha=0}^R] + [k_{3,\alpha=0}^L; k_{3,\alpha=0}^R] = 1, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} [k_{2,\alpha=0}^L; k_{2,\alpha=0}^R] = [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [0.31; 0.63], \\ [k_{3,\alpha=0}^L; k_{3,\alpha=0}^R] = [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [0.65; 0.83], \\ [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] + [k_{2,\alpha=0}^L; k_{2,\alpha=0}^R] + [k_{3,\alpha=0}^L; k_{3,\alpha=0}^R] = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Подставляя правые части первого и второго уравнения системы (20) в третье уравнение, получим:

$$[k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] + [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [0.31; 0.63] + [k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] \cdot [0.65; 0.83] = 1.$$

При использовании арифметики Каухера и совпадении знаков интервалов, соблюдается свойство дистрибутивности [19], поэтому:

$$[k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R](1 + [0.31; 0.63] + [0.65; 0.83]) = 1,$$

$$[k_{1,\alpha=0}^L; k_{1,\alpha=0}^R] [1.96; 2.46] = 1.$$

Проведя операцию внутреннего деления [19], получим:

$$k_{1,\alpha=0}^L = 0.51, \quad k_{1,\alpha=0}^R = 0.407.$$

Подставляя найденные значения в первое и второе уравнения системы (20), используя операцию умножения [19], определим:

$$[k_{2,\alpha=0}^L; k_{2,\alpha=0}^R] = [0.51; 0.407] \cdot [0.31; 0.63] = [0.158; 0.256];$$

$$[k_{3,\alpha=0}^L; k_{3,\alpha=0}^R] = [0.51; 0.407] \cdot [0.65; 0.83] = [0.332; 0.338].$$

Определенные по вышеприведенным выражениям интервалы $\bar{k}_{2,\alpha=0}$, $\bar{k}_{3,\alpha=0}$ уже границ возможных решений интервальной системы уравнений (20) для этих коэффициентов. Полученные интервалы лишь соответствуют решению, определяющему возможные границы $\bar{k}_{1,\alpha=0}$. Для обозначения интервалов, соответствующих возможным границам, будем использовать символ *. Соответствующие значения других коэффициентов будем обозначать индексом о. Таким образом:

$$\bar{k}_{1*,\alpha=0} = [0.51; 0.407]; \quad \bar{k}_{2o,\alpha=0} = [0.158; 0.256]; \quad \bar{k}_{3o,\alpha=0} = [0.332; 0.338].$$

Для определения $\bar{k}_{2*,\alpha=0}$, $\bar{k}_{3*,\alpha=0}$ проведем анализ систем (18), (19). Границы возможных решений каждого из шкалирующих коэффициентов $\bar{k}_{1*,\alpha=0}$, $\bar{k}_{2*,\alpha=0}$, $\bar{k}_{3*,\alpha=0}$ могут быть получены при определенных граничных значениях оценок ценности $\bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A1})$, $\bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A2})$. Например, решение системы (19), определяющее левую границу $k_{2*,\alpha=0}^L$, достигается, когда оценка ценности $\bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A1})$ принимает значение своей левой границы, а оценки ценности $\bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A2})$ — значения своей правой границы, и наоборот — для правой границы $k_{2*,\alpha=0}^R$. Верность этого утверждения следует из того, что сумма шкалирующих коэффициентов равна 1, значит для определения наименьшего возможного значения $\bar{k}_{2*,\alpha=0}$ необходимо, чтобы $\bar{k}_{3*,\alpha=0}$ принял максимальное возможное значение. Последнее, исходя из второго уравнения (19) или (20), возможно только при правой границе ценности $\bar{v}_{1,\alpha}(\bar{y}_{1,\alpha}^{A2})$. Сформулированное правило справедливо и при решении систем с большим числом уравнений.

Исходя из отмеченных особенностей, необходимо модифицировать систему уравнений (18) для определения границ возможных решений $\bar{k}_{2*,\alpha=0}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{k}_{2*,\alpha=0} = \bar{k}_{1o,\alpha=0} \bar{v}_{1,\alpha=0}(\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A1}), \\ \bar{k}_{3o,\alpha=0} = \bar{k}_{1o,\alpha=0} \bar{v}_{1,\alpha=0}(\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A2}), \\ \bar{k}_{1o,\alpha=0} + \bar{k}_{2*,\alpha=0} + \bar{k}_{3o,\alpha=0} = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Операция дуализации меняет местами концы интервала [19]:

$$\begin{cases} [k_{2*,\alpha=0}^L; k_{2*,\alpha=0}^R] = [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.31; 0.63], \\ [k_{3o,\alpha=0}^L; k_{3o,\alpha=0}^R] = [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.83; 0.65], \\ [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] + [k_{2*,\alpha=0}^L; k_{2*,\alpha=0}^R] + [k_{3o,\alpha=0}^L; k_{3o,\alpha=0}^R] = 1. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя правые части первого и второго уравнения системы (22) в третье уравнение, получим:

$$[k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] + [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.31; 0.63] + [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.83; 0.65] = 1,$$

$$\bar{k}_{1o,\alpha=0} = [0.467; 0.439].$$

Подставляя найденные значения в первое и второе уравнение системы (22), получим:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2*,\alpha=0} &= [0.145; 0.277], \\ \bar{k}_{3o,\alpha=0} &= [0.388; 0.285].\end{aligned}$$

Для определения $\bar{k}_{3*,\alpha=0}$ составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{k}_{2o,\alpha=0} = \bar{k}_{1o,\alpha=0} dual \bar{v}_{1,\alpha=0} (\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A1}), \\ \bar{k}_{3*,\alpha=0} = \bar{k}_{1o,\alpha=0} \bar{v}_{1,\alpha=0} (\bar{y}_{1,\alpha=0}^{A2}), \\ \bar{k}_{1o,\alpha=0} + \bar{k}_{2o,\alpha=0} + \bar{k}_{3*,\alpha=0} = 1. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} [k_{2o,\alpha=0}^L; k_{2o,\alpha=0}^R] = [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.63; 0.31], \\ [k_{3*,\alpha=0}^L; k_{3*,\alpha=0}^R] = [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] \cdot [0.65; 0.83], \\ [k_{1o,\alpha=0}^L; k_{1o,\alpha=0}^R] + [k_{2o,\alpha=0}^L; k_{2o,\alpha=0}^R] + [k_{3*,\alpha=0}^L; k_{3*,\alpha=0}^R] = 1. \end{cases} \quad (24)$$

Решая систему по аналогии с предыдущими, получим:

$$\bar{k}_{1o,\alpha=0} = [0.439; 0.467], \quad \bar{k}_{2o,\alpha=0} = [0.277; 0.145], \quad \bar{k}_{3*,\alpha=0} = [0.285; 0.388].$$

Получив значения интервальных шкалирующих коэффициентов, можно записать аддитивную многокритериальную функцию ценности:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\alpha=0}(\bar{y}_{\alpha=0}) &= \bar{v}_{1,\alpha=0}(\bar{y}_{1,\alpha=0}) \bar{k}_{1*,\alpha=0} + \bar{v}_{2,\alpha=0}(\bar{y}_{2,\alpha=0}) \bar{k}_{2*,\alpha=0} + \\ &+ \bar{v}_{3,\alpha=0}(\bar{y}_{3,\alpha=0}) \bar{k}_{3*,\alpha=0}.\end{aligned} \quad (25)$$

При подстановке оценок альтернатив по критериям в (25) необходимо определять границы многокритериальной оценки $\bar{v}_{\alpha=0}(\bar{y}_{\alpha=0})$ с учетом требования равенства 1 суммы шкалирующих коэффициентов. Для этого может быть сформулирована задача линейного программирования.

Аналогичным образом могут быть решены системы уравнений, соответствующие другим α -уровням. В результате может быть проведена многокритериальная оценка альтернатив в условиях неопределенности предпочтений ЛПР.

Заключение

Итак, в статье рассмотрено развитие методов многокритериальной теории полезности для случая неопределенности предпочтений ЛПР. Предложены процедуры построения нечетких однокритериальных функций полезности и ценности, процедуры определения нечеткой полезности исходов. Рассмотрены основные этапы применения методов MAUT и MAVT в условиях нечетко выраженных предпочтений ЛПР. На гипотетическом примере показаны основные этапы построения нечетких однокритериальных функций ценности, определения нечетких шкалирующих коэффициентов, формирования нечеткой многокритериальной функции ценности. Метод FFMAVT позволяет учесть неопределенность предпочтений ЛПР при оценке ценности альтернатив и шкалирующих коэффициентов. Эти возможности наиболее ценны при принятии решений по сложным проблемам с высокой неопределенностью будущих условий и возможными тяжелыми и длительными последствиями неэффективных решений.

Список литературы

- [1] Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / под ред. И.Ф. Шахнова. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
- [2] Кини Р.Л. Размещение энергетических объектов: выбор решений. М.: Энергоатомиздат, 1983. 320 с.
- [3] Kailiponi P. Analyzing evacuation decisions using multi-attribute utility theory (MAUT) // *Procedia Engineering*. 2010. Vol. 3. Pp. 163–174.
- [4] Huang I.B., Keisler J., Linkov I. Multi-criteria decision analysis in environmental sciences: Ten years of applications and trends // *Science of the Total Environment*. 2011. Vol. 409. Pp. 3578–3594.
- [5] Яцало Б.И., Грицюк С.В., Мирзеабасов О.А. Учет неопределенностей в рамках многокритериального анализа решений с использованием концепции приемлемости // *Управление большими системами*. 2011. № 32. С. 5–30.
- [6] Yatsalo B., Didenko V., Gritsyuk S., Sullivan T. Decerns: a framework for multicriteria decision analysis // *International Journal of Computational Intelligence Systems*. 2015. Vol. 8, № 3. Pp. 467–489.
- [7] Шакиров В.А. Принятие решений в условиях нечетких предпочтений на основе многокритериальной теории ценности // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2012. № 3. С. 48–55.
- [8] Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В., Слядзь Н.Н., Глушков В.И. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. М.: Радио и связь, 1989. 304 с.
- [9] Ларичев О.И. Новое направление в теории принятия решений: вербальный анализ решений // *Информационные технологии и вычислительные системы*. 1996. № 2. С. 15–20.
- [10] Петровский А.Б. Теория принятия решений: учебник для студ. высш. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 400 с.
- [11] Алексеев А.В. Решение линейных нечетких уравнений // Тезисы V научно-технического семинара «Управление при наличии расплывчатых категорий». Пермь: НИИ управл. машин и систем, 1982. Ч.1. С. 24–27.
- [12] Алексеев А.В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений // *Прикладные задачи анализа решений в организационно-технических системах*. Рига: Рижский политехнический институт, 1983. С. 38–42.
- [13] Dubois D., Prade H. Inverse Operations for Fuzzy Numbers // *Proc. of the IFAC Symp. on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis* / Eds. by E. Sanchez, M.M. Gupta. Oxford: Pergamon Press, 1984. Pp. 18–38.
- [14] Гвоздик А.А. Решение нечетких уравнений // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1984. № 5. С. 176–183.
- [15] Buckley J.J., Qu Y. Solving linear and quadratic fuzzy equations // *Fuzzy Sets and Systems*. 1990. Vol. 38. Pp. 43–59.

- [16] Vroman A., Deschrijver G., Kerre E.E. Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2007. Vol. 15, № 3. Pp. 370–384.
- [17] Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1981. 208 с.
- [18] Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. М: Горячая линия Телеком, 2007. 288 с.
- [19] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2016. 617 с.
- [20] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 223 с.

Образец цитирования

Шакиров В.А. Многокритериальная оценка альтернатив на основе теории полезности в условиях неопределенности предпочтений лица, принимающего решения // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 17–35. <https://doi.org/10.26456/fssc37>

Сведения об авторах

1. Шакиров Владислав Альбертович

декан факультета энергетики и автоматики Братского государственного университета.

Россия, 665709, г. Братск, ул. Макаренко, д. 40. БрГУ.

E-mail: myNovember@mail.ru

MULTI-CRITERIA EVALUATION OF ALTERNATIVES UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY IN THE DECISION MAKER'S PREFERENCES BASED ON UTILITY THEORY

Shakirov Vladislav Albertovich

Dean of the Power Engineering and Automation faculty,
Bratsk State University
Russia, 665709, Bratsk, 40 Makarenko str., BrSU.
E-mail: mynovember@mail.ru

Received 13.12.2017, revised 14.04.2018.

The development of the methods of multi-criteria utility theory for the case of uncertainty in the decision-maker's preferences with respect to the value of evaluations by criteria and the importance of criteria is proposed. The main stages of the methods of the multi-criterion utility theory MAUT, MAVT are considered. Procedures for constructing fuzzy one criterion utility and value functions are proposed. An approach to determine the utility of the alternatives outcomes for crisp, interval and fuzzy estimates by criteria, as well as when describing the consequences by the probability distribution function is proposed. An approach to the scaling coefficients determination in conditions of uncertainty in the decision-maker's preferences is considered. As a result of applying the proposed approach with an additive utility or value function, a system of linear equations with fuzzy coefficients can be formed. To solve it, it is proposed to use an approach based on the representation of a system of fuzzy linear equations in the form of a set of systems of interval equations obtained by splitting fuzzy sets over α -levels. The result of an external estimation of the solution set of an interval system of linear equations will allow us to establish the intervals of variation of the scaling coefficients under conditions of uncertainty in the decision maker's preferences and, furthermore, to obtain fuzzy scaling coefficients for multi-criteria utility and value functions.

Keywords: decision-making process, utility theory, fuzzy number, interval, system of equations.

Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 17–35. <https://doi.org/10.26456/fssc37>

References

- [1] Kini R.L., Rayfa K.H. *Prinyatie Resheniy pri Mnogikh Kriteriyakh: Predpochteniya i Zameshheniya* [Decision-Making under many Criteria: Preferences and Substitutions]. Ed. by I.F. Shakhnov. Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1981. 560 p. (in Russian)

- [2] Kini R.L. *Razmeshhenie Ehnergeticheskikh Ob'ektov: Vybory Resheniy* [Placement of Energy Facilities: the Choice of Solutions]. Energoatomizdat Publ., Moscow, 1983. 320 p. (in Russian)
- [3] Kailiponi P. Analyzing evacuation decisions using multi-attribute utility theory (MAUT). *Procedia Engineering*, 2010, vol. 3, pp. 163–174.
- [4] Huang I.B., Keisler J., Linkov I. Multi-criteria decision analysis in environmental sciences: Ten years of applications and trends. *Science of the Total Environment*, 2011, vol. 409, pp. 3578–3594.
- [5] Yatsalo B.I., Gritsyuk S.V., Mirzeabasov O.A. Accounting for uncertainties in multi-criteria analysis of solutions using the concept of acceptability. *Upravlenie Bol'shimi Sistemami* [Controlling Large Systems], 2011, no. 32, pp. 5–30. (in Russian)
- [6] Yatsalo B., Didenko V., Gritsyuk S., Sullivan T. Decerns: a framework for multicriteria decision analysis. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2015, vol. 8(3), pp. 467–489.
- [7] Shakirov V.A. Decision making in conditions of fuzzy preferences on the basis of multi-criteria value theory. *Sovremennyye Tekhnologii. Sistemnyy Analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2012, no. 3, pp. 48–55. (in Russian)
- [8] Borisov A.N., Alekseev A.V., Merkur'eva G.V., Slyadz' N.N., Glushkov V.I. *Obrabotka Nechetkoj Informatsii v Sistemakh Prinyatiya Resheniy* [Processing of Fuzzy Information in Decision-Making Systems]. Radio i svyaz' Publ., Moscow, 1989. 304 p. (in Russian)
- [9] Larichev O.I. New direction in the theory of decision-making: verbal analysis of solutions. *Informatsionnye Tekhnologii i Vychislitel'nye Sistemy* [Information Technologies and Computer Systems], 1996, no. 2, pp. 15–20. (in Russian)
- [10] Petrovskiy A.B. *Teoriya Prinyatiya Resheniy: Uchebnik dlya Stud. Vyssh. Ucheb. Zavedeniy* [Decision Theory: Textbook for Students of Universities]. Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», Moscow, 2009. 400 p. (in Russian)
- [11] Alekseev A.V. Solution of linear fuzzy equations. *Tezisy V Nauchno-Tekhnicheskogo Seminara «Upravlenie pri Nalichii Rasplyvchatykh Kategoriy»* [Abstracts of V Scientific and Technical Seminar « Management in the Presence of Vague Categories»]. NII upravl. mashin i sistem publ., Perm, 1982. Vol. 1. Pp. 24–27. (in Russian)
- [12] Alekseev A.V. Application of fuzzy mathematics in decision-making problems. *Prikladnye Zadachi Analiza Resheniy v Organizatsionno-Tekhnicheskikh Sistemakh* [Applied Problems of Solution Analysis in Organizational-Technical Systems]. Rzhskij politekhnicheskij institut, Riga, 1983. Pp. 38–42. (in Russian)
- [13] Dubois D., Prade H. Inverse Operations for Fuzzy Numbers. *Proc. of the IFAC Symp. on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*. Eds. by E. Sanchez, M.M. Gupta. Pergamon Press, Oxford, 1984. Pp. 18–38.

- [14] Gvozdk A.A. Solution of fuzzy equations. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika* [Izvestiya AN SSSR. Technical Cybernetics], 1984, no. 5, pp. 176–183. (in Russian)
- [15] Buckley J.J., Qu Y. Solving linear and quadratic fuzzy equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, vol. 38, pp. 43–59.
- [16] Vroman A., Deschrijver G., Kerre E.E. Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, vol. 15(3), pp. 370–384.
- [17] Orlovskij S.A. *Problemy Prinyatiya Reshenij pri Nechetkoy Iskhodnoy Informatsii* [Decision Problems with Fuzzy Source Information]. Nauka, glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1981. 208 p. (in Russian)
- [18] Shtovba S.D. *Proektirovanie Nechetkikh Sistem Sredstvami MATLAB* [Designing Fuzzy Systems using MATLAB]. Goryachaya liniya Telekom, Moscow, 2007. 288 p. (in Russian)
- [19] Sharyy S.P. *Konechnomerniy Interval'niy Analiz* [Finite-Dimensional Interval Analysis]. XYZ Publ., Novosibirsk, 2016. 617 p. (in Russian)
- [20] Kalmykov S.A., Shokin Yu.I., Yuldashev Z.Kh. *Metody Interval'nogo Analiza* [Methods of Interval Analysis]. Nauka Publ., Novosibirsk, 1986. 223 p. (in Russian)

Citation

Shakirov V.A. Multi-criteria evaluation of alternatives under conditions of uncertainty in the decision maker's preferences based on utility theory. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya* [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 17–35. (in Russian) <https://doi.org/10.26456/fssc37>